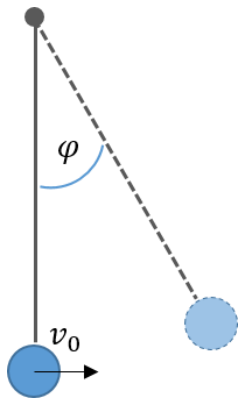
1. Pendel



Ein Stabpendel (Kugel und masseloser starrer Stab mit Länge $l = 40.0$ cm) bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_0 durch den niedrigsten Punkt.

(a) Die Geschwindigkeit durch den niedrigsten Punkt sei $v_0 = 2.5\ \mathrm{ms}^{-1}$. Um welchen Winkel φ wird das Pendel maximal ausgelenkt? (30 Punkte)

Die kinetische Energie wird vollständig in potentielle Energie umgewandelt.

$$E_{kin} = E_{pot}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh = mgl(1 - cos(\varphi_{max}))$$

Die Gleichung nach φ umformen:

$$\varphi_{max} = \cos^{-1}(1 - \frac{v_0^2}{2gl}) = \cos^{-1}(1 - \frac{(2.5\ \mathrm{m\ s^{-1}})^2}{2*9.81\ \mathrm{m\ s^{-2}}*0.400\ \mathrm{m}}) = 78.2513487°$$

$$\boldsymbol{\varphi_{max} = 78°}$$

(b) Wie groß müsste v_0 sein damit das Pendel gerade noch den höchsten Punkt (bei $\varphi = 180°$) erreicht? (35 Punkte)

Im höchsten Punkt wird die Geschwindigkeit gerade null. Also wird wieder die gesamte kinetische Energie in potentielle umgewandelt, die resultierende Höhe beträgt diesmal $2 * l$.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgl$$

Umformen nach v_0:

$$v_0 = 2\sqrt{gl} = 2 * \sqrt{9.81\ m\ s^{-2} * 0.400\ m} = 3.961817765\ m\ s^{-1}$$

$$\boldsymbol{v_0 = 3.96\ m\ s^{-1}}$$

(c) Der starre Stab des Pendels wird nun durch eine masselose Schnur, mit derselben Länge l ersetzt. Welche Geschwindigkeit v_0 muss die Masse im niedrigsten Punkt mindestens haben, damit sie im höchsten Punkt noch gerade nach oben zeigt (nicht hinunterfällt)? (35 Punkte)

Die Geschwindigkeit im höchsten Punkt muss nun noch so groß sein, dass die Zentripetalkraft die Gravitationskraft kompensiert. Im höchsten Punkt hat das Pendel also noch die Geschwindigkeit v:

$$mg = \frac{mv^2}{r} \implies v^2 = gr, \text{ wobei } r = l.$$

Die Energie muss wiederum erhalten bleiben:

$$E_{kin,0} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgl + \frac{1}{2}mgl$$

Auflösen der Formel nach v_0:

$$v_0 = \sqrt{5gl} = \sqrt{5 * 9.81\ m\ s^{-2} * 0.400\ m} = 4.429446918\ m\ s^{-1}$$
$$\boldsymbol{v_0 = 4.43\ m\ s^{-1}}$$

2. Skilift

Ein Mann der Masse $m = 73$ kg fährt Ski. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Ski und Schnee beträgt $\mu_H = 0.11$, der Gleitreibungskoeffizient $\mu_G = 0.054$.

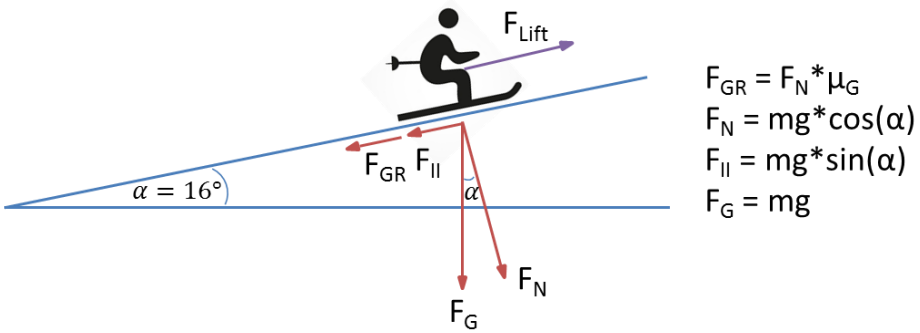
(a) Der Mann steht auf der ebenen Schneefläche am Anfang des Skiliftes und wartet darauf losgezogen zu werden. Mit welcher Kraft muss der Skilift mindestens ziehen, damit sich der Skifahrer in Bewegung setzt? (20 Punkte)

Die Kraft, mit der der Lift zieht, muss mindestens so groß sein, wie Kraft der Haftreibung:

$$F_{HR} = F_{Lift}$$
$$F_{Lift} = mg\mu_H = 73\ kg * 9.81\ m\ s^{-2} * 0.11 = 78.7743\ kg\ m\ s^{-2}$$
$$\boldsymbol{F_{Lift} = 79\ N}$$

Nun wird in (b-d) der Skifahrer von einem Lift mit konstanter Geschwindigkeit einen Hang hinaufgezogen. Die Steigung des Hanges beträgt $\alpha = 16°$.

(b) Zeichnen Sie in einer Skizze die wirkenden Kräfte ein und beschriften Sie diese. (30 Punkte)



(c) Wie groß ist die Kraft, mit der der Lift zieht? (30 Punkte)

Damit der Skifahrer mit konstanter Geschwindigkeit gezogen wird, muss die Kraft mit der der Lift den Hang entlang nach oben zieht gleich groß sein, wie die Kraft der Gleitreibung und der parallelen Komponente der Gravitationskraft, die beide den Hang entlang nach unten zeigen:

$$F_{Lift} = F_{II} + F_{GR} = mg * sin(\alpha) + mg * cos(\alpha) * \mu_G$$

$$F_{Lift} = 73\ kg * 9.81\ m\ s^{-2} * (sin(16°) + 0.054 * cos(16°)) = 234.5651499\ kg\ m\ s^{-2}$$

$$\boldsymbol{F_{Lift} = 2.3 \times 10^2\ N}$$

(d) Der Skilift stoppt und der Schifahrer bleibt stehen. Beginnt er nach unten zu rutschen? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie die wirkenden Kräfte berechnen. (20 Punkte)

Man muss berechnen, ob die parallele Komponente der Gravitationskraft, die den Hang nach unten zeigt, größer ist, oder die Kraft der Haftreibung, die in diesem Fall hangaufwärts zeigt.

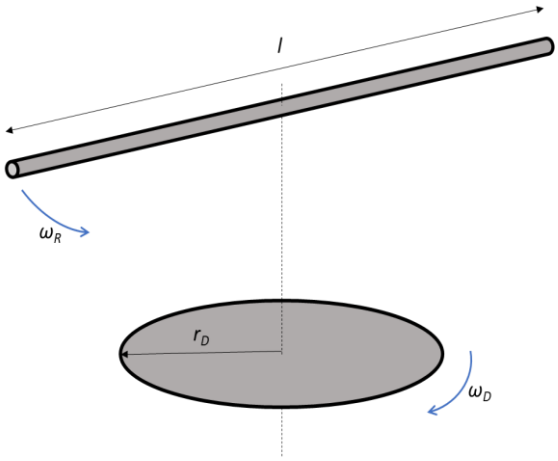
$$F_{II} = mg * sin(\alpha) = 73\ kg * 9.81\ m\ s^{-2} * sin(16°) = 197.39218\ N$$

$$F_{HR} = mg * cos(\alpha) * \mu_H = 73\ kg * 9.81\ m\ s^{-2} * cos(16°) * 0.11 = 75.722717\ N$$

Die Kraft, die hangabwärts zeigt ist größer: $\boldsymbol{F_{II} > F_{HR}}$. *Der Skifahrer beginn nach unten zu rutschen.*

3. Rotation

Eine Scheibe (Radius r_D = 130 cm, Masse m_D = 2.43 kg) dreht sich mit einer Frequenz f von 450 Hz im Uhrzeigersinn senkrecht um ihre Mittelachse. Über der Scheibe befindet sich ein dünner Stab (Masse m_R = 1.31 kg, Länge l = 260 cm). Der Stab rotiert mit derselben Frequenz um dieselbe Achse (die auch die Mittelachse des Stabes ist), aber gegen den Uhrzeigersinn.



(a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω_D der Scheibe in rad s^{-1}? (5 Punkte)

$$\omega = 2\pi f \text{ mit } f_D = 450\ Hz \rightarrow \omega_D = 2827.433\ rad\ s^{-1}$$

$$\boldsymbol{\omega_D = 2.83 \times 10^3\ rad\ s^{-1}}$$

(b) Berechnen Sie die kinetischen Rotationsenergien der Scheibe und des Stabes. (25 Punkte)

$$\theta_D = \frac{1}{2} m_D\, r_D^2 = 2.05335\ kg\ m^2 \text{ und } \theta_R = \frac{1}{12} m_R\, l^2 = 0.7379\dot{6}\ kg\ m^2$$

$$E_{Rot} = \frac{1}{2}\theta\omega^2$$

$$E_{Rot,D} = 8.207627 \times 10^6 \frac{kgm^2}{s^2} \rightarrow \boldsymbol{E_{Rot,D} = 8.21\ MJ}$$

$$E_{Rot,R} = 2.949792 \times 10^6 \frac{kgm^2}{s^2} \rightarrow \boldsymbol{E_{Rot,R} = 2.95\ MJ}$$

Nun fällt der rotierende Stab auf die rotierende Scheibe und bleibt ohne Energieverlust daran haften. Beide Massenmittelpunkte liegen auf der gemeinsamen Rotationsachse.

(c) Berechnen sie die neue Rotationsfrequenz (in Umdrehungen pro Sekunde, bzw. Hz) des Scheibe-Stab-Systems und geben Sie an, in welche Richtung es rotiert. (40 Punkte)

Es muss Drehimpulserhaltung gelten:

$$\vec{L} = const \text{ bzw. } \overrightarrow{L_D} + \overrightarrow{L_R} = \overrightarrow{L_{ges}}$$

$\overrightarrow{L_{ges}}$ = *Drehimpuls des gemeinsamen Systems Scheibe+Stab am Ende*

Die Drehachse ist immer dieselbe weshalb die unterschiedlichen Drehrichtungen durch das Vorzeichen von L angegeben werden können:

im Uhrzeigersinn (Scheibe): $L_D < 0$ ($\overrightarrow{L_D}$ *zeigt in der Skizze nach unten)*

gegen den Uhrzeigersinn (Stab): $L_R > 0$ ($\overrightarrow{L_R}$ *zeigt in der Skizze nach oben)*

aus $L = \theta\omega$ *ergibt sich damit*

$L_D = -5805.709551\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

$L_R = 2086.551307\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

$\boldsymbol{L_{ges} = L_D + L_R = -3719.158244\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$

(dies muss auch am Ende für das verbundene System Scheibe+Stab gelten, ***das Gesamtsystem rotiert also im Uhrzeigersinn****)*

Trägheitsmoment des Gesamtsystems: $\theta_{ges} = \theta_D + \theta_R = 2.7913167\ kg \cdot m^2$

$L = \theta\omega$ *bzw.* $\omega_{ges} = \frac{L_{ges}}{\theta_{ges}} = 1332.402836\ rad \cdot s^{-1}$

$$f_{ges} = \frac{\omega_{ges}}{2\pi} = 212.0585\ s^{-1}$$

$$\boldsymbol{f_{ges} = 212\ Hz}$$

(d) Wie groß müsste die Rotationsfrequenz (in Umdrehungen pro Sekunde) des Stabes zu Beginn (vor der Kopplung) sein, damit das Scheibe-Stab-System (nach der Kopplung) in Ruhe ist? (30 Punkte)

$\omega = 0\ \frac{rad}{s}$ *muss gelten und damit auch* $L = \theta\omega = 0\,\frac{kg\ m^2}{s}$

$L_{ges} = L_D + L_R = 0 \rightarrow L_R = -L_D$

$\omega_R\theta_R = 2\pi\ f_R\theta_R = -L_D = 5805.709551\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

$$f_R = \frac{-L_D}{2\pi\ \theta_R} = 1252.0991\ Hz$$

$$\boldsymbol{f_R = 1.25\ kHz}$$