PC I Labor - Statistikübung

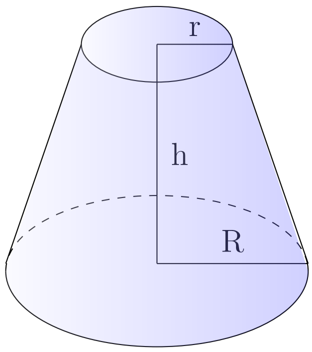
Absolute, relative und prozentuale Maximalfehler, Mittelwert und Standardabweichung

a. Um das Volumen V eines Kegelstumpfes zu berechnen, werden die beiden Radien r mit 30.0 ± 0.2 m und bzw. R mit 60.0 ± 0.2 m und die Höhe H mit 50.0 ± 0.2 m gemessen. Gesucht sind der absolute, der relative und der prozentuelle Maximalfehler.

Die Formel für den Kegelstumpf lautet:

$$V_0 = V(H, r, R) = \frac{\pi H}{3}(r^2 + rR + R^2)$$

Gegeben: $H = 50.0 \pm 0.2$ m
$r = 30.0 \pm 0.2$ m
$R = 60.0 \pm 0.2$ m
Gesucht: V_0, $\Delta V_{max,abs}$, $\frac{\Delta V_{max,abs}}{|V_0|}$



Das Volumen des Kegelstumpfes wird zuerst berechnet:

$$V_0 = V(H, r, R) = \frac{\pi H}{3}(r^2 + rR + R^2) = \frac{50\pi}{3}(30^2 + 30 * 60 + 60^2) = 329867,23\ m^3$$

Um den (maximalen) Fehler $\Delta f_{\max}$ eines Wertes zu berechnen, wird die Fehlerfortpflanzung mit abhängigen Variablen verwendet.

$$\begin{aligned}
\Delta V_{max,abs} &= |\frac{\delta V}{\delta H}|\Delta H + |\frac{\delta V}{\delta r}|\Delta r + |\frac{\delta V}{\delta R}|\Delta R = \\
&= \frac{\pi}{3}(r^2 + rR + R^2)\Delta H + \frac{\pi H}{3}(2r + R)\Delta r + \frac{\pi H}{3}(2R + r)\Delta R = \\
&= \frac{\pi}{3}[(30^2 + 30 * 60 + 60^2) * 0.2 + 50 * (2 * 30 + 60) * 0.2 + 50 * (2 * 60 + 30) * 0.2 = \\
&= \frac{\pi}{3}(1260 + 1200 + 1500) = \underbrace{1319.469}_{\sigma_H} + \underbrace{1256,637}_{\sigma_r} + \underbrace{1570,796}_{\sigma_R} = 4146,90\ m^3
\end{aligned}$$

$V = 329867,23 \pm 4146,90\ m^3 = 3,30 * 10^{-5} \pm 0,04 * 10^{-5}\ m^3$

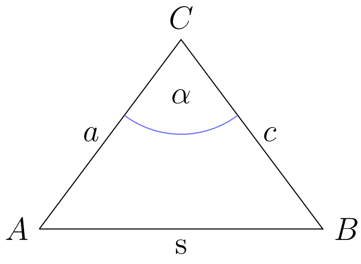
$$\Delta V_{max,rel} = |\frac{\Delta V_{max,abs}}{V_0}| = 0,01257$$
$$\Delta V_{max,proz} = 1,257\ \%$$

$V = 3,30 * 10^{-5} \pm 0.04\ m^3$
$V = 3,30 * 10^{-5}\ m^3 \pm 1.3\%$

b. Von Punkt A nach B soll geradlinig eine Straße errichtet werden, die Länge der Strecke s = AB kann man wegen des bergigen Geländes jedoch nicht ausmessen. Bekannt sind die zwei Entfernungen a = CA = 364.76 ± 0.05 m und b = CB = 402.35 ± 0.05 m von Messpunkt C und der Winkel λ zwischen beiden Beobachtungslinien a, b mit 68°14‘ ± 1‘ Grad. Gesucht sind der absolute und relative Maximalfehler bei der Berechnung der Strecke s. Welche Größe beeinflusst den Fehler am stärksten?

Die Formel für s (Cosinus-Satz) lautet:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\lambda}$$



Gegeben: $a = 364.76 \ \pm \ 0.05$ m
$b = 402.35 \ \pm \ 0.05$ m
$\lambda = 68°14‘ \ \pm \ 1‘$

Gesucht: $s_0 = s(a, b, \Delta)$, $\Delta s_{max,abs}$, $\frac{\Delta s_{max,abs}}{|s_0|}$

$$\lambda(°) = Grad + \frac{Winkelminute}{60}(+\frac{Winkelsekunde}{3600}) = 68 + \frac{14}{60} = 68,2\dot{3} \rightarrow \lambda(rad) = \frac{\lambda(°) * 2\pi()}{360} = 1.19$$
$$\Delta\lambda(rad) = 0.00029$$

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\lambda} = \sqrt{364.76^2 + 402.35^2 - 2 * 364.76 * 402.35 * cos(1.19)} = 431.38 \ m$$

$$\begin{aligned} \Delta s_{max,abs} &= |\frac{\delta s}{\delta a}|\Delta a + |\frac{\delta s}{\delta b}|\Delta b + |\frac{\delta s}{\delta \lambda}|\Delta\lambda = \\ & \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\lambda}}(2a - 2bcos(\lambda))\Delta a + \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\lambda}}(2b - 2acos(\lambda))\Delta b + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\lambda}}(2absin(\lambda))\Delta\lambda = \\ & = 0,0011 * (2 * 364.76 - 2 * 402.35 * cos(1.19)) * 0.05 + \\ & + 0.0011 * (2 * 402.35 - 2 * 364.76 * cos(1.19)) * 0.05 + \\ & + 0.0011 * 2 * 364.76 * 402.35 * sin(1.19) * 0.00029 = 0.03 + 0.03 + 0.09 = 0.15 \ m \end{aligned}$$

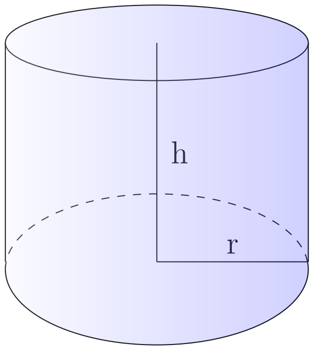
$$\Delta s_{max,rel} = |\frac{\Delta s_{max,abs}}{s_0}| = 0,00035$$
$$\Delta s_{max,proz} = 0,035 \ \%$$

$s = 431.38 \pm 0.15 \ m$
$s = 431.38 \ m \pm 0.04\%$

c. Wie hoch ist der prozentuale Fehler einer Volumensberechnung eines Kreiszylinders, wenn der Radius mit 33.3 % und die Höhe mit 50 % fehlerbehaftet gemessen werden ($V = V(r, h) = \pi r^2 h$)?

Die Formel für den Kreiszylinder lautet:

$$V_0 = V(r,h) = \pi r^2 h$$



Gegeben:

$\frac{\Delta r}{|r_0|} = 0.333$

$\frac{\Delta r}{|r_0|} = 0.50$

Gesucht: $\frac{\Delta V_{max,abs}}{|V_0|}$

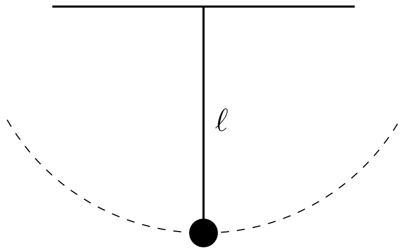
$$\Delta V_{max} = |\frac{\delta V}{\delta r}|\Delta r + |\frac{\delta V}{\delta r}|\Delta h = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h = 0,666\pi r^2 h + 0,5\pi r^2 h = $$
$$= 1,166\pi r^2 h$$

$$\Delta V_{max,rel} = |\frac{\Delta V_{max,abs}}{V_0}| = \frac{1,166\pi r^2 h}{\pi r^2 h} = 1.166 \rightarrow \Delta V_{max,proz} = 117\ \% = 1,2 * 10^2\ \%$$

d. Es soll die Erdbeschleunigung g mit Hilfe eines mathematischen Pendels bestimmt werden, von dem die Länge l und die Periodenlänge T einer Schwingung gemessen werden können. Die Gleichung dafür ist: $g = g(l,T) = (4\pi^2 l)/T^2$. Man weiß, dass beide Messgrößen die gleiche Prozentuale Genauigkeit x % besitzen. Schätzen Sie den relativen Maximalfehler der Fallbeschleunigung ab.

Die Formel für das mathematische Pendel lautet:

$$g_0 = g(l,T) = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$



Gegeben:

$\frac{\Delta l}{|l_0|} = x$

$\frac{\Delta T}{|T_0|} = x$

Gesucht: $\frac{\Delta g_{max,abs}}{|g_0|}$

$$\Delta g_{max} = |\frac{\delta g}{\delta l}|\Delta l + |\frac{\delta g}{\delta T}|\Delta T = \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta l + \frac{8\pi^2}{T^3}\Delta T = \frac{4\pi^2}{T^2}xl + \frac{8\pi^2}{T^3}xT = 12x\frac{\pi^2 l}{T^2}$$

$$\Delta g_{max,rel} = |\frac{\Delta g_{max,abs}}{g_0}| = \frac{12x\frac{\pi^2 l}{T^2}}{4\frac{\pi^2 l}{T^2}} = 3x- > 300\ x\ \%$$

e. Bei einem Patienten wird 6 Mal hintereinander die Körpertemperatur gemessen. Dabei wurden folgende Werte erhalten: T = 37.4, 36.9, 37.0, 37.1, 37.4, 37.1 °C. Berechnen Sie den Mittelwert, die Standardabweichung, die Standardabweichung des Mittelwertes und den relativen Fehler der Messung.

Nr.	T / °C
1	37.4
2	36.9
3	37.0
4	37.1
5	37.4
6	37.1

Mittelwert der Größe x (=T) mit n (=6) Werten:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow \bar{T} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} T_i = 37.15\ °\text{C}$$

Standardabweichung einer Stichprobe:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \rightarrow s_T = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(T_i - \bar{T})^2} = 0.21\ °\text{C} = 0.2\ °\text{C}$$

Standardabweichung des Mittelwertes:

$$\bar{s_x} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \rightarrow \bar{s_T} = \frac{s_T}{\sqrt{6}} = 0.085\ °\text{C} = 0.09\ °\text{C}$$

Relativer und prozentueller relativer Fehler:

$$\bar{s}_{x,rel} = \frac{\bar{s_x}}{\bar{x}} \rightarrow \bar{s}_{T,rel} = \frac{\bar{s_T}}{\bar{T}} = 0.002 \rightarrow \bar{s}_{T,proz} = 0.2\ \%$$

$T = 37.15 \pm 0.09$ °C
$T = 37.15$ °C $\pm\, 0.2\%$

f. Die Reaktionszeit eines Probanden wurde mehrfach gemessen. Die Werte sind: 0.6, 0.3, 0.4, 0.3, 0.4, 0.5, 0.4, 0.3, 0.4 s. Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung des Mittelwertes.

Nr.	t / s
1	0.6
2	0.3
3	0.4
4	0.3
5	0.4
6	0.5
7	0.4
8	0.3
9	0.4

Mittelwert der Größe x (=t) mit n (=9) Werten:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow \bar{t} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} t_i = 0.4\ s$$

Standardabweichung einer Stichprobe:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \rightarrow s_t = \sqrt{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(t_i - \bar{t})^2} = 0.1\ s$$

Standardabweichung des Mittelwertes:

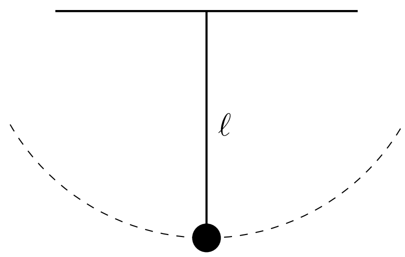
$$\bar{s_x} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \rightarrow \bar{s_t} \rightarrow \frac{s_t}{\sqrt{9}} = 0.0333\ s = 0.03\ s$$

$t = 0.4 \pm 0.03\ s = 0.40 \pm 0.03\ s$

Fehlerfortpflanzung

a. Für das Fadenpendel aus Aufgabe 1 d wurde l mit $l = 1.00\ \pm\ 0.05\ m$ und $T = 2.0\ \pm\ 0.2\ s$ bestimmt. Was ist der Wert/Fehler, wenn die beiden Messgrößen voneinander unabhängig sind (Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz)? Was ist der Maximalfehler?

Die Formel für das mathematische Pendel lautet:



$$g = g(l, T) = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Gegeben:
$l = 1.00\ \pm\ 0.05\ m$
$T = 2.0\ \pm\ 0.2\ s$
Gesucht: $g_0, \Delta g_{max,abs},\ \Delta g_{unabh}$

$$g_0 = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4\pi^2}{2^2} = 9,8696\ m\ s^{-1}$$

$$\Delta g_{max,abs} = |\frac{\delta g}{\delta l}|\Delta l + |\frac{\delta g}{\delta T}|\Delta T = \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta l + \frac{8\pi^2}{T^3}\Delta T =$$
$$= \frac{4\pi^2}{2^2}0,05 + \frac{8\pi^2}{2^3}0,2 = \underbrace{0,4934}_{\sigma_l} + \underbrace{1,9739}_{\sigma_T} = 2,4674\ m\ s^{-1}$$

$V = 9,87 \pm 2,47\ m\ s^{-1} = 10 \pm 2\ m\ s^{-1}$

$$\Delta g_{unabh} = \sqrt{\sigma_l^2 + \sigma_T^2} = \sqrt{0,4934^2 + 1,9739^2} = 2,0347\ m\ s^{-1}$$

$V = 9,9 \pm 2,0\ m\ s^{-1} = 10 \pm 2\ m\ s^{-1}$

b. Bei der Bestimmung einer Niederschlagsmenge $S = V/A$ (Volumen pro Fläche) wurde in einem Regenmesser (Größe der Öffnung $A = \pi r^2$, Radius $r = 0.100 \pm 0.001$ m) eine Wassermenge von $V = 0.500 \pm 0.002$ l gesammelt.
Die Formel lautet:

$$S = S(V, r) = \frac{V}{\pi r^2}$$

Gegeben:

$V = 0.500 \pm 0.002$ l
$r = 0.100 \pm 0.001$ m

Gesucht: S_0, $\Delta S_{max,abs}$, ΔS_{unabh}

$$S_0 = S(V, r) = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{0,5}{0,1^2 \pi} = 15,9155\ L\ m^2$$

$$\Delta S_{max,abs} = |\frac{\delta S}{\delta V}|\Delta V + |\frac{\delta S}{\delta r}|\Delta r = \frac{1}{\pi r^2}\Delta V + \frac{2V}{\pi r^3}\Delta r = \frac{1}{\pi 0,1^2}0,002 + \frac{2 * 0,5}{\pi 0,1^3}0,001 =$$
$$= \underbrace{0,0637}_{\sigma_V} + \underbrace{0,3183}_{\sigma_r} = 0,3820\ L\ m^2$$

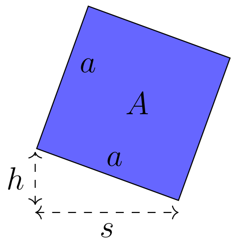
$V = 15,9155 \pm 0,3820\ L\ m^2 = 15,9 \pm 0,4\ L\ m^2$

$$\Delta S_{unabh} = \sigma_V + \sigma_r = \sqrt{0,0637^2 + 0,3183^2} = 0,3246\ L\ m^2$$

$V = 15,9155 \pm 0,3246\ L\ m^2 = 15,9 \pm 0,3\ L\ m^2$

c. Der Flächeninhalt eines Quadrates soll bestimmt werden (siehe Bild). $A = h^2 + s^2$, $h = 50,0 \pm 1,0$ m und $s = 170,0 \pm 2$ m
Die Formel für das mathematische Pendel lautet:

$$A = A(h, s) = h^2 + s^2$$



Gegeben:

$h = 50.0 \pm 1.0\ m$
$s = 170.0 \pm 2\ s$

Gesucht: $A_0, \Delta A_{max,abs}, \Delta A_{unabh}$

$$A_0 = A(h, s) = h^2 + s^2 = 31400\ m^2$$

$$\Delta A_{max,abs} = |\frac{\delta A}{\delta h}|\Delta h + |\frac{\delta A}{\delta s}|\Delta s = 2h\Delta h + 2s\Delta s = 2 * 50 + 2 * 170 * 2 = \underbrace{100}_{\sigma_h} + \underbrace{680}_{\sigma_s} = 780\ m^2$$

$A = 31400 \pm 780\ m^2 = 31,4 * 10^3 \pm 0,8 * 10^3\ m^2$

$$\Delta A_{unabh} = \sqrt{\sigma_h^2 + \sigma_s^2} = \sqrt{100^2 + 680^2} = 687$$

$A = 31400 \pm 687\ m^2 = 31,4 * 10^3 \pm 0,7 * 10^3\ m^2$

d. Bei einem Meßversuch wurden für ein Federpendel folgende Größen gemessen- hier soll die Gesamtenergie W bestimmt werden. $m = 0,300 \pm 0,002$ kg, $h = 30,0 \pm 0,1$ cm $\rightarrow h = 0.300 \pm 0,001$ m, $D = 10,0 \pm 0,1$ kg s^2 und $g = 9,81 \pm 0,01$ m s^2

Gegeben: $m = 0.300 \pm 0.002\ kg$
$h = 0.300 \pm 0.001\ m$
$D = 10.0 \pm 0.1$ kg s^2
$g = 9.81 \pm 0.01\ m\ s^{-2}$

Gesucht: $W_0, \Delta W_{max,abs}, \Delta W_{unabh,abs}, \Delta W_{unabh,rel}$

$$W_0 = \frac{1}{2}mgh + \frac{1}{2}D(\frac{h}{2})^2 = \frac{1}{2} * 0.300 * 9.81 * 0.300 + \frac{1}{8} * 10.0 * 0.300^2 = 0.5540\ J$$

$$\begin{aligned}
\Delta W_{max,abs} &= |\frac{\delta W}{\delta m}|\Delta m + |\frac{\delta W}{\delta h}|\Delta h + |\frac{\delta W}{\delta D}|\Delta D + |\frac{\delta W}{\delta g}|\Delta g = \\
&= \frac{1}{2}gh\Delta m + (\frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}Dh)\Delta h + \frac{1}{8}h^2\Delta D + \frac{1}{2}mh\Delta g = \\
&= \frac{1}{2} * 9.81 * 0.300 * 0.002 + (\frac{1}{2} * 0.300 * 9.81 + \frac{1}{4} * 10.0 * 0.300) * 0.1 + \\
&+ \frac{1}{8} * 0.300^2 * 0.1 + \frac{1}{2} * 0.300 * 0.300 * 0.01 = \\
&= \underbrace{0.00294}_{\sigma_m} + \underbrace{0.00222}_{\sigma_h} + \underbrace{0.00113}_{\sigma D} + \underbrace{0.00045}_{\sigma g} = 0.00674\ J
\end{aligned}$$

$$\Delta W_{unabh} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_h^2 + \sigma_D^2 + \sigma_g^2} = \sqrt{0.00294^2 + 0.00222^2 + 0.00113^2 + 0.00045^2} = 0.00388\ J$$

$$\Delta W_{unabh,rel} = \frac{\Delta W_{max,abs}}{|W_0|} = \frac{0.00388}{|0.5540|} = 0.0070\ J \mathrel{\widehat{=}} 0.70\ \%$$

$W_{abh} = 0.554 \pm 0.007\ J$
$W_{unabh,abs} = 0.554 \pm 0.004\ J$
$W_{unabh,rel} = 0.554\ J \pm 0.7\%$

Ausgleichungsrechnung

$\boxed{y = ax + b}$ $\rightarrow$ Achtung Unterschied zu Skriptum !a=b und b=a!

$$D_a = \begin{vmatrix} N & \sum_{n=1}^{N} y_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \end{vmatrix} \qquad D_b = -\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} y_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n^2 & \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} N & \sum_{n=1}^{N} x_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{D_a}{D}, b = \frac{D_b}{D}$$

$$Q = \sum_{n=1}^{N} y_n^2 - b \sum_{n=1}^{N} y_n - a \sum_{n=1}^{N} y_n x_n$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{Q}{N-2}}, \sigma_a = \sigma_m \sqrt{\frac{N}{D}}, \sigma_b = \sigma_m \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}{D}}$$

a. Von einer linearen Funktion f(x)=ax+b kennt man drei Werte, wobei die zu (exakten) x-Werten gemessenen Funktionswerte f(x) mit Meßfehlern behaftet sind. Bestimme eine Lineare Funktion so, dass die Summe der Fehlerquadrate in f(x)-Richtung minimal wird.

Gegeben: $f(x) = ax + b$
$x = (0, 1, 2)$
$f(x) = (2, 1.2, 1.6)$

Gesucht: Ausgleichsgerade (a und b)
Fehler in a und b

$$D_a = \begin{vmatrix} 3 & \sum_{n=1}^{3} y_n \\ \sum_{n=1}^{3} x_n & \sum_{n=1}^{3} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4.8 \\ 3 & 4.4 \end{vmatrix} = -1.2$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{3} x_n & \sum_{n=1}^{3} y_n \\ \sum_{n=1}^{3} x_n^2 & \sum_{n=1}^{3} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4.8 \\ 5 & 4.4 \end{vmatrix} = -10.8$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & \sum_{n=1}^{3} x_n \\ \sum_{n=1}^{3} x_n & \sum_{n=1}^{3} x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{-1.2}{6} = -0.2, b = \frac{D_b}{D} = \frac{-10,8}{6} = 1.8$$

$$Q = \sum_{n=1}^{3} y_n^2 - b \sum_{n=1}^{3} y_n - a \sum_{n=1}^{3} y_n x_n = 8 - 1.8 * 4.8 + 0.2 * 4.4 = 0.24$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{0.24}{1}} = 0,49, \sigma_b = \sigma_m \sqrt{\frac{5}{0.24}} = 0,45, \sigma_a = 0,49 \sqrt{\frac{3}{6}} = 0,35$$

Die Ausgleichsgerade: $y = -(0.2 \pm 0.4)x + (1.8 \pm 0.4)$

b) Wie a., nur mit anderen Wertepaaren.

Gegeben: $f(x) = ax + b$
$x = (1, 2, 3, 4)$
$f(x) = (6, 6.8, 10, 10.5)$

Gesucht: Ausgleichsgerade (a und b)
Fehler in a und b

$$D_a = \begin{vmatrix} 4 & \sum_{n=1}^{4} y_n \\ \sum_{n=1}^{4} x_n & \sum_{n=1}^{4} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 33.3 \\ 10 & 91.6 \end{vmatrix} = 33.4$$

$$D_b = -\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{4} x_n & \sum_{n=1}^{4} y_n \\ \sum_{n=1}^{4} x_n^2 & \sum_{n=1}^{4} x_n y_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 10 & 33,3 \\ 30 & 91.6 \end{vmatrix} = 83$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & \sum_{n=1}^{4} x_n \\ \sum_{n=1}^{4} x_n & \sum_{n=1}^{4} x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix} = 20$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{33.4}{20} = 1.67, b = \frac{D_b}{D} = \frac{83}{20} = 4.15$$

$$Q = \sum_{n=1}^{4} y_n^2 - b\sum_{n=1}^{4} y_n - a\sum_{n=1}^{4} y_n x_n = 292.49 - 4.15 * 33.3 - 1.67 * 91.6 = 1.32$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1.32}{2}} = 0.81, \sigma_a = 0,81\sqrt{\frac{4}{20}} = 0,36, \sigma_b = 0.81\sqrt{\frac{30}{20}} = 1.00$$

Die Ausgleichsgerade: $y = (1.67 \pm 0.36)x + (4.15 \pm 1.00)$

c) Bestimme die Ausgleichsgerade f(x)=ax+b durch die Punkte (0,0), (1,2), (2,1).

Gegeben: $f(x) = ax + b$
$x = (0, 1, 2)$
$f(x) = (0, 2, 1)$

Gesucht: Ausgleichsgerade (a und b)
Fehler in a und b

$$D_a = \begin{vmatrix} 3 & \sum_{n=1}^{3} y_n \\ \sum_{n=1}^{3} x_n & \sum_{n=1}^{3} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$D_b = -\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{3} x_n & \sum_{n=1}^{3} y_n \\ \sum_{n=1}^{3} x_n^2 & \sum_{n=1}^{3} x_n y_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & \sum_{n=1}^{3} x_n \\ \sum_{n=1}^{3} x_n & \sum_{n=1}^{3} x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{3}{6} = 0.5, b = \frac{D_b}{D} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$Q = \sum_{n=1}^{3} y_n^2 - b\sum_{n=1}^{3} y_n - a\sum_{n=1}^{3} y_n x_n = 5 - 0.5 * 3 - 0.5 * 3 = 1.5$$

$$\sigma_m = \sqrt{1.5} = 1.22, \sigma_a = 1.22\sqrt{\frac{1}{1.5}} = 0.86, \sigma_b = 1.22\sqrt{\frac{5}{1.5}} = 1.11$$

Die Ausgleichsgerade: $y = (0.5 \pm 0.9)x + (0.5 \pm 1.1)$

d. Man vermutet, dass die gegebenen Meßdaten einer Gesetzmäßigkeit der Form f(t)=a 1/(1+t)+b gehorchen. Berechnen Sie a und b. Gegeben: t = (0, 1, 2, 3) Gesucht: Ausgleichsgerade (a,b) f(t) = (3, 2.14, 1.86, 1.72) Fehler in a und b

Gegeben: $f(x) = a\frac{1}{1+t} + b$
$t = (0, 1, 2, 3)$
$f(x) = (3, 2.14, 1.86, 1.72)$

Gesucht: Ausgleichsgerade (a und b)
Fehler in a und b

$$D_a = \begin{vmatrix} 4 & \sum_{n=1}^{4} y_n \\ \sum_{n=1}^{4} x_n & \sum_{n=1}^{4} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 33.30 \\ 2.08 & 15.36 \end{vmatrix} = -7.94$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{4} x_n & \sum_{n=1}^{4} y_n \\ \sum_{n=1}^{4} x_n^2 & \sum_{n=1}^{4} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.08 & 33.30 \\ 1.42 & 15.36 \end{vmatrix} = 15.41$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & \sum_{n=1}^{4} x_n \\ \sum_{n=1}^{4} x_n & \sum_{n=1}^{4} x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2.08 \\ 2.08 & 1.42 \end{vmatrix} = 1.35$$

$$a = \frac{D_a}{D} = -\frac{7.94}{1.35} = -5.86, b = \frac{D_b}{D} = \frac{15.41}{1.35} = 11.38$$

$$Q = \sum_{n=1}^{3} y_n^2 - b\sum_{n=1}^{3} y_n - a\sum_{n=1}^{3} y_n x_n = 292.49 - 11.38 * 33.3 + 5.86 * 15.36 = 3.62$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{3.62}{2}} = 1.35, \sigma_a = 1.35\sqrt{\frac{4}{1.35}} = 2.31, \sigma_b = 1.35\sqrt{\frac{1.42}{1.35}} = 1.38$$

Die Ausgleichsgerade: $y = -(5.86 \pm 2.31)\frac{1}{1+t} + (11.38 \pm 1.38)$

e. Man vermutet, dass die gegebenen Meßdaten einer Gesetzmäßigkeit der Form $f(x) = ae^x + b$ gehorchen. Berechnen Sie a und b. Gegeben: x = (0, 1, 2, 3, 4) Gesucht: Ausgleichsgerade (a,b) f(x) = (6, 12, 30, 80, 140) Fehler in a und b

Gegeben: $f(x) = ae^x + b$
$t = (0, 1, 2, 3, 5)$
$f(x) = (6, 12, 30, 80, 140)$

Gesucht: Ausgleichsgerade (a und b)
Fehler in a und b

$$D_a = \begin{vmatrix} 5 & \sum_{n=1}^{5} y_n \\ \sum_{n=1}^{5} x_n & \sum_{n=1}^{5} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 268 \\ 85.79 & 9510.88 \end{vmatrix} = 24562.38$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{5} x_n & \sum_{n=1}^{5} y_n \\ \sum_{n=1}^{5} x_n^2 & \sum_{n=1}^{5} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 85.79 & 268 \\ 3447.37 & 9510.88 \end{vmatrix} = 107948.51$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & \sum_{n=1}^{5} x_n \\ \sum_{n=1}^{5} x_n & \sum_{n=1}^{5} x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 85.79 \\ 85.79 & 3447.38 \end{vmatrix} = 9876.77$$

$$a = -\frac{24562.38}{9876.77} = 2.49, b = \frac{D_b}{D} = \frac{107948.51}{9876.77} = 10.93$$

$$Q = \sum_{n=1}^{5} y_n^2 - b\sum_{n=1}^{5} y_n - a\sum_{n=1}^{5} y_n x_n = 27080 - 10.93 * 268 - 2.49 * 9510,88 = 498.44$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{498.44}{3}} = 12.89, \sigma_a = 12.89\sqrt{\frac{5}{9876.77}} = 0.29, \sigma_b = 12.89\sqrt{\frac{3447.37}{9876.77}} = 7.62$$

Die Ausgleichsgerade: $y = (2.49 \pm 0.29)e^x + (10.93 \pm 7.62)$

f) Für die Abhängigkeit des Debye-Radius rD von der Essigsäurekonzentration c sind folgende Wertepaare bekannt: c = 0.000002 , 0.00101, 0.00999, 0.05001 mol/kg ; rD = 2420, 298, 95, 42 nm. Wie ist die Steigung bei einer doppelt logarithmischen Auftragung?

Gegeben: $lg(r_D) = a\lg(c) + b$
$c = (0.000002, 0.00101, 0.00999, 0.05001)\ mol/kg$
$r_D = (2420, 298, 95, 42)\ nm$

Gesucht: Ausgleichsgerade (a und b)
Fehler in a und b

Gesucht: Ausgleichsgerade (a und b)
Fehler in a und b

c [mol/kg]	lg(c)	r_D [nm]	lg(r_D)
0.000002	-5.6990	2420	3.38381536598043
0.00101	-2.9957	298	2.47421626407626
0.00999	-2.0004	95	1.97772360528885
0.05001	-1.3009	42	1.6232492903979

$$D_a = \begin{vmatrix} 4 & \sum_{n=1}^{4} y_n \\ \sum_{n=1}^{4} x_n & \sum_{n=1}^{4} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 9.46 \\ -12.00 & -32.76 \end{vmatrix} = -17.59$$

$$D_b = \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{4} x_n & \sum_{n=1}^{4} y_n \\ \sum_{n=1}^{4} x_n^2 & \sum_{n=1}^{4} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12.00 & 9.46 \\ 47.15 & -32.76 \end{vmatrix} = 52.92$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & \sum_{n=1}^{4} x_n \\ \sum_{n=1}^{4} x_n & \sum_{n=1}^{4} x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -12.00 \\ -12.00 & 24.12 \end{vmatrix} = 44.68$$

$$a = \frac{D_a}{D} = -\frac{17.59}{44.68} = -0.39, b = \frac{D_b}{D} = \frac{52.92}{44.68} = 1.18$$

$$Q = \sum_{n=1}^{4} y_n^2 - b\sum_{n=1}^{4} y_n - a\sum_{n=1}^{4} y_n x_n = 24.12 - 1.18 * 9.46 - 0.39 * 32.76 = 0,02$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{0.02}{2}} = 0,10, \sigma_b = 0.10\sqrt{\frac{24.12}{44.68}} = 0.10, \sigma_a = 0,10\sqrt{\frac{3}{6}} = 0,03$$

Die Ausgleichsgerade: $\lg(r_D) = (-0.39 \pm 0.03)\lg(c) + (1.18 \pm 0.10)$