Fehlerrechnung im Praktikum

Praktikum Physikalische Chemie

(A. Daniel Boese)

Wintersemester 20/21

In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Bildung mehr, als in einer übertrieben genauen Rechnung.

Carl Friedrich Gauß, 1777- 1855

Themengebiete

- Unterteilung von Fehlern
  - Präzision und Richtigkeit
- Darstellung von Messergebnissen
- Behandlung zufälliger Fehler
  - Mittelwert, Standardabweichung
  - Fehlerfortpflanzung
  - Allgemeine Häufigkeitsverteilung
  - Gaußverteilung
  - Verwerfen von Daten
  - Ausgleichsrechnung
  - Lineare Regression-Graphische Lösung

Unterteilung von Fehlern

- Systematische Messabweichungen
- Grobe Fehler
- Zufällige Fehler

Fehleranalyse:

- Zufällige Fehler
  (Messunsicherheiten)
- Grobe Fehler
  (Verwerfen von Daten)

Präzision und Richtigkeit

- Präzision

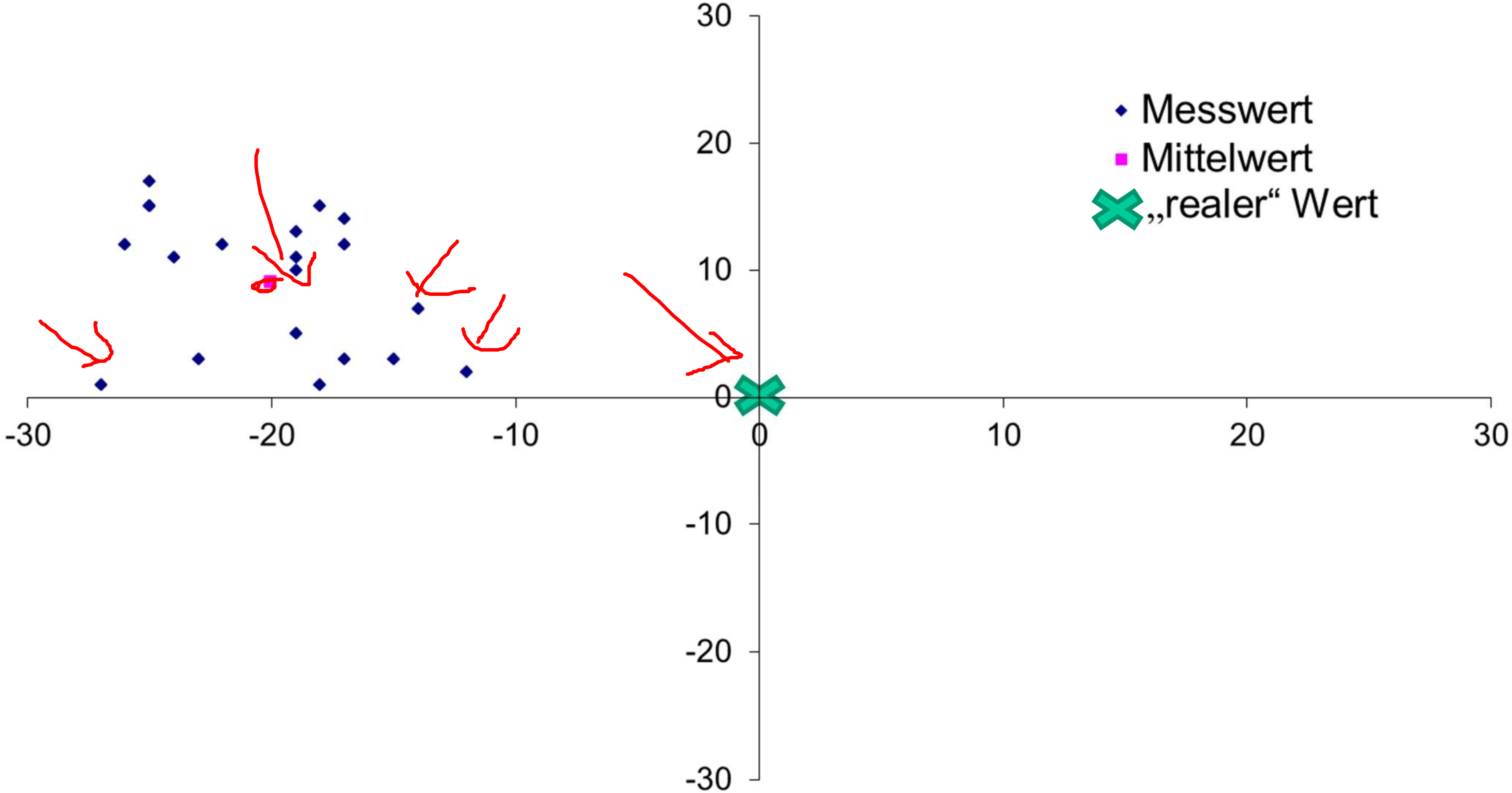
  Wie genau wurde die Messung durchgeführt?

  Wie reproduzierbar ist die Messung?

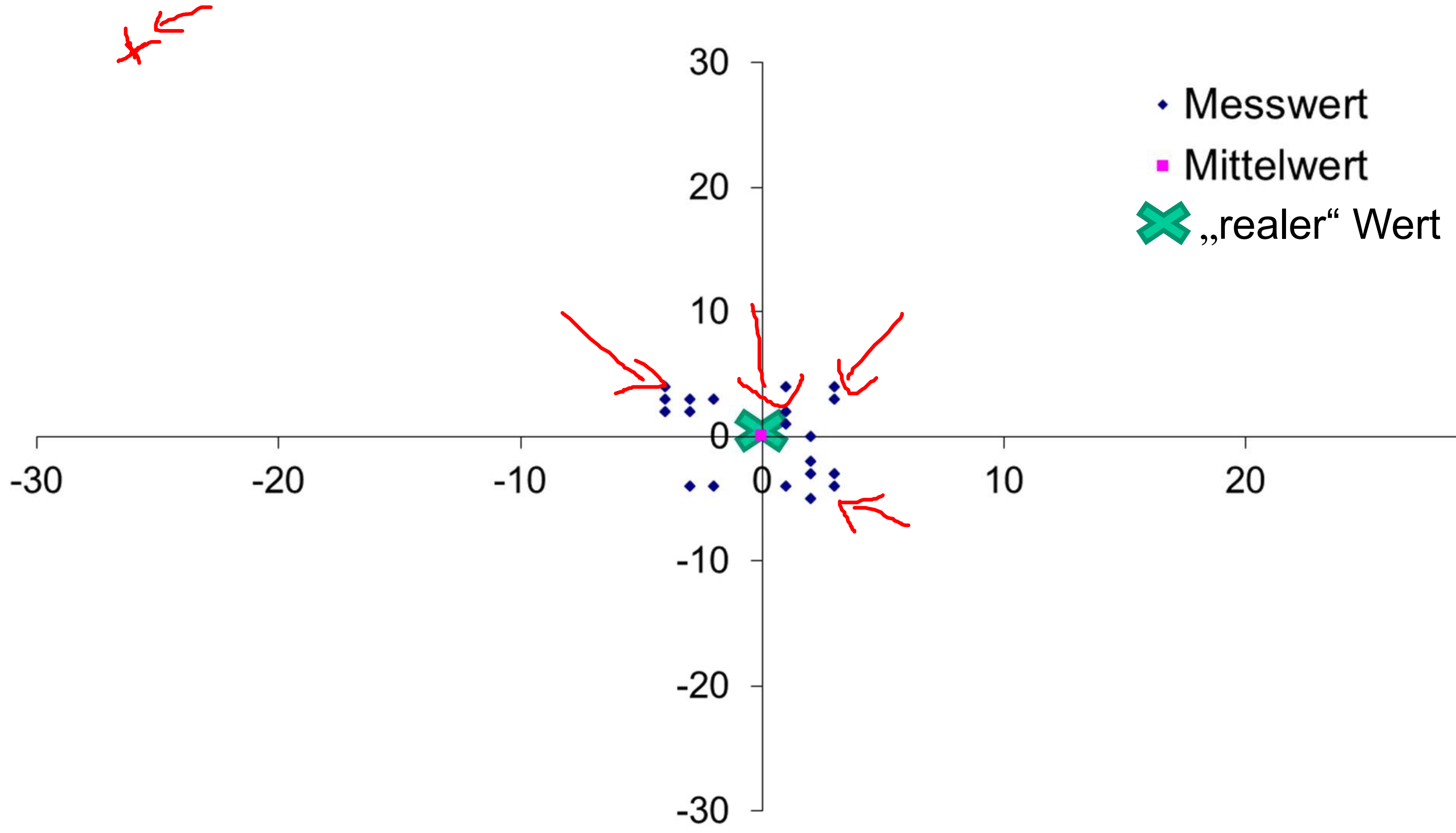
- Richtigkeit

  Wie nahe ist der Messwert am „wahren“ Wert?

Unpräzise und Unrichtig



Präzise und Richtig



Darstellung von Messergebnissen

- $\boxed{\text{Messwert = Bestwert (Mittelwert) ± Unsicherheit [Masseinheit] } (f(x) = x \pm \delta x)}$

  absolute Unsicherheit

  Beispiel:

  $x = 80 \pm 5$ cm

- $\boxed{\text{Messwert = Bestwert (Mittelwert) [Masseinheit] ± Unsicherheit in \% } (f(x) = x \pm \delta x/x\ [\%])}$

  relative Unsicherheit

  Beispiel:

  $x = 80$ cm ± 6 %

Signifikante Stellen

- Unsicherheiten werden auf eine signifikante Stelle gerundet

  Ausnahme: Wenn die erste signifikante Stelle eine 1 ist

- Die letzte signifikante Stelle eines angegebenen Messwertes sollte dieselbe Grössenordnung besitzen wie die Unsicherheit

  Beispiel: $x = 80.7682 \pm 1.4327$ cm

  wird zu: $x = 80.8 \pm 1.4$ cm

Zufällige Fehler

Resultieren aus

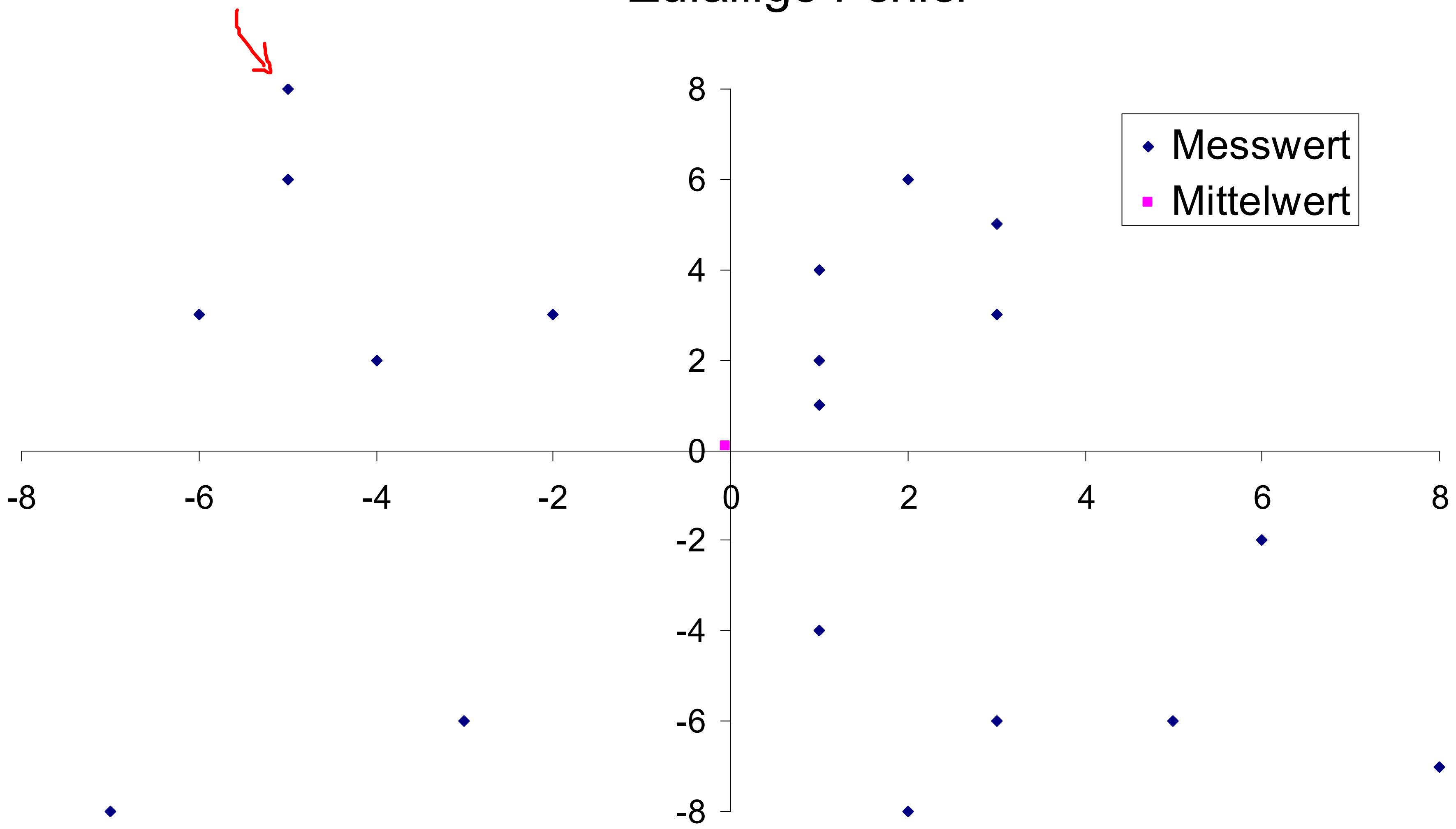
- einer statistischen Messgrösse

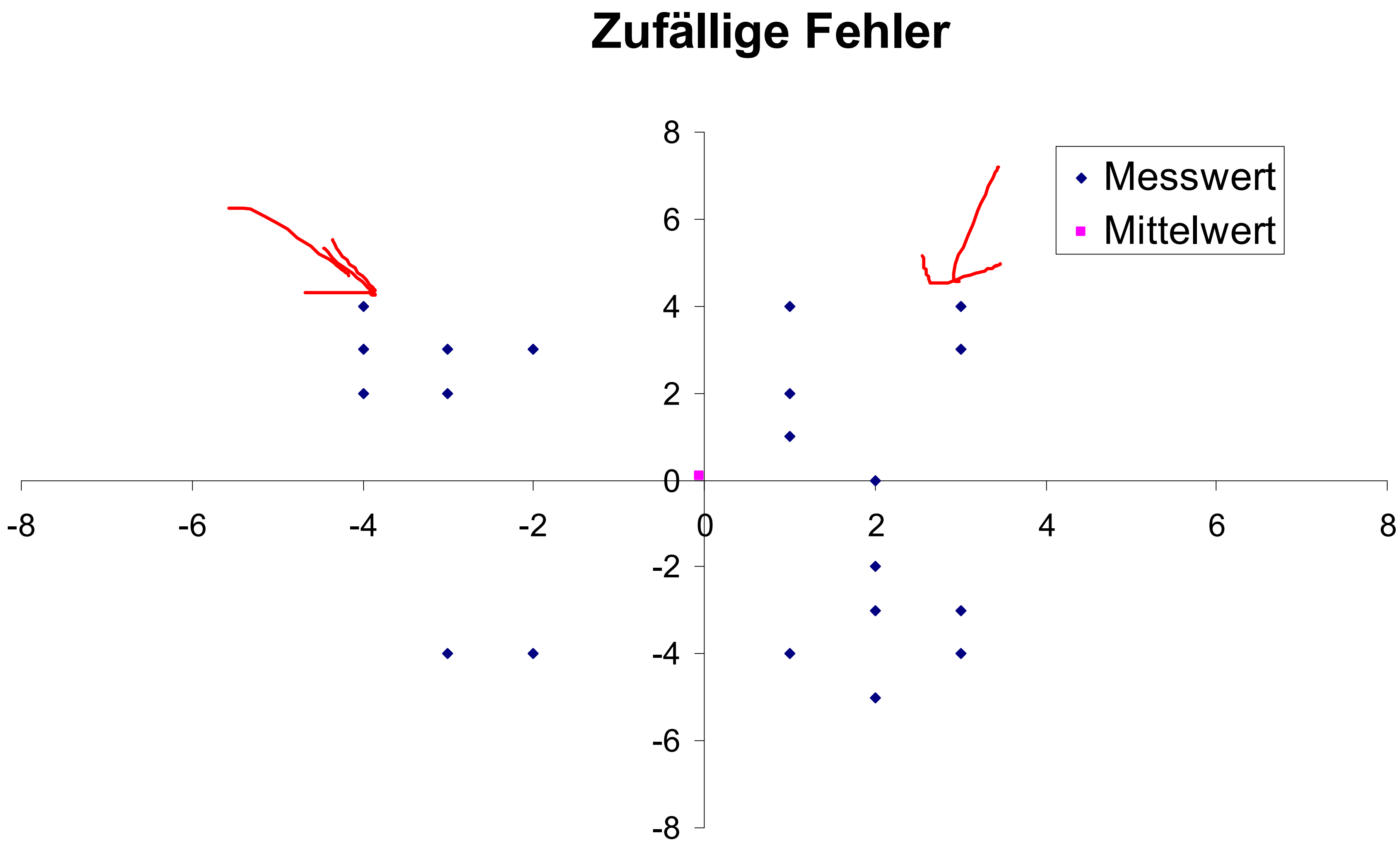
  (wie z.B. in der statistischen Thermodynamik oder beim radioaktiven Zerfall von Atomkernen)
- äußere Einflüssen

  (wechselnde Luftströmungen, Temperaturschwankungen)
- Unzulänglichkeit des Experimentators

  (Schätzungen, z.B. Benutzung einer Stoppuhr)

Zufällige Fehler




Zufällige Fehler
Messwert
Mittelwert
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

$$1+2+3 \qquad \frac{6}{3} = 2$$

Mittelwert

- Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

x_i : Messwerte

n : Anzahl der Messwerte

- Unsicherheit *einer* Messgröße:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Genauigkeit des Mittelwertes

- Standardabweichung:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

- Präzision/Unsicherheit des Mittelwertes:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Beispiel

10 StudentInnen messen die Höhe eines Tisches mit einem Zollstock, wobei der Tisch real 80,6 cm hoch ist.

Messwerte:

80,0 80,0 80,0 80,5 80.5 80,5 80,5 80,75 81,0 81,0 [cm]

Mittelwert: 80,475 cm =

(3*80,0+4*80,5+80,75+2*81,0)/10

n − 1

Standardabweichung: 0,38097 cm =

Wurzel {(3*0,475²+4*0,025²+0,275²+2*0,525²)/9}

Präzision des Mittelwertes: 0,195 cm = Standardabweichung/Wurzel(10)

Von daher: x = 80,5 ± 0,2 cm

oder x = 80,5 cm ± 0,2 %

Beispiel(2)

1.000 StudentInnen messen die Höhe eines Tisches mit einem Zollstock, wobei der Tisch real 80,6 cm hoch ist.

Messwerte (jeweils 100 Mal):

80,0 80,0 80,0 80,5 80.5 80,5 80,5 80,75 81,0 81,0 [cm]

Mittelwert: 80,475 cm

Standardabweichung: 0,036157 cm

Präzision des Mittelwertes: 0,00114 cm

Von daher: x = 80,4750 ± 0,0011 cm

oder x = 80,475 cm ± 0,0015 %

Beispiel (3)

1.000.000 StudentInnen messen die Höhe eines Tisches mit einem Zollstock, wobei der Tisch real 80,6 cm hoch ist.

Messwerte (jeweils 100.000 Mal)

80,0 80,0 80,0 80,5 80.5 80,5 80,5 80,75 81,0 81,0 [cm]

Mittelwert: 80,475 cm

Standardabweichung: 0,00114 cm

Präzision des Mittelwertes: 0,0000014 cm

Von daher: $x = 80{,}475000 \pm 0{,}0000014$ cm

oder $x = 80{,}475$ cm $\pm$ 0,0000014 %

Daraus folgt:

- Fehlerdiskussion

  Fehler des Zollstockes selbst

  Menschliche Fehler

  Auf/Abrunden bei einzelnen Messungen

  Biegen des Zollstockes

  Diagonales halten des Zollstockes

  Nicht genaues Augenmass

Systematische Messabweichungen

- Umwelteinflüsse
- Unvollkommenheit der Messinstrumente
- Rückwirkung von Messinstrumenten auf die Messung

  (einfachstes Beispiel: Quantenmechanik)
- Unzulänglichkeiten des Experimentators

Fehlerfortpflanzung

$f(x,y) = x + y$

$\sigma_{x,y}{}^2 = \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2$; $\sigma_x = s_x$ (siehe später)

$f(x,y) = x^m \bullet y^n$

$\sigma_{x,y}{}^2 = f(x,y)^2 \, [m^2(\sigma_x/x)^2 + n^2(\sigma_y/y)^2]$

Aber: Wenn die Messabweichungen nicht unabhängig voneinander sind, muss der Grösstfehler abgeschätzt werden!

$$\Delta f(x,y) = \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \Delta y = \Delta f_{\max}(x,y)$$

Fehlerfortpflanzung- Beispiel

Arrhenius-Gleichung

$$k = Ae^{-\frac{E_A}{RT}} \rightarrow -\frac{E_A}{R} = \frac{\ln(k_2) - \ln(k_1)}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} (zwei\ Messwerte)$$

$\rightarrow$

$$-\frac{E_A}{R} = \left|\frac{\partial f}{\partial k_1}\right|\Delta k_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial k_2}\right|\Delta k_2 + \left|\frac{\partial f}{\partial T_1}\right|\Delta T_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial T_2}\right|\Delta T_2$$

$$= \left|\frac{-\frac{1}{k_1}}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}\right|\Delta k_1 + \left|\frac{\frac{1}{k_2}}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}\right|\Delta k_2 + \left|\frac{-(\ln(k_2) - \ln(k_1))\left(\frac{1}{T_1}\right)^2}{\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)^2}\right|\Delta T_1 + \left|\frac{(\ln(k_2) - \ln(k_1))\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)^2}\right|\Delta T_2$$

Fehlerfortpflanzung (Herleitung)

Taylorreihenentwicklung des absoluten Messfehlers

$$q(x+\Delta x, y+\Delta y) = q(x,y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial y_k} \cdot \Delta y_k$$

Daraus folgt: $$\Delta q = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial y_k} \cdot \Delta y_k$$

$$\sigma_q = \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(q_i - \overline{q}\right)^2}\right]$$

Messunsicherheit einer Messgröße

$$\sigma_q(x,y) = \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{(x_i-\overline{x})^2\left(\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)^2 + (y_i-\overline{y})^2\left(\frac{\partial q}{\partial y_i}\right)^2 + 2(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\left(\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y_i}\right)\right\}}\right]$$

Fehlerfortpflanzung (Herleitung 2)

Wenn die Meßgrössen nicht korreliert sind, also

$$2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\left(\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y_i}\right) = 0$$

Daraus folgt:

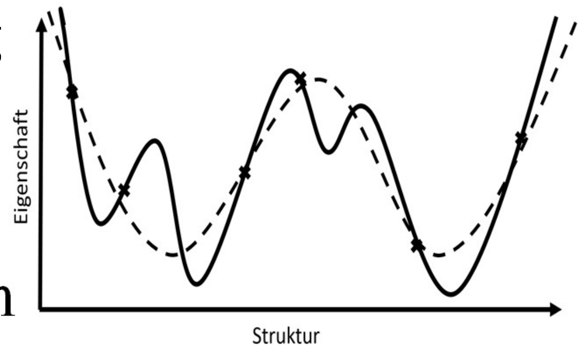
$$\sigma_q(x, y) = \sqrt{(x_i - \bar{x})^2\left(\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)^2 + (y_i - \bar{y})^2\left(\frac{\partial q}{\partial y_i}\right)^2}$$

Gaussches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Warum interessiert mich das?

- Praktikum
  - Analytische Chemie (Qualitätssicherung und Statistik)
  - Physikalische Chemie

- Machine Learning / Artificial Intelligence
  - Künstliche Generierung von Wissen aus Erfahrung
  - Keine direkte physikalische Bedeutung
  - Sehr hohe Anzahl von Parametern (typischerweise > 100)
  - Extrem hohe Anzahl von Datenpunkten (typischerweise > 100.000)



Allgemeine Häufigkeitsverteilung

Bei einer unbekannten Funktion f(x)

$$\boxed{\text{Mittelwert: } \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\text{Varianz: } s^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - 2\bar{x}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx + \bar{x}^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\boxed{= \overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

Gauß-Verteilung

$$f(x) = N_x e^{\frac{-(x-x_w)^2}{2\sigma^2}}$$

Normierung: $$\int_{-\infty}^{\infty} N_x e^{\frac{-(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$N_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Gauß-Verteilung (2)

Bezug zwischen dem Mittelwert und der Gauss-Verteilung

Bei unendlich vielen Versuchen:

$$\bar{x} = x_w \quad s_x^2 = \sigma^2$$

Durch Integration (Fehlerfunktion!)

$$P(\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_w+\sigma}^{x_w-\sigma} e^{-(x-x_w)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+1}^{-1} e^{-y^2/2} dy = erf(\sigma)$$

Gauß-Verteilung(3)

- Daraus ergibt sich:

$P(1\sigma)=68{,}3\%$

$P(2\sigma)=95{,}4\%$

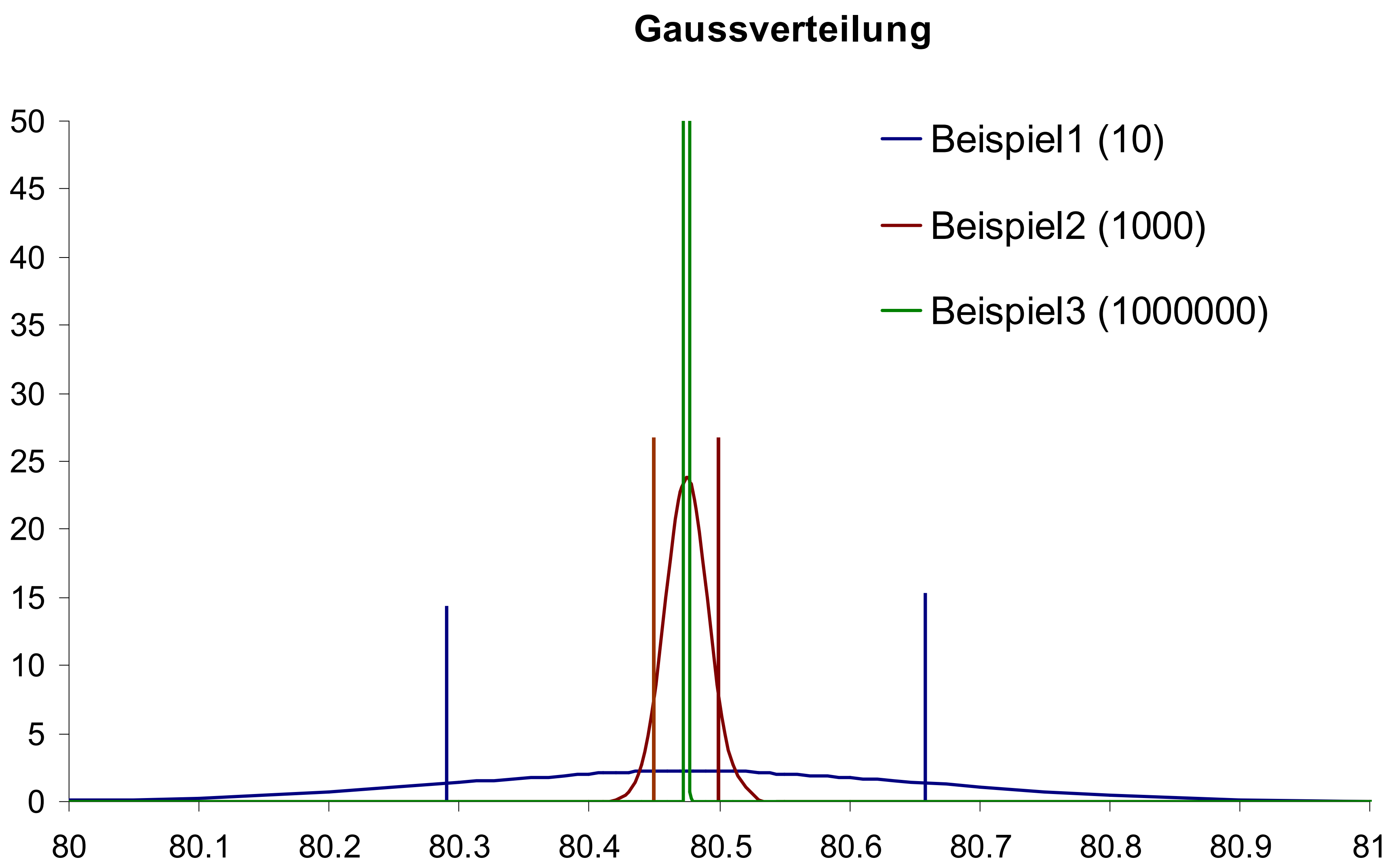
$P(3\sigma)=99{,}7\%$

- Binomialverteilung (diskrete Verteilung)

- Poissonverteilung

Beide gehen in die Gauß(Normal)verteilung

Bei $N \Rightarrow \infty$ über


Gaussverteilung
Beispiel1 (10)
Beispiel2 (1000)
Beispiel3 (1000000)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
80
80.1
80.2
80.3
80.4
80.5
80.6
80.7
80.8
80.9
81

Beispiel(4)

1.000 StudentInnen messen die Höhe eines Tisches mit einem Zollstock, wobei der Tisch real 80,6 cm hoch ist.

Nun halten aber 10 StudentInnen den Zollstock falsch herum(!), so das wir auf die folgenden Messwerte kommen:

2•20,0 3•19,5 5•19,0 200•80,0 300•80,5 290•80,75 200•81,0

Was nun?

Mittelwert: 79,961 cm (anstatt 80,573 cm)

Standardabweichung: 6,104 cm (anstatt 0,337 cm)

Präzision des Mittelwertes: 0.2 cm (0.016 cm)

x = 80,0 ± 0,2 cm oder 80,57 ± 0,016 cm

Verwerfen von Daten

Chauvenetsche Kriterium:

Ein verdächtiger Messwert in einem Datensatz ist dann zu verwerfen, wenn die Wahrscheinlichkeit der Abweichung von Messwerten, die mindestens so schlecht sind wie der verdächtige Wert, kleiner als 0.5 ist

$$t_{verd} = \frac{\left|x_{verd} - \bar{x}\right|}{s_x}$$

In unserem Beispiel: $t_{verd}(20,0)=9,823$

P(ausserhalb $t_{verd} s_x \sigma$)=0% P(9.82σ) ist sehr gross!

Kriterium: $P(t_{verd} s_x \sigma) \bullet (N=1000)=0$

Beispiel (5)...Fortsetzung

Daten werden verworfen und

$x = 80{,}57 \pm 0{,}016$ cm

Diskrepanz

Ist die Differenz zweier Messwerte.

Die Diskrepanz ist dann signifikant, wenn die Messwerte mehr als das 2-fache der Messunsicherheit auseinander liegen (2σ Grenze). Die Wahrscheinlichkeit $[1\text{-erf}(2\sigma)]$ dafür ist 4,5% $\Rightarrow$ Wahrscheinlich eine nicht entdeckte Quelle systematischer Abweichung

Ausgleichsrechnung

Bei zwei verschiedenen Messverfahren bzw. Messreihen bekommen wir für die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Wert zu erhalten, ein Produkt zweier Gauß-Kurven

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{(2\pi)^2}} e^{-\frac{(x_1 - x_w)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - x_w)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Mit einem neuen Mittelwert

$$\boxed{\bar{x}_{best} = \frac{\sum \frac{x_1}{\sigma_1^2} + \sum \frac{x_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

Ausgleichsrechnung(2)

Und einer neuen Standardabweichung:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma_{best} = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{x}_{best}}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial \overline{x}_{best}}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2}\\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\end{aligned}}$$

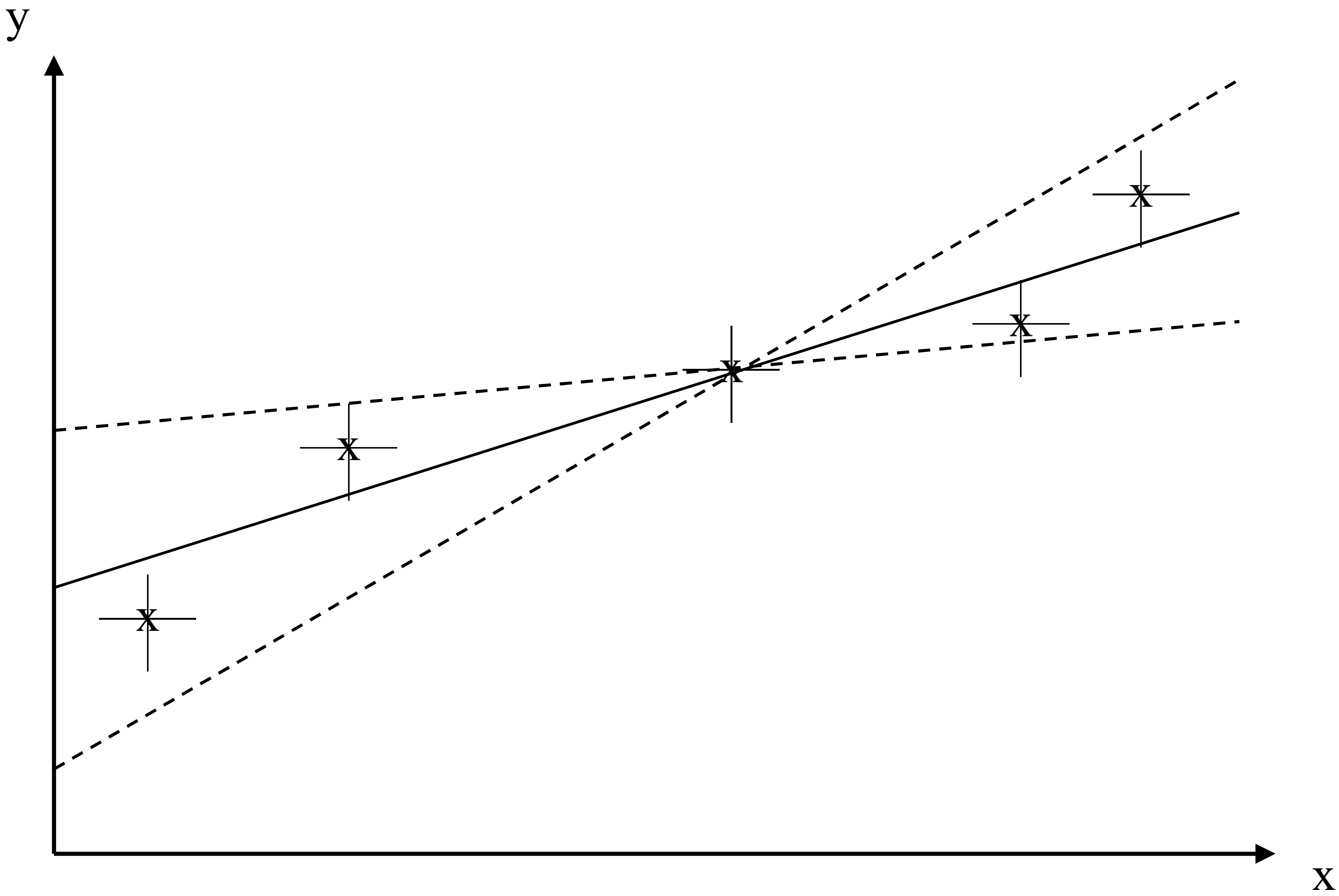
Lineare Regression- Graphische Lösung

Bei einer graphischen Lösung $y = mx + a$ einer Gerade ergibt sich die Unsicherheit der Steigung für zwei Werte aus

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{2\Delta x}{x_2 - x_1} \text{ und } \frac{\Delta m}{m} = \frac{2\Delta y}{y_2 - y_1}$$

Dadurch ergeben sich die Unsicherheit in den Achsenabschnitten

$$\Delta a_x = \frac{y_1 + y_2}{2}\frac{\Delta m}{m^2} \qquad \Delta a_y = \frac{x_1 + x_2}{2}\Delta m$$


y
x
x
x
x
x
x

Lineare Regression, Allgemein (1)

In dem Spezialfall:

$y(x) = a + bx$

Haben wir das lineare Gleichungssystem:

$$\sum_{n=1}^{N} y_n = Na + \sum_{n=1}^{N} x_n b$$

Beispiel: Wir haben ein überdefiniertes Gleichungssystem:

6 = a + b

5 = 2a + b

7 = 3a + b

10 = 4a + b

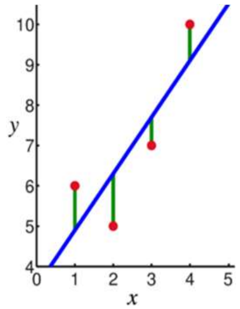
Lineare Regression, Allgemein (2)

$6 = a + b$

$5 = 2a + b$

$7 = 3a + b$

$10 = 4a + b$



Um die beste Gerade zu finden, versuchen wir, die Fehler (Fehlerquadratsumme) in a und b zu minimieren:

$S(a,b) = [6-(a+b)]^2 + [5-(2a+b)]^2 + [7-(3a+b)]^2 + [10-(4a+b)]^2$

$= 4\,b^2 + 30\,a^2 + 20\,ab – 56\,b – 154\,a + 210$

Das Minimum ist nun die Ableitung:

$dS(a,b)/db = 8\,b + 20\,a - 56 = 0$

$dS(a,b)/da = 60\,a + 20\,b - 154 = 0$

Zwei Gleichungen, zwei Unbekannte mit der Lösung $b = 3.5$; $a = 1.4$, also $y = 1.4\,x + 3.5$ und der Fehlerquadratsumme:

$S(a,b) = (1.1)^2 + (-1.3)^2 + (-0.7)^2 + (0.9)^2 = 4.2$

Lineare Regression, Allgemein (3)

Daraus ergibt sich:

$$a = \frac{D_a}{D}, b = \frac{D_b}{D}$$

$$D_a = -\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} y_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n^2 & \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \end{vmatrix}, D_b = \begin{vmatrix} N & \sum_{n=1}^{N} y_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} N & \sum_{n=1}^{N} x_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \end{vmatrix}$$

Lineare Regression, Allgemein (4)

Die Fehlerquadratsumme ist:

$$Q = \sum_{n=1}^{N} y_n^2 - a\sum_{n=1}^{N} y_n - b\sum_{n=1}^{N} y_n x_n$$

Die Standardabweichung einer Messgröße ist:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{Q}{N-2}}$$

und des Achsenabschnittes und der Steigung:

$$\boxed{\sigma_a = \sigma_m \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}{D}}, \sigma_b = \sigma_m \sqrt{\frac{N}{D}}}$$

Lineare Regressions-Korrelationskoeffizient

Der Koeffizient ist gegeben durch:

$$\boxed{r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}}}$$

Liegt er nahe bei ±1, sind die Wertepaare sehr gut durch eine Gerade beschrieben, |r|>0,9 bedeutet, das es wohl einen linearen Zusammenhang gibt

Bei einer Steigung von 0 gibt es keine Korrelation

Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\left(\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right)^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2} = r^2$$

R^2 [%]	Standard Abweichung der Variable	R^2 [%]	Standard Abweichung der Variable	R^2 [%]	Standard Abweichung der Variable
99.9	97%	95.0	78%	50.0	29%
99.5	93%	90.0	68%	25.0	13%
99.0	90%	80.0	55%	20.0	11%
98.0	86%	75.0	50%	15.0	7.8%

Beispiel- lineare Regression (1)

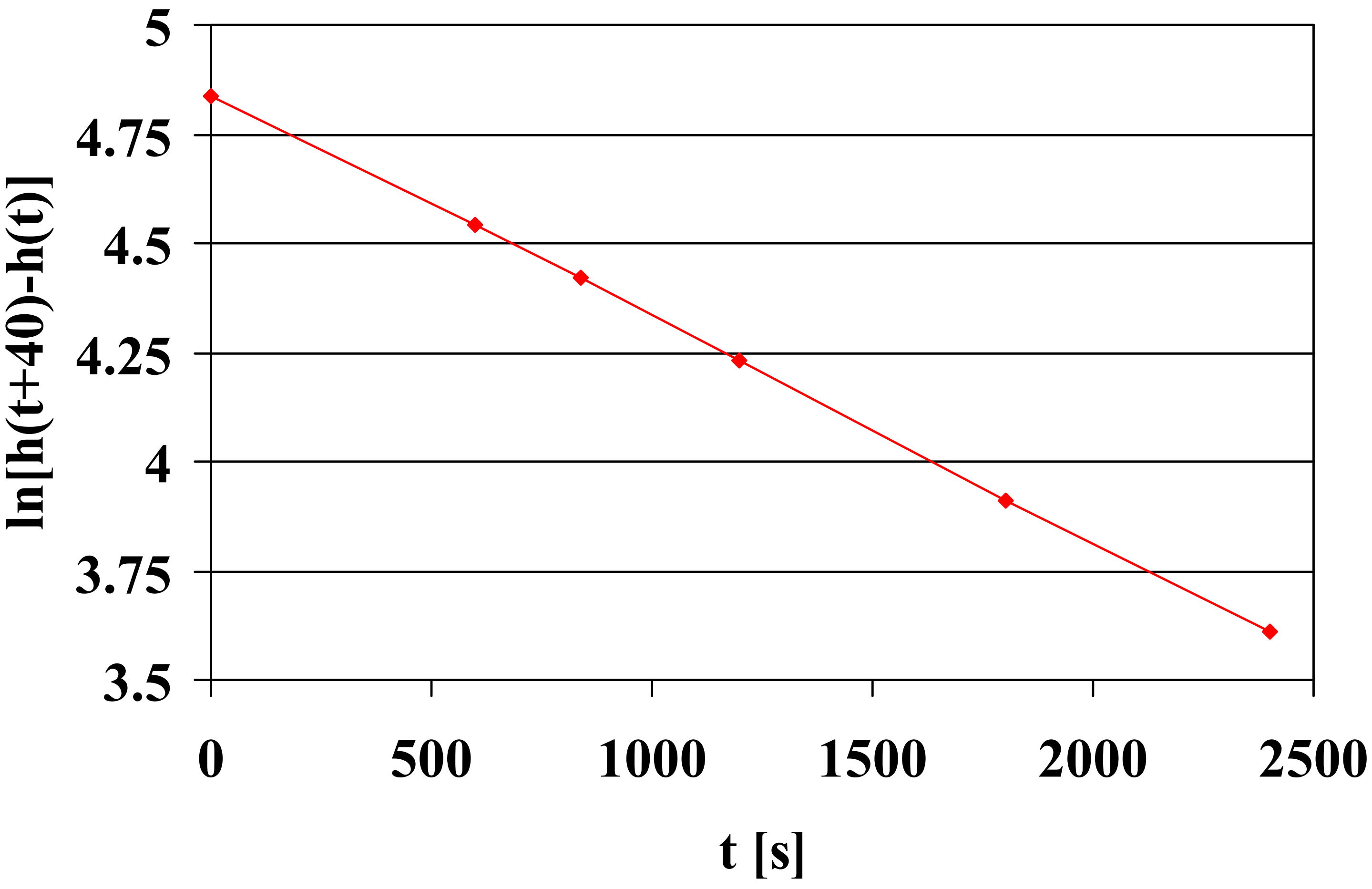
Ermittlung einer Geschwindigkeitskonstanten

Zerfall von Diacetonalkohol

h: Höhe des Dilatometers

t [min]	h [mm]	$t+(\tau=40)$ [min]	H [mm]	$h(t+\tau)-h(t)$ [mm]
0	4	40	130	126
10	51	50	145	94
14	66	54	149	83
20	60	60	155	69
30	112	70	162	50
40	130	80	167	37

Beispiel- lineare Regression (2)



Beispiel- lineare Regression (3)

$$D_a = -\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} y_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n^2 & \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{6} x_n & \sum_{n=1}^{6} y_n \\ \sum_{n=1}^{6} x_n^2 & \sum_{n=1}^{6} x_n y_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6840 & 25.555 \\ 46785600 & 27226.56 \end{vmatrix}$$

$$= -((6840 * 27226.56) - (46785600 * 25.555)) = 1009376338$$

$$\sum_{n=1}^{6} x_n = 0 + 600 + 840 + 1200 + 1800 + 2400 = 8840$$

Beispiel- lineare Regression (4)

$$D_b = \begin{vmatrix} N & \sum_{n=1}^{N} y_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 25.555 \\ 6840 & 27226.56 \end{vmatrix} = -11436.84$$

$$D = \begin{vmatrix} N & \sum_{n=1}^{N} x_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6840 \\ 6840 & 46785600 \end{vmatrix} = 233928000$$

$$a = \frac{D_a}{D} = 4.3149, b = \frac{D_b}{D} = \text{-4.88904*10^(-05)}$$

Beispiel- lineare Regression (5)

$$Q = \sum_{n=1}^{N} y_n^2 - a\sum_{n=1}^{N} y_n - b\sum_{n=1}^{N} y_n x_n$$

$$= 109.823 - (4.314)(25.555) - (-4.88904*10^{\wedge}(-05))(27226.56)$$

$$= 0.8869$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{Q}{N-2}} = \sqrt{\frac{0.8869}{4}} = 0.470885$$

$$\sigma_a = \sigma_m \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}{D}} = 0.470885\sqrt{\frac{6840}{233928000}} = 0.002547$$

$$\sigma_b = \sigma_m \sqrt{\frac{N}{D}} = 7.54136*10^{\wedge}(-05)$$

Beispiel- lineare Regression (6)

Gerade:

$y=4.845-5.1*10^{-4}x$

$$b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$a = \bar{y} - \bar{x}$$

Regressions-Korrelationskoeffizient: r=-0.99987

=>

$y=4.845\pm0.002-5.1\pm0.7*10^{-4}x$

Wir erwarten:

- Fehlerrechnung
  - Fehlerabschätzung der einzelnen Variablen und Fehlerfortpflanzung
  - Berechnung zufälliger Fehler (falls Messreihen vorhanden sind) bzw. Ausgleichsrechnung
- Angabe aller berechneten Werte als:
  Bestwert (Mittelwert) ± Unsicherheit [Masseinheit]
  - Mit der Fehlerfortabschätzung und Fortpflanzung
  - Mit den zufälligen Fehlern
- Fehlerdiskussion

Ende

Viel Glück/Spass/Erfolg im Praktikum!