

Statistik Vorlesung

01. Dezember 2023

Dauer der Prüfung: 100 Minuten

ZUNAME:			
VORNAME:		MATR.NR.:	

ERLAUBT: Skriptum des Instituts, nicht-graphikfähiger Taschenrechner

VERBOTEN: alle sonstigen Unterlagen, graphikfähiger Taschenrechner, Handys

Bei den Single-Choice-Fragen bringt eine richtige Antwort 2 Punkte und eine falsche 1 Punkt Abzug. Es gibt keine negative Punktemitnahme in ein anderes Beispiel.

Berechnungen müssen nachvollziehbar aufgeschrieben sein.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	12	
2	10	
3	20	
4	20	
5	30	
6	8	
Summe	100	
Note		

1. (12 Punkte)

a) Der Modalwert kann größer als der Median sein.

Richtig Falsch

b) Je näher der Pearson'sche Korrelationskoeffizient bei 1 liegt, desto näher liegen die Punkte an der Regressionsgeraden.

Richtig Falsch

c) Für eine diskrete, nicht aber für eine stetige Zufallsvariable ist $F(x) = P(X < x)$.

Richtig Falsch

d) Die Verteilungsfunktion $F(x)$ jeder stetigen Verteilung hat einen Wendepunkt.

Richtig Falsch

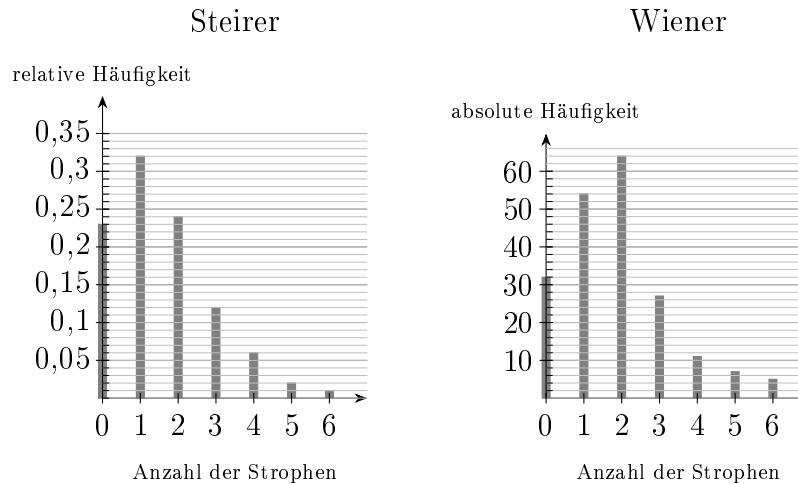
e) Für zwei standardnormalverteilte Zufallsvariablen genügt die Summe ihrer Quadrate einer Chi-Quadrat-Verteilung mit 1 Freiheitsgrad.

Richtig Falsch

f) Durch Ausreißer werden die Regressionskoeffizienten erheblich beeinflusst.

Richtig Falsch

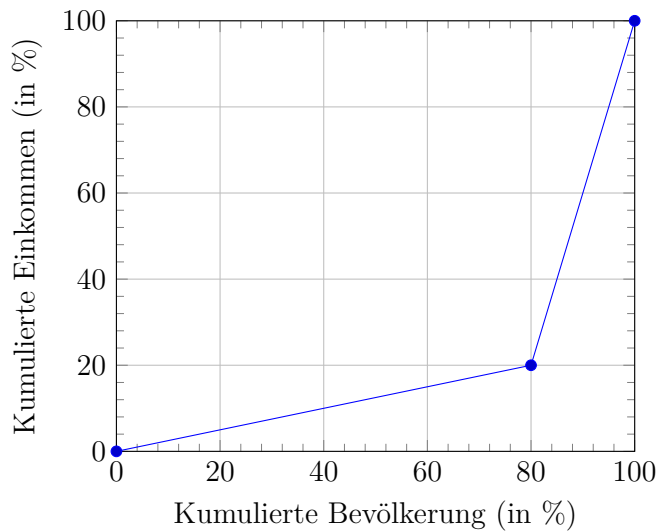
2. (10 Punkte) Das Büro für Weihnachtslieder möchte herausfinden, wie viele Strophen von „Stille Nacht“ die Steirer sowie die Wiener auswendig singen können. Dazu wurden jeweils 200 Personen befragt und die Ergebnisse der Umfragen sind in den folgenden Diagrammen grafisch dargestellt:



Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- a) Es kann die Chi-Quadrat-Verteilung unterstellt werden, da es ein seltenes Ereignis ist, dass jemand in der Steiermark und in Wien alle 6 Strophen auswendig singen kann.
 Richtig Falsch
- b) Sowohl bei den Steirern als auch bei den Wienern ist der Modalwert jeweils gleich groß wie der Median.
 Richtig Falsch
- c) Der Median der Anzahl der bekannten Strophen liegt bei den Steirern bei 3.
 Richtig Falsch
- d) 6 % der Wiener können mehr als 5 Strophen auswendig singen.
 Richtig Falsch
- e) Der Modalwert ist bei den Wienern größer als bei den Steirern.
 Richtig Falsch

3. a) In einem Staat mit 10 Mio. Einwohnern gibt es nur zwei *Personengruppen* gemessen am Einkommen: *arm* und *reich*. Die Ungleichverteilung der Einkommen kann mit folgender Lorenz-Kurve dargestellt werden.



1. (1 Punkt) Zeichnen Sie in das Diagramm oben ein, wie die Lorenz-Kurve bei perfekter Gleichverteilung der Einkommen aussehen müsste!
2. (2 Punkte) Wie viele arme Personen (in absoluten Zahlen) leben im Staat?
3. (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass es nun auch eine dritte Personengruppe gibt: die *Mittelschicht*! Zeichnen Sie eine (beliebige) weitere Lorenz-Kurve in das Diagramm, in der die Einkommen weniger ungleich verteilt sind als jetzt, aber nicht gleichverteilt! Berücksichtigen Sie dabei die Existenz der Mittelschicht!

Ausführung Beispiel 3a:

- b) Die Regierung überlegt, die Einkommen der Personengruppen *arm* und *reich* mittels einer Steuer gleichmäßiger als aktuell zu verteilen. Das heißt, die Einkommen der Reichen sollen zum Teil auf die Armen verteilt werden. Es wurden je 50 arme bzw. reiche Personen bezüglich ihrer *Akzeptanz* (gemessen in *niedrig* und *hoch*) zu dieser Steuer befragt. Das Ergebnis ist in folgender (Kontingenz-)Tabelle zusammengefasst:

Personengruppen	Akzeptanz	
	niedrig	hoch
reich	50	0
arm	0	50

Hinweis: Sie könnten die Antworten zu den nachfolgenden Fragen 1.–4. direkt hinschreiben. Berechnungen sind nicht unbedingt erforderlich. Begründen Sie Ihre Antworten, um die volle Punktezahl zu erhalten.

1. (3 Punkte) Ermitteln Sie, wie die gegebene Tabelle bei perfekter Unabhängigkeit der Merkmale *Personengruppen* und *Akzeptanz* aussieht!
2. (5 Punkte) Bestimmen Sie den korrigierten Kontingenzkoeffizienten für die gegebenen Daten und interpretieren Sie das Ergebnis!
3. (7 Punkte) Es wurde bemängelt, dass die erste Umfrage nicht repräsentativ war, weil mehr arme als reiche Personen im Staat leben. Daher wurden noch einmal 80 arme bzw. 20 reiche Personen mit folgendem Ergebnis befragt:

Personengruppen	Akzeptanz	
	niedrig	hoch
reich	20	0
arm	0	80

Wie sieht der korrigierte Kontingenzkoeffizient im Vergleich zu 3b) 3. aus?

Ausführung Beispiel 3b:

4. a) Karl und Inge besuchen am Adventmarkt einen Stand, an dem das alkoholische Getränk Glühwein und das nicht-alkoholische Getränk Punsch zum Verkauf angeboten werden. Der Verkäufer weiß aus Erfahrung, dass ein Kunde mit 70%iger Wahrscheinlichkeit ein Glas Glühwein kauft und mit 30 % Wahrscheinlichkeit ein Glas Punsch. Da die Polizei rund um die Adventmärkte aufmerksam kontrolliert, trinkt ein Kunde als zweites Glas, nachdem er bereits ein Glas Glühwein konsumiert hat, mit 40%iger Wahrscheinlichkeit ein Glas Punsch. Die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Glas ein Punsch ist, beträgt 31 %.
1. (4 Punkte) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft Karls Begleitung Inge einen Glühwein, nachdem sie bereits ein Glas Punsch getrunken hat?
 2. (2 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Karl an diesem Stand nacheinander zwei Gläser unterschiedlichen Getränks bestellt!

Ausführung Beispiel 4a:

- b) Nicht nur die Polizei kontrolliert rund um die Adventmärkte, auch der Obmann des Tourismusverbands und seine Kollegen haben sich ins Marktgetümmel geworfen, da es Beschwerden gab, dass die Füllmenge der Heißgetränke zu niedrig sei. Die Männer wollen überprüfen, ob tatsächlich, wie überall angepriesen, Heißgetränke im Umfang von $\frac{1}{4}$ Liter ausgeschenkt werden. Ihre Recherchen ergeben, dass die Füllmengen bei Glühwein und Punsch normalverteilt sind: Das durchschnittliche Volumen eines Glases Glühwein beträgt 250 ml und weist eine Standardabweichung von 10 ml auf. Die durchschnittliche Füllmenge eines Glases Punsch liegt bei 255 ml mit einer Standardabweichung von 20 ml.
1. (4 Punkte) Inge bestellt einen Punsch und freut sich, als sie sieht, dass das Glas bis zum Rand befüllt ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darin mehr als 250 ml, aber weniger als 270 ml Punsch?
 2. (5 Punkte) Innerhalb welchen um den Erwartungswert symmetrischen Intervalls befinden sich 90 % der Füllmengen bei einem Glas Glühwein?
 3. (5 Punkte) Karl ist, wie wir wissen, sehr durstig und kauft sich ein Glas Glühwein und ein Glas Punsch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Karl mehr als 500 ml Getränk erhält? (*Hinweis:* Wie ist die Summe $S = X + Y$ für Glühwein (X) und Punsch (Y) verteilt?)

Ausführung Beispiel 4b:

5. a) (15 Punkte) Am 4. Dezember ist Barbaratag, an dem es Brauch ist, einen Zweig in eine Vase mit Wasser zu stellen, damit er bis Weihnachten blüht. Um zu untersuchen, wie verbreitet dieser Brauch ist, wurden 140 Personen befragt, von denen 105 Personen diesen Brauch nicht befolgen.
1. Berechnen Sie ein zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall für den Anteil der Personen, die diesen Brauch nicht befolgen und interpretieren Sie dieses!
 2. Welchen Stichprobenumfang empfehlen Sie, damit das Konfidenzintervall aus 5a) 1. eine Länge von höchstens 0,06 hat und dabei eine statistische Sicherheit von 95 % gegeben ist? Gehen Sie davon aus, dass noch keine Vorabinformationen über den Anteil vorliegen!
 3. Einer weiteren Umfrage zufolge glauben 24 % der 150 befragten Personen, dass ihnen ein blühender Barbarazweig schon einmal im nächsten Jahr Glück gebracht hat. Das daraus berechnete Konfidenzintervall lautet: $[0,195; 0,285]$. Zu welchem Konfidenzniveau gehört dieses Schätzintervall?

Ausführung Beispiel 5a:

- b) (15 Punkte) Für ein gutes Glühweingewürz gibt es unzählige Kombinationsmöglichkeiten. Mit welchen Zutaten wird es besonders schmackhaft? Trifft man mit Sternanis neben allen anderen bekannten Gewürzen den Geschmack der Zeit? Diese Frage stellt sich ein Betreiber eines Glühweinstandes am Grazer Christkindlmarkt. Dazu lädt er 7 Kritiker zur Verkostung ein und serviert zunächst den Glühwein ohne Zugabe von Sternanis. Nachdem sich die Kritiker mit einem Stück Brot jeweils den Geschmack im Mund neutralisiert haben, wird der Glühwein mit Sternanis verkostet. Das Ergebnis der Punktevergabe ist in folgender Tabelle zusammengefasst:

Kritiker	1	2	3	4	5	6	7
Glühwein ohne Sternanis	50	69	65	73	77	72	57
Glühwein mit Sternanis	54	75	70	71	73	79	66

Hat der Glühwein mit Sternanis mehr Punkte erhalten als jener ohne? Normalverteilung kann unterstellt werden.

1. Welcher Test ist anzuwenden? Begründen Sie Ihre Entscheidung!
2. Formulieren Sie die Hypothesen dieses Tests!
3. Berechnen Sie den Testwert!
4. Bestimmen Sie den kritischen Bereich! Testniveau $\alpha = 5\%$.
5. Wie ist zu diesem Testniveau von 5% zu entscheiden? Wird er Sternanis zu seiner Gewürzmischung hinzugeben?

Ausführung Beispiel 5b:

6. Analysieren Sie den Zusammenhang zwischen der prognostizierten Globalstrahlung (in kWh/m²) und dem Photovoltaik-Ertrag (in kWh) einer 8 kWp PV-Anlage anhand folgender Datensammlung für 7 Tage:

Tag	1	2	3	4	5	6	7
Globalstrahlung (X)	17	18	14	16	17	20	14
PV-Ertrag (Y)	13	16	11	13	14	17	11

Folgende Werte wurden aus dem Datensatz bereits ermittelt: $s_x = 1,99$, $s_y = 2,129$ und $Cov(X,Y) = 4,102$.

- (4 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden und prognostizieren Sie den zu erwartenden PV-Ertrag für einen Tag mit einer Globalstrahlung von 15 kWh/m²!
- (4 Punkte) Wieviel Prozent der Gesamtvariabilität des PV-Ertrags können durch die prognostizierte Globalstrahlung erklärt werden?

Ausführung Beispiel 6:

Ausführung Beispiel 6: