

Musterlösung

1. Reales Gas (250 Punkte)

500 g Ethanol befinden sich bei einem Druck von 60.00 bar in einem Behälter mit einem Volumen von 3000 cm³. Die kritische Temperatur von Ethanol ist 243.1 °C und die Dichte beträgt am kritischen Punkt 275 g L⁻¹.

(a) Berechnen Sie die van der Waals Koeffizienten a und b. (120 Punkte)

$$T_k = \frac{8a}{27Rb}, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad V_{m,k} = 3b$$

Mit der dritten Formel kann man b direkt berechnen, aber zuvor muss man $V_{m,k}$ bestimmen:

$$V_{m,k} = \frac{V_k}{n} = \frac{m}{\rho_k n} = \frac{M}{\rho_k}$$

$$b = \frac{V_{m,k}}{3} = \frac{M}{3\rho_k}$$

$$b = \frac{46.07 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{3 \cdot 275 \cdot 10^3 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}} = 5.5842 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} = 5.58 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$$

$$a = \frac{27}{8} T_k R b = \frac{27}{8} 516.25 \text{ K} \cdot 8.31448 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} \cdot 5.5842 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} =$$

$$= 0.808965 \frac{\text{kg m}^5}{\text{mol}^2 \text{ s}^2} = 0.809 \frac{\text{kg m}^5}{\text{mol}^2 \text{ s}^2}$$

(b) Verwenden Sie im Folgenden $a = 0.8 \text{ kg m}^5 \text{ mol}^{-2} \text{ s}^{-2}$ und $b = 0.06 \text{ L mol}^{-1}$ (beide Werte sind als exakt anzunehmen) als van der Waals Koeffizienten (alle anderen Werte sind identisch mit jenen in (a)). Berechnen nun Sie mit Hilfe der Van der Waals Gleichung die Temperatur des Gases. (130 Punkte)

Um diese Aufgabe zu lösen, benötigt man die Van-der-Waals-Gleichung:

$$\left[p + \left(\frac{n}{V} \right)^2 a \right] (V - nb) = nRT \text{ bzw. } T = \left[p + \left(\frac{n}{V} \right)^2 a \right] \frac{(V - nb)}{nR}$$

Jetzt kann man die Werte einfügen, mit $n = \frac{m}{M} = \frac{500 \text{ g}}{46.07 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 10.853049 \text{ mol}$:

$$T = \left[60.00 \cdot 10^5 + \left(\frac{10.853049}{3 \cdot 10^{-3}} \right)^2 0.8 \right] \frac{3 \cdot 10^{-3} - 10.853049 \cdot 0.06 \cdot 10^{-3}}{10.853049 \cdot 8.31448} \text{ K} =$$

$$= 428.705133 \text{ K} = 429 \text{ K}$$

Die Einheit kann separat berechnet werden:

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} + \left(\frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \right)^2 \frac{\text{kg m}^5}{\text{mol}^2 \text{ s}^2} \right] \cdot \frac{\text{m}^3 - \text{mol} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}}{\text{mol} \frac{\text{m}^2 \text{ kg}}{\text{s}^2 \text{ K mol}}} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} \cdot \text{m}^3 \frac{\text{s}^2 \text{ K}}{\text{m}^2 \text{ kg}} = \text{K}$$

Musterlösung

2. Enthalpie und Entropie (250 Punkte)

Ein ideales Gas ($n = 2.50 \text{ mol}$) expandiert isotherm bei einer Temperatur von $T = 367 \text{ K}$ vom Anfangszustand A in den Zustand B wobei $V_B = \frac{7}{4} V_A$. Anschließend kommt es zu einer isochoren Zustandsänderung in den Endzustand C wobei die Temperatur um genau 30% sinkt. Bestimmen Sie

(a) die Entropieänderung während des gesamten Prozesses. (100 Punkte)

$$A \rightarrow B \text{ (isotherm): } T_A = T_B, \Delta U_{AB} = 0, B \rightarrow C \text{ (isochor): } V_B = V_C, W_{BC} = 0$$

$$V_C/V_A = V_B/V_A = 7/4, T_C/T_A = 70\%, T_C - T_A = -0.30 \cdot T_A$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{Ges.} &= \Delta S_{AC} = n c_{V,m} \ln \frac{T_C}{T_A} + n R \ln \frac{V_C}{V_A} \\ &= 2.50 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.31448 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} \ln 0.70 \\ &\quad + 2.50 \text{ mol} \cdot 8.31448 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} \ln \frac{7}{4} = \mathbf{0.5 \frac{J}{K}} \end{aligned}$$

(b) die ausgetauschte Wärme während des gesamten Prozesses. (150 Punkte)

$$Q_{Ges.} = Q_{AB} + Q_{BC}, \quad Q = \Delta U - W$$

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB} = -W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p(v) dV = n R T_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = n R T_A \ln \frac{7}{4} = 4269.0488 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} - W_{BC} = \Delta U_{BC}$$

$$\Delta U_{BC} = n c_{V,m} (T_C - T_B) = n c_{V,m} (-0.30 T_A) = 2.50 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.31448 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} (-0.30) \cdot 367 \text{ K} = -3432.8409 \text{ J}$$

$$Q_{Ges.} = 836.2079 \text{ J} = \mathbf{836 \text{ J}}$$

Anm : Je nach Interpretation der Fragestellung könnte man auch die Beträge der Wärmemengen addieren (gilt auch als korrektes Resultat):

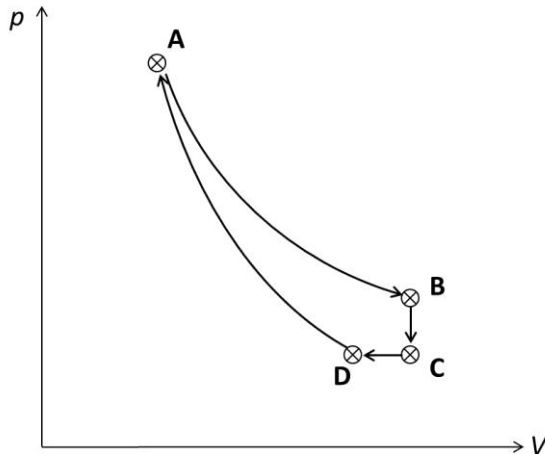
$$Q_{Ges.} = |Q_{AB}| + |Q_{BC}| = 7701.8897 = \mathbf{7.70 \text{ kJ}}$$

Musterlösung

3. Kreisprozess (300 Punkte)

Ein ideales Gas durchläuft den Kreisprozess $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$, wobei $A \rightarrow B$ isotherm, $B \rightarrow C$ isochor, $C \rightarrow D$ isobar und $D \rightarrow A$ adiabatisch abläuft. Zu Beginn (Zustand A) gilt: $T_A = 250 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_A = 0.120 \text{ bar}$ und $V_A = 2.70 \text{ m}^3$. Außerdem weiß man, dass $V_C = 3V_A$ und $V_D = 2V_A$.

(a) Stellen Sie den Kreisprozess in einem $p(V)$ Diagramm dar. (70 Punkte)



(b) Berechnen Sie Druck, Volumen und Temperatur im Zustand B. (80 Punkte)

$A \rightarrow B$ läuft isotherm ab, daher $pV = \text{const}$ und $p_A V_A = p_B V_B$

$$p_B = p_A \frac{V_A}{V_B} = 0.120 \text{ bar} \cdot \frac{1}{3} = 0.0400 \text{ bar}; \quad \mathbf{p_B = 0.0400 \text{ bar}}$$

$B \rightarrow C$ läuft isochor ab, daher $V_B = V_C = 3V_A = 8.10 \text{ m}^3$; $V_B = \mathbf{8.10 \text{ m}^3}$

$$T_B = T_A = 250 \text{ }^\circ\text{C} = 523 \text{ K}; \quad \mathbf{T_B = 250 \text{ }^\circ\text{C}}$$

(c) Berechnen Sie Druck, Volumen und Temperatur der Zustände C und D. (150 Punkte)

$D \rightarrow A$ läuft adiabatisch ab, daher $pV^\kappa = \text{const}$ und $p_D V_D^\kappa = p_A V_A^\kappa$

$$\kappa = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3}$$

$$p_D = p_A \left(\frac{V_A}{V_D} \right)^{\frac{5}{3}} = 0.120 \text{ bar} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{5}{3}}$$

$$p_D = 3.779763 \text{ kPa}; \quad \mathbf{p_D = 3.78 \text{ kPa}}$$

$$V_D = 2V_A = 5.40 \text{ m}^3; \quad \mathbf{V_D = 5.40 \text{ m}^3}$$

$$p_C = p_D \text{ (weil } C \rightarrow D \text{ isobar abläuft)}; \quad \mathbf{p_C = 3.78 \text{ kPa}}$$

Musterlösung

B→C läuft isochor ab, daher $\frac{p}{T} = \text{const}$ und $\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_C}{T_C}$

$$T_C = T_B \frac{p_C}{p_B} = 494.34575 \text{ K}; \mathbf{T_C = 494 \text{ K}}$$

$$V_C = 3V_A = 8.10 \text{ m}^3; \mathbf{V_C = 8.10 \text{ m}^3}$$

C→D läuft isobar ab, daher $\frac{V}{T} = \text{const}$ und $\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_D}{T_D}$

$$T_D = T_C \frac{V_D}{V_C} = 329.5638 \text{ K}; \mathbf{T_D = 330 \text{ K}}$$

4. Mischungen (150 Punkte)

Ein Gemisch aus (als ideal anzunehmenden) Gasen besteht aus O₂ (500 mg), Ar (300 mg) und CO₂ (200 mg). Das Gasgemisch befindet sich bei einer Temperatur von T = 126.85 °C und der Partialdruck von CO₂ beträgt 2.00 Pa. Bestimmen Sie

(a) die gesamte Stoffmenge des Gemisches (75 Punkte)

$$n = \frac{m}{M}$$

$$\begin{aligned} n_{\text{ges}} &= n_{\text{O}_2} + n_{\text{Ar}} + n_{\text{CO}_2} = \frac{0.500 \text{ g}}{32.0 \text{ g/mol}} + \frac{0.300 \text{ g}}{40.0 \text{ g/mol}} + \frac{0.200 \text{ g}}{44.0 \text{ g/mol}} \\ &= 0.027670454 \dots \text{ mol} = \mathbf{27.7 \text{ mmol}} \end{aligned}$$

(b) den Gesamtdruck des Gemisches (75 Punkte)

$$p_i = x_i p_{\text{ges}}$$

$$p_{\text{ges}} = p_i / x_i$$

$$x_{\text{CO}_2} = \frac{n_{\text{CO}_2}}{n_{\text{ges}}} = \dots = 0.164271050$$

$$p_{\text{ges}} = \frac{p_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}_2}} = \dots = \mathbf{12.2 \text{ Pa}}$$