1. Adiabatische Kompression

Ein ideales Gas wird adiabatisch komprimiert. Seine Stoffmenge beträgt 0.850 mol und seine Wärmekapazität lautet $C_{V,m}$ = 12.4715 J/mol K. Die Temperatur beträgt zu Beginn 0 °C, danach ändert sich bei der Kompression das Volumen von 8.68 L auf 6.94 L.

(a) Zeigen Sie, dass für den Adiabatenexponenten gilt: $\kappa = 5/3$

Für den Adiabatenexponenten gilt $\aleph = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}$

Die beiden Wärmekapazitäten sind durch $C_p - C_V = nR$ bzw. $C_{p,m} - C_{V,m} = R$ verknüpft.

$$\aleph = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{C_{V,m} + R}{C_{V,m}} = \frac{(12.4715 + 8.31448)\frac{J}{mol\ K}}{12.4715\frac{J}{mol\ K}} = 1.6667 \approx \frac{5}{3}$$

(b) Unter welchem Druck steht das Gas im Endzustand?

$$p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{0.850\ mol \cdot 8.31448\frac{J}{mol\ K} \cdot 273.15K}{0.00868m^3} = 222400.366\frac{J}{m^3}$$

$$p_1 = 222400.366\ Pa \qquad \frac{J}{m^3} = \frac{Nm}{m^3} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

$pV^{\aleph} = const$ und daher $p_1V_1^{\aleph} = p_2V_2^{\aleph}$

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\aleph} = 222400.366\ Pa \cdot \left(\frac{8.68\ L}{6.94\ L}\right)^{5/3} = 322900.9\ Pa$$

$$\boldsymbol{p_2 = 3.23\ bar}$$

(c) Wie ändert sich die Entropie bei der Kompression?

$\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T}$

Q = 0 (adiabatischer Prozess), daher **ΔS = 0 (die Entropie ändert sich nicht)**

(d) Welche Enthalpieänderung findet während des Prozesses statt?

$$H = U + pV$$

$$\Delta H = H_2 - H_1 = U_2 - U_1 + p_2V_2 - p_1V_1 = \Delta U + p_2V_2 - p_1V_1$$

$$\Delta H = W + Q + p_2V_2 - p_1V_1\ (wobei\ Q = 0)$$

$$\Delta H = C_V\Delta T + p_2V_2 - p_1V_1$$

$$\Delta H = 10.600775\frac{J}{K} \cdot 43.934\ K + 2240.927\ J - 1930.4305\ J$$

$$\Delta H = 776.2309\ J$$

$$\boldsymbol{\Delta H = 776\ J}$$

2. Gasgemisch

Anm.: In allen Aufgaben befindet sich das Gas auf einer konstanten Temperatur von 30 °C.

(a) Es liegt ein Gasgemisch aus Argon und Xenon (mit einer Masse von jeweils 85 mg) vor, das sich in einem Volumen von 3.32 Liter befindet. Sowohl die beiden Komponenten als auch das Gemisch sind als ideale Gase zu betrachten. Welche Stoffmenge befindet sich insgesamt im Behälter?

Die Stoffmengen n ergeben sich aus $n = \frac{m}{m_{mol}}$

n_{Ar} = 0.0021278 mol und n_{Xe} = 0.0006474 mol

Damit ist die gesamte Stoffmenge $n_{ges} = n_{Ar} + n_{Xe} = 2.77521 \times 10^{-3}$ mol

$n_{ges} = 2.8 \times 10^{-3}$ mol

(b) Welche Partialdrücke haben die beiden Komponenten in (a)?

Der Gesamtdruck ergibt sich aus der idealen Gasgleichung als $p_{ges} = \frac{n_{ges}RT}{V}$

$$p_{ges} = 2106.924\ \frac{J}{m^3} = 2106.924\ \frac{kg}{ms^2}$$

Für die Partialdrücke p_i der Komponente i gilt: $p_i = \frac{n_i}{n_{ges}} p_{ges}$ und somit

p_{Ar} = 1615.414 Pa bzw. **p_{Ar} = 1.6 kPa ;** p_{Xe} = 491.5025 Pa bzw. **p_{Xe} = 0.49 kPa**

(c) Nun füllt ein Gasgemisch (Argon und Xenon) einen sehr hohen Zylinder (sodass der Einfluss der Gravitation nicht vernachlässigt werden kann). Dabei befindet sich am Boden (bei einem Druck von 7.82×10^4 Pa) dreimal so viel Argon wie Xenon (bezogen auf die Stoffmenge). Wie groß sind die Partialdrücke von Argon und Xenon auf einer Höhe von 300 m?

Am Boden gilt:
$$p_{Ar}(0) = \frac{n_{Ar}}{n_{ges}} p_{ges}(0) = 0.75\ p_{ges}(0) = 5.88 \cdot 10^4\ Pa$$
$$p_{Xe}(0) = \frac{n_{Xe}}{n_{ges}} p_{ges}(0) = 0.25\ p_{ges}(0) = 1.96 \cdot 10^4\ Pa$$

In der Höhe h gilt für jeden einzelne Komponente i:

$$p_i(h) = p_i(0) \cdot e^{-m_{mol}\frac{g}{RT}h} \quad \text{wobei } \frac{g}{RT} = 0{,}003371\ \frac{mol}{m\ kg}$$

Durch Einsetzen der molaren Massen m_{mol} und der Partialdrücke der beiden Komponenten am Boden (s.o.) sowie der Höhe (h = 300 m) erhält man daraus die Partialdrücke in einer Höhe von 300 m:

p_{Ar} (300 m) = 5.612×10^4 Pa bzw. **p_{Ar} (300 m) = 0.56 bar**

p_{Xe} (300 m) = 1.68143×10^4 Pa bzw. **p_{Xe} (300 m) = 0.17 bar**

3. Reale Gase

Das Verhalten eines realen Gases lässt sich über die Virialgleichung beschreiben:

$$P = \frac{RT}{V_m}\left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \cdots\right)$$

wobei V_m das molare Volumen angibt, B und C sind die Virialkoeffizienten.

(a) Welche SI-Einheit hat C in der Virialgleichung?

$$[V_m] = \left[\frac{V}{n}\right] = m^3 mol^{-1}, \qquad [p] = \left[\frac{RT}{V_m}\right] = kgm^{-1}s^{-2}$$

Da RT/V_m wegen der idealen Gasgleichung die Einheit des Drucks haben muss ($kgm^{-1}s^{-2}$) und der erste Term in der Klammer dimensionslos ist, muss der Virialkoeffizient *C* dieselbe Einheite wie V_m^2 haben:

$$[\boldsymbol{C}] = [V_m^2] = \boldsymbol{m^6 mol^{-2}}$$

(b) Verwenden Sie die Virialgleichung um den Druck (in Pa) zu bestimmen, unter dem genau 1 mol CO_2 Gas in einem Behälter (Volumen von 12.5 Liter) bei 300 K steht. Nehmen Sie dafür die Virialkoeffizienten B = -96.0 $cm^3 mol^{-1}$ und C = 0 (exakt) an.

$$p = \frac{RT}{V_m}\left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \cdots\right) = \frac{RT}{V_m}\left(1 + \frac{B}{V_m}\right)$$

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{12.5\,Liter}{1\,mol} = \frac{12.5\ \times 10^{-3} m^3}{1\,mol} = 12.5\ \times 10^{-3}\ m^3 mol^{-1}$$

$$B = -96.0\ cm^3 mol^{-1} = -96.0 \times 10^{-6}\ m^3 mol^{-1}$$

$$p = \frac{RT}{V_m}\left(1 + \frac{B}{V_m}\right) = \frac{(8.31448\ kgm^2 s^{-2} K^{-1} mol^{-1})(300\ K)}{(0.0125\ m^3 mol^{-1})}\left[1 + \left(\frac{-96.0 \times 10^{-6}\ m^3 mol^{-1}}{0.0125\ m^3 mol^{-1}}\right)\right]$$

$$p = 198014.995\ kgm^{-1}s^{-2} = \boldsymbol{1.98 \times 10^5\ kgm^{-1}s^{-2}} = \boldsymbol{1.98 \times 10^5\ Pa}$$

(c) Nun wird ein Kohlendioxid Gas mit Hilfe der van der Waals Gleichung beschrieben. CO_2 hat eine kritische Temperatur von 304.25 K und am kritischen Punkt die Dichte 0.455 g cm^{-3}. Bestimmen Sie den van der Waals Koeffizienten a. Gehen Sie davon aus, dass das kritische molare Volumen identisch ist mit dem Dreifachen des van der Waals Koeffizienten b.

van der Waals Gleichung: $\left[p + \left(\frac{n}{V}\right)^2 a\right](V - nb) = nRT$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{n \cdot m_{mol}}{V} = \frac{m_{mol}}{V_m} = \frac{m_{mol}}{3b}$$

$$b = \frac{m_{mol}}{3\rho}$$

$$a = \frac{27RbT_k}{8} = \frac{27R(\frac{m_{mol}}{3\rho})T_k}{8} = \frac{9}{8}R \cdot T_k \cdot \frac{m_{mol}}{\rho}$$

$$a = \frac{9}{8} \cdot \frac{8.31448\frac{J}{mol\,K}304.25\,K \cdot 0.04401\frac{kg}{mol}}{455\frac{kg}{m^3}} = 0.2752695\frac{kg \cdot m^2}{s^2mol^2m^{-3}}$$

$$\boldsymbol{a = 0.275\,kg \cdot m^5s^{-2}mol^{-2}}$$