УДК 517.956.8

А.В. Зубкова, С.А. Саженков

Эффективное уравнение турбулентной диффузии в трещиновато-пористой среде*

A.V. Zubkova, S.A. Sazhenkov

Effective Equation of a Turbulent Diffusion in a Cracky-Porous Medium

Изучается уравнение переноса массы в трещиновато-пористой среде на микроскопическом уровне, т.е. на уровне пор. Проводится усреднение начально-краевой задачи для этого уравнения, как результат устанавливаются две модели, описывающие предельные эффективные режимы для различного вида конвекции.

Ключевые слова: конвекция-диффузия в пористых средах, метод усреднения, многомасштабные модели геофизики.

The mass transfer equation in a cracky-porous medium on a microscopic level, that is, on the pore level, is considered. The homogenization procedure for the initial-boundary value problem for this equation is worked out. As results, two essentially distinct effective regimes are established, depending on characters of turbulence of velocity distributions.

Key words: convection-diffusion in porous media, homogenization, multi-scale geophysical models.

Постановка задачи. Рассматривается начально-краевая задача для уравнения переноса примеси в трещиновато-пористой среде с учетом молекулярной диффузии и большой по отношению к размерам трещин и пор скоростью переноса массы. Считается, что трещиновато-пористая структура является периодической. Уравнение переноса примеси — это трехмерное линейное (по отношению к концентрации примеси) параболическое уравнение, зависящее от малого параметра. Малый параметр ε — это отношение характерных размеров трещин и рассматриваемого трещиновато-пористого континуума в целом. Также ε — это отношение характерных размеров пор и трещин. Отсюда, естественно, следует, что отношение характерных размеров пор и всего трещиновато-пористого континуума имеет порядок ε^2.

В изучаемой задаче вектор скорости переноса массы задан. Тот факт, что вектор скорости является большим по отношению к размерам трещин и пор, выражается в том, что конвективное слагаемое в уравнении диффузии-конвекции представляет собой дробь с малым знаменателем ε^k, $k = 1, 2$. Периодичность структуры означает, что конвективное слагаемое — периодическая по пространственным переменным вектор-функция.

Сейчас приведем точную формулировку задачи, продолжим обсуждение ее физического смысла и сделаем замечания о новизне и значимости получаемых результатов.

Задача D–C. В пространственно-временном цилиндре $Q_T := \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей, $T = const > 0$, требуется отыскать распределение концентрации примеси $u = u(\vec{x},t)$ в несущем фильтрующемся через трещиновато-пористую среду потоке, удовлетворяющее уравнению диффузии-конвекции

$$u_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^k}\vec{a}^\varepsilon \cdot \nabla_x u^\varepsilon = D_0 \Delta_x u^\varepsilon, \tag{1}$$

начальным данным

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u^0(\vec{x}), \quad 0 \le u^0(\vec{x}) \le 1 \text{ п. в. в } \Omega \tag{2}$$

и однородному граничному условию

$$u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

В постановке задачи D_0 — заданный постоянный положительный коэффициент молекулярной диффузии; ε — положительный малый параметр, смысл которого пояснен выше, перед формулировкой задачи D–C; $\dfrac{1}{\varepsilon^k}\vec{a}^\varepsilon$ — вектор скорости фильтрации, в котором

$$\vec{a}^\varepsilon = \vec{a}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right), \tag{4}$$

где $\vec{a}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ — заданная гладкая (скажем, из класса C^1 по совокупности переменных) вектор–функция, являющаяся 1-периодической по переменным $\vec{y}$ и $\vec{z}$, удовлетворяющая условиям соленоидальности

$$\mathrm{div}_x \vec{a} = \mathrm{div}_y \vec{a} = \mathrm{div}_z \vec{a} = 0 \tag{5}$$

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00447 и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (контракт 02.740.11.0617).

и условию однородности среднего значения по переменной $\vec{z}$ на периоде $Z = (0,1)^3$:

$$\int_Z \vec{a}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})\, d\vec{z} = 0. \tag{6}$$

Показатель степени k равен 1 или 2 в зависимости от масштаба турбулентности. С физической точки зрения, при $k = 1$ имеем большие колебания поля скоростей на уровне трещин, в то время как на уровне пор движение происходит в относительно регулярном режиме. При $k = 2$ существенно турбулентный режим возникает уже на уровне пор.

Для того чтобы сформулировать понятие обобщенного решения и результат о корректности задачи D–C, введем определения пространств обобщенных функций согласно [1].

Через $V_2(Q_T)$ обозначим банахово пространство, состоящее из элементов соболевского пространства финитных на границе $\partial\Omega$ функций из $W_2^{0,1}(Q_T)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{Q_T} = \underset{0\le t\le T}{ess\,sup}\|u(\cdot,t)\|_{2,\Omega} + \|\nabla_x u\|_{2,Q_T}.$$

Через $V_2^{0,1}(Q_T)$ обозначим подпространство $V_2(Q_T)$, состоящее из функций, имеющих значения на сечениях $\Omega \times \{t\}$ в смысле следов из подпространства $L^2(\Omega)$, и при этом отображения $t \mapsto u(\cdot,t)$ являются непрерывными отображениями отрезка $[0,T]$ в пространство $L^2(\Omega)$.

Определение 1 *Обобщенным решением* $u^\varepsilon = u^\varepsilon(\vec{x},t)$ *задачи D–C называется функция из пространства* $V_2^{0,1}(Q_T)$, *удовлетворяющая интегральному равенству*

$$\int_{Q_T} D_0 \nabla_x u^\varepsilon \cdot \nabla_x \Phi\, d\vec{x}\, dt + \\ + \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{Q_T} (\vec{a}^\varepsilon \cdot \nabla_x u^\varepsilon)\Phi\, d\vec{x}\, dt = \\ = \int_{Q_T} u^\varepsilon \Phi_t\, d\vec{x}\, dt + \int_\Omega u^0(\vec{x})\Phi(\vec{x},0)\, d\vec{x}, \tag{7}$$

при любых $\Phi \in C^1(Q_T)$, *обращающихся в нуль в окрестности сечения* $\{t = T\}$ *и границы* $\partial\Omega$.

Согласно известной теории начально–краевых задач для линейных параболических уравнений 2–го порядка [1] справедливо следующее

Утверждение 1 (Разрешимость задачи D–C. Равномерные оценки). *При любом фиксированном* $\varepsilon > 0$, *при любой заданной функции* $u(\vec{x},0) = u^0(\vec{x})$, *удовлетворяющей оценке (2), задача D–C имеет единственное обобщенное решение* $u^\varepsilon(\vec{x},t)$.

Более того, это решение подчиняется следующим равномерным по ε *оценкам:*

1. *имеет место принцип максимума*

$$0 \le u^\varepsilon(\vec{x},t) \le 1 \quad \textit{п. в. в } Q_T; \tag{8}$$

2. *имеет место энергетическое неравенство*

$$||u^\varepsilon||_{V_2(Q_T)} \le c_T \cdot ||u^\varepsilon(\vec{x},0)||_{2,\Omega} \le c_*, \tag{9}$$

где c_* *и* c_T *— это константы, не зависящие от* ε.

Утверждение 1 констатирует корректность задачи о переносе массы на микроскопическом уровне, т.е. на уровне, на котором различаются в пространстве отдельные поры и трещины. С практической точки зрения этот результат не является удовлетворительным, поскольку размеры пор и трещин весьма малы по сравнению с размерами, которые имеют интерес в технологических процессах. С точки зрения технологических процессов, невозможно адекватное численное моделирование на микро- или мезоскопических уровнях даже на суперкомпьютерах, потому что размеры пор и трещин измеряются в милли-, микро- и нанометрах (см., например: [2, p. 2.4.2]), а размеры трещиновато-пористых сред, как то: подземных углеводородных пластов, артезианских бассейнов — имеют размеры порядка сотен метров и километров.

В связи с этим наблюдением нами рассматривается и решается следующий вопрос: «Каким является предельный режим, возникающий в задаче D–C при стремлении ε к нулю?».

Это означает, что решается задача гомогенизации, иными словами, задача нахождения эффективных механических характеристик, описывающих изучаемый континуум на макроскопическом масштабе.

Точные результаты гомогенизации для задачи D–C будут сформулированы далее.

Отметим, что уравнения вида (1) давно вызывают интерес специалистов в области математической физики и, в частности, в теории усреднения. Данное исследование является продолжением работ Вейнана [3] и Маклафлина, Папаниколау и Пиранно [4], в которых изучаются уравнение типа (1) с конвективным членом $\dfrac{1}{\varepsilon}\vec{a}\left(\vec{x}, \dfrac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)$ и задача гомогенизации для такого уравнения. Работы [3] и [4] хорошо согласуются с теорией фильтрации на двух масштабах, с физической точки зрения на масштабах пор и всего континуума. Задача гомогенизации в них решена, т. е. построены предельные уравнения, описывающие поведение эффективной концентрации $\bar{u} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon$. Для исследования применены метод формальных асимптотических разложений [5] и метод многомасштабной сходимости Аллера–Бриана [6]. Также стоит отметить статьи Аллера, Панкратовой и Пятницкого [7] и [8]. В них метод ф.а.р. применяется к уравнению вида (1) с $k=1$ и $\vec{a}$, не зависящим от $\vec{z}$, при том, что условия соленоидальности поля скорости и равенства нулю среднего значения поля скоростей на микроскопическом масштабе не накладываются. Получен ряд качественных результатов, в том числе выведены уравнения для главного члена асимптотического разложения.

В нашем исследовании одновременно использовались методы ф.а.р. и многомасштабной сходимости Аллера-Бриана. В итоге получены две гомогенные модели, существенно различные при $k=1$ и $k=2$.

Случай k=1. Результат в случае $k=1$ достигается приложением метода Аллера-Бриана, изложенного в работе [6], посвященной исследованиям многомасштабных моделей. В теории Аллера-Бриана имеет место следующая [6, следствие 3.4]

Лемма 1 *Для любых $\psi \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}^3)$ семейство отображений*

$$\vec{x} \mapsto \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} a_i^{\varepsilon} \left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2} \right) \psi \left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon} \right) \right\},$$

$i = 1,2,3$, *равномерно по ε ограничено в $H^{-1}(\Omega)$.*

Как обычно, через $H^{-1}(\Omega)$ обозначается сопряженное к $H^1_0(\Omega)$ пространство функционалов.

При любой достаточно гладкой функции ϕ из леммы 1 следует, что

$$\left| \int\limits_{Q_T} \frac{1}{\varepsilon} \vec{a}^{\varepsilon} u^{\varepsilon} \cdot \nabla_x \phi \, d\vec{x}dt \right| \leq$$
$$\leq \varepsilon \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{a}^{\varepsilon} \right\|_{H^{-1}} \cdot \| u^{\varepsilon} \|_{H^1} \cdot \| \nabla_x \phi \|_C \leq$$
$$\leq \varepsilon c_1 c_2 \| \nabla_x \phi \|_C \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

В силу этого предельного соотношения немедленно выводим, что эффективное распределение концентрации $u^* = \text{w-}\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}$ служит решением следующей задачи.

Задача А. Требуется найти $u^* \in V_2^{0,1}(Q_T)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t^* = D_0 \Delta_x u^*, \tag{10}$$

начальным и граничным условиям

$$u^*|_{t=0} = u^0(\vec{x}), \quad u^*|_{\partial\Omega} = 0. \tag{11}$$

Задача А — это начально-краевая задача для линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Ее корректность утверждается классической теорией уравнений математической физики.

Завершая этот параграф, сделаем очевидное наблюдение: в случае $k=1$ доминирует диффузионный процесс, конвективные члены отсутствуют.

Случай k=2. Формулировка результата. Приступим к изучению случая $k=2$, который весьма нетривиален. Для этого воспользуемся методом формальных асимптотических разложений, описанным в книге Бенсуссана, Лионса, Папаниколау [5]. Рассмотрим u^{ε} в виде:

$$u(\vec{x},t) = \bar{u}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right) + \varepsilon u^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right) + \\ + \varepsilon^2 u^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right) + \varepsilon^3 u^{(3)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right) + \\ + \varepsilon^4 u^{(4)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right) + \ldots, \tag{12}$$

где $\bar{u}, u^{(i)}$ — 1-периодические по $\vec{y}, \vec{z}$.

Самый важный результат работы — это

Теорема 1 *Главный член $\bar{u}$ формального асимптотического разложения (12) является решением задачи Б.*

Задача Б. Требуется найти усреднённое (эффективное) распределение концентраций $\bar{u} = \bar{u}(\vec{x},t)$, удовлетворяющее эффективному уравнению баланса массы

$$\bar{u}_t + \vec{w} \cdot \nabla_x \bar{u} - D_0 \Delta_x \bar{u} + \mathbb{A} : \nabla_x^2 \bar{u} = 0 \tag{13}$$

с краевыми и начальными условиями

$$\bar{u}|_{t=0} = \bar{u}^0(\vec{x}), \quad \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{14}$$

Здесь $(D_0\mathbb{I} - \mathbb{A})$ — матрица диффузии; $\mathbb{A}_{ij} = \left\langle a_i U_j^{(1)} \right\rangle_{Y\times Z}$ — коэффициент турбулентной диффузии; $w_k = \left\langle a_i \dfrac{\partial U_k^{(1)}}{\partial x_i} \right\rangle_{Y\times Z}$ — эффективное поле скоростей.

$U_j^{(1)}$ — поле скоростей на микроскопическом уровне. Оно находится из задачи на ячейке С, которая вводится ниже посредством формул (35)—(37).

Следующее утверждение устанавливает корректность задачи Б.

Теорема 2 *Матрица диффузии $= D_0\mathbb{I} - \mathbb{A}(\vec{x})$ является строго положительно определенной с гладкими компонентами. И компоненты вектора эффективной скорости конвекции $\vec{w}(\vec{x})$ также гладкие.*

Соответственно, задача Б является корректной начально-краевой задачей для линейного уравнения конвекции–диффузии с гладкими коэффициентами.

Случай k=2. Доказательство теорем 1 и 2. Обозначим

$$A^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}a_i\frac{\partial}{\partial x_i} - D_0\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right). \tag{15}$$

В силу формулы взятия производной сложной функции справедливы тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi\left(\vec{x},\frac{\vec{x}}{\varepsilon},\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2},t\right) = \\ = \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i} + \\ + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial z_i}\Big)\Phi(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t)\Big|_{\left(\vec{y}=\frac{\vec{x}}{\varepsilon},\vec{z}=\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right)}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Phi\left(\vec{x},\frac{\vec{x}}{\varepsilon},\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2},t\right) = \\ = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_i} + \\ + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial z_i} + \frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial z_i} + \\ + \frac{1}{\varepsilon^4}\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\Big)\Phi(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t)\Big|_{\left(\vec{y}=\frac{\vec{x}}{\varepsilon},\vec{z}=\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right)}, \tag{17}$$

Ввиду этих выражений можем представить оператор A^ε следующим образом:

$$A^\varepsilon = \varepsilon^{-4}A_1 + \varepsilon^{-3}A_2 + \varepsilon^{-2}A_3 + \varepsilon^{-1}A_4 + A_5, \tag{18}$$

где

$$A_1 = \sum_{i=1}^{3}\left[a_i\frac{\partial}{\partial z_i} - D_0\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right], \tag{19}$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^{3}\left[a_i\frac{\partial}{\partial y_i} - D_0\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial z_i}\right], \tag{20}$$

$$A_3 = \sum_{i=1}^{3}\left[a_i\frac{\partial}{\partial x_i} - D_0\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial z_i}\right)\right], \tag{21}$$

$$A_4 = -\sum_{i=1}^{3}D_0\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_i}, \tag{22}$$

$$A_5 = \tfrac{\partial}{\partial t} - \textstyle\sum_{i=1}^{3}D_0\tfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{23}$$

С учетом представлений (12) и (19)—(23) уравнение (1) примет вид:

$$\varepsilon^{-4}A_1\bar{u} + \varepsilon^{-3}(A_2\bar{u} + A_1u^{(1)}) + \varepsilon^{-2}(A_3\bar{u} + \\ + A_2u^{(1)} + A_1u^{(2)}) + \varepsilon^{-1}(A_4\bar{u} + A_3u^{(1)} + \\ + A_2u^{(2)} + A_1u^{(3)}) + (A_5\bar{u} + A_4u^{(1)} + \\ + A_3u^{(2)} + A_2u^{(3)} + A_1u^{(4)}) = 0. \tag{24}$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при степенях ε, получим иерархическую систему уравнений

$$\varepsilon^{-4}: \quad \vec{a}\cdot\nabla_z\bar{u} = D_0\Delta_z\bar{u}; \tag{25}$$

$$\varepsilon^{-3}: \quad \vec{a}\cdot\left(\nabla_y\bar{u} + \nabla_z u^{(1)}\right) = \\ = D_0\nabla_z\cdot\left(\nabla_y\bar{u} + \nabla_z u^{(1)}\right); \tag{26}$$

$$\varepsilon^{-2}: \quad \vec{a}\cdot\left(\nabla_x\bar{u} + \nabla_y u^{(1)} + \nabla_z u^{(2)}\right) = \\ = D_0\nabla_y\cdot\left(\nabla_y\bar{u} + \nabla_z u^{(1)}\right) + \\ + D_0\nabla_z\cdot\left(\nabla_x\bar{u} + \nabla_z u^{(2)}\right); \tag{27}$$

$$\varepsilon^{-1}: \quad \vec{a}\cdot\left(\nabla_x u^{(1)} + \nabla_y u^{(2)} + \nabla_z u^{(3)}\right) = \\ = D_0\nabla_y\cdot\left(\nabla_x\bar{u} + \nabla_y u^{(1)}\right) + \\ + D_0\nabla_z\cdot\left(\nabla_x u^{(1)} + \nabla_y u^{(2)} + \nabla_z u^{(3)}\right); \tag{28}$$

$$\varepsilon^{0}: \quad \bar{u}_t + \vec{a}\cdot\left(\nabla_x u^{(2)} + \nabla_y u^{(3)} + \nabla_z u^{(4)}\right) = \\ = D_0\Delta_x\bar{u} + D_0\nabla_y\cdot\left(\nabla_x u^{(1)} + \nabla_y u^{(2)}\right) + \\ + D_0\nabla_z\cdot\left(\nabla_x u^{(2)} + \nabla_y u^{(3)} + \nabla_z u^{(4)}\right); \tag{29}$$

$$\varepsilon^k \quad (k \geq 1): \qquad \ldots.$$

Рассмотрим уравнение (25), где $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — параметры:

$$\vec{a}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\cdot\nabla_z\bar{u}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t) = D_0\Delta_z\bar{u}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t), \tag{30}$$

$\bar{u}$ — 1–периодическая по $\vec{z}$.

Это эллиптическое уравнение в силу классического результата теории эллиптических уравнений [9, гл. III, §1, т. 1.3] имеет единственное решение $\bar{u} = \bar{u}(\vec{x},\vec{y},t)$.

Выберем $u^{(1)}$ в виде

$$u^{(1)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t) = \\ = \sum_{k=1}^{3}U_k^{(1)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\frac{\partial\bar{u}(\vec{x},\vec{y},t)}{\partial y_k} + \tilde{U}^{(1)}(\vec{x},\vec{y}). \tag{31}$$

Тогда из (26) следует

$$\sum_{i=1}^{3}a_i\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\right) = \\ = D_0\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\right). \tag{32}$$

Это равенство можно переписать в эквивалентном виде

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\left[\sum_{i=1}^{3}a_i\left(\delta_{ik}+\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\right)\right]= =\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\left[D_0\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 U_k^{(1)}}{\partial z_i^2}\right]. \quad (33)$$

Оно гарантированно будет выполняться при любых значениях $\bar{u}$ в том случае, если функции $U_1^{(1)}$, $U_2^{(1)}$ и $U_3^{(1)}$ служат решениями уравнений

$$\sum_{i=1}^{3}a_i\left(\delta_{ik}+\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\right)=D_0\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 U_k^{(1)}}{\partial z_i^2}, \quad k=1,2,3. \quad (34)$$

Следуя стандартной в теории гомогенизации процедуре, сформулируем проблемы отыскания функций $U_k^{(1)}$ $(k=1,2,3)$ в виде задач на ячейке.

Задача C.

$$a_k+\vec{a}\cdot\nabla_z U_k^{(1)}=D_0\Delta_z U_k^{(1)},\quad k=1,2,3, \quad (35)$$

$$U_k^{(1)} \text{ — 1–периодическая по } \vec{z}, \quad (36)$$

$$\left\langle U_k^{(1)}\right\rangle_Z=0. \quad (37)$$

Согласно теореме [9, гл. III, §1, т. 1.3] мы можем утверждать следующее.

Лемма 2 *Задача (35)–(37) имеет единственное решение* $U_k^{(1)}\in C^{2+\alpha}(Z)$.

Подставим выражение (31) в (27), получим

$$\sum_{i=1}^{3}a_i\biggl(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{3}\biggl(\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial y_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}+U_k^{(1)}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y_k\partial y_i}+ +\frac{\partial\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_i}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_i}\biggr)\biggr)= =\sum_{i=1}^{3}\biggl[D_0\frac{\partial}{\partial y_i}\biggl(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\biggr)+ +\frac{\partial}{\partial z_i}\biggl(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_i}\biggr)\biggr]. \quad (38)$$

В терминах A_j:

$$A_2u^{(1)}+A_3\bar{u}=-A_1u^{(2)}. \quad (39)$$

Интегрируем по $\vec{z}$.

Так как

$$\int_Z A_1u^{(2)}\,d\vec{z}= =\int_Z\sum_{i=1}^{3}\left(a_i\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_i}-D_0\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z_i^2}\right)d\vec{z}=0,$$

то получим

$$\int_Z\left(A_2u^{(1)}+A_3\bar{u}\right)d\vec{z}= =\int_Z\sum_{i=1}^{3}\biggl[a_i\biggl(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{3}\biggl(\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial y_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}+ +U_k^{(1)}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y_k\partial y_i}+\frac{\partial\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_i}\biggr)\biggr)- -D_0\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y_i^2}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\right)\right)\biggr]d\vec{z}=0. \quad (40)$$

Имеем

$$\int_Z a_i\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}\,d\vec{z}=\langle a_i\rangle_Z\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}=0,$$

$$\int_Z a_i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial y_i}\,d\vec{z}=\langle a_i\rangle_Z\frac{\partial\tilde{U}}{\partial y_i}=0,$$

$$\int_Z D_0\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\right)=0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{3}\left(-D_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y_i^2}+\sum_{k=1}^{3}\left\langle a_i\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial y_i}\right\rangle_Z\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}+ +\sum_{k=1}^{3}\left\langle a_iU_k^{(1)}\right\rangle_Z\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y_k\partial y_i}\right)=0. \quad (41)$$

Лемма 3 *Уравнение (41) имеет эллиптический тип.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\mathbb{A}_1^{ij}=D_0\delta_{ij}-\left\langle a_iU_j^{(1)}\right\rangle_Z.$$

Из (35) следует

$$\int_Z\left(a_k+\vec{a}\cdot\nabla_zU_k^{(1)}\right)\phi\,d\vec{z}+ +\int_Z D_0\nabla_zU_k^{(1)}\cdot\nabla_z\phi\,d\vec{z}=0,$$

где ϕ — 1–периодическая по $\vec{z}$.

Возьмем $\phi:=U_j^{(1)}$. Получим

$$\left\langle a_iU_j^{(1)}\right\rangle_Z=-\int_Z(\vec{a}\cdot\nabla_zU_i^{(1)})U_j^{(1)}\,d\vec{z}- -\int_Z D_0\nabla_zU_i^{(1)}\cdot\nabla_zU_j^{(1)}\,d\vec{z}.$$

Тогда

$$\mathbb{A}_1^{ij} = D_0\delta_{ij} + \int\limits_Z \vec{a}\cdot\nabla_z U_i^{(1)} U_j^{(1)}\, d\vec{z} + \\ + \int\limits_Z D_0 \nabla_z U_i^{(1)} \cdot \nabla_z U_j^{(1)}\, d\vec{z}.$$

Возьмем $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^3$. Имеет место цепочка равенств

$$\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{A}_1^{ij}\xi_i\xi_j = \\ = D_0|\vec{\xi}|^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_Z \vec{a}\cdot\nabla_z\left(U_i^{(1)}\xi_i\right)\left(U_j^{(1)}\xi_j\right)\, d\vec{z} + \\ + \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_Z D_0\nabla_z\left(U_i^{(1)}\xi_i\right)\cdot\nabla_z\left(U_j^{(1)}\xi_j\right)\, d\vec{z} = \\ = D_0|\vec{\xi}|^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_Z (\vec{a}\cdot\nabla_z\Psi)\,\Psi\, d\vec{z} + \\ + \int\limits_Z D_0|\nabla_z\Psi|^2\, d\vec{z} \geq D_0|\vec{\xi}|^2, \quad (42)$$

в которой обозначено $\Psi := \sum\limits_{k=1}^{3} U_k^{(1)}\xi_k$ и учтено, что

$$\int\limits_Z (\vec{a}\cdot\nabla_z\Psi)\Psi\, d\vec{z} = \int\limits_Z \vec{a}\cdot\nabla_z\frac{\Psi^2}{2}\, d\vec{z} = \\ = -\int\limits_Z (\operatorname{div}_x\vec{a})\frac{\Psi}{2} = 0,$$

$$\int\limits_Z D_0|\nabla_z\Psi|^2\, d\vec{z} \geq 0.$$

Следовательно, $\mathbb{A}_1 > 0$.

□

В силу 1-периодичности $\bar{u}$ по $\vec{y}$ задача (41) имеет единственное решение [9, гл. III, §1, т. 1.3]

$$\bar{u} \;=\; \bar{u}(\vec{x}, t).$$

Тогда

$$u^{(1)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t) = \tilde{U}^{(1)}(\vec{x},\vec{y}). \quad (43)$$

Выберем $u^{(2)}$ в виде:

$$u^{(2)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t) = \sum_{k=1}^{3} U_k^{(2)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\left(\frac{\partial\bar{u}(\vec{x},t)}{\partial x_k} + \right. \\ \left. + \frac{\partial\tilde{U}^{(1)}(\vec{x},\vec{y})}{\partial y_k}\right) + \tilde{U}^{(2)}(\vec{x},\vec{y}). \quad (44)$$

Тогда из (27) следует

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i} + \frac{\partial\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_i} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial z_i}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k}\right)\right)\right) = \\ = \sum_{i,k=1}^{3} D_0\frac{\partial^2 U_k^{(2)}}{\partial z_i^2}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k}\right), \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k}\right)\cdot a_i\left(\delta_{ik} + \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial z_i}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k}\right)\cdot\left(D_0\frac{\partial^2 U_k^{(2)}}{\partial z_i^2}\right), \quad (46)$$

где k=1,2,3.

Последнее равенство гарантированно выполняется при каждом $k = 1,2,3$, если $U_k^{(2)}$ — решение системы

$$a_k + \vec{a}\cdot\nabla_z U_k^{(2)} = D_0\Delta_z U_k^{(2)}, \quad k = 1,2,3, \quad (47)$$

$$U_k^{(2)} \text{ — 1–периодическая по } \vec{z}, \quad (48)$$

$$\left\langle U_k^{(2)}\right\rangle_Z = 0. \quad (49)$$

Система (47)—(49) является задачей на ячейке Z. Она точно совпадает с задачей на ячейке С.

Подставим (43) и (44) в (28):

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_i\left(\frac{\partial\tilde{U}_k^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y_i}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial\tilde{U}_k^{(1)}}{\partial y_k}\right) + \right. \\ \left. + U_k^{(2)}\frac{\partial^2\tilde{U}_k^{(1)}}{\partial y_k\partial y_i} + \frac{\partial\tilde{U}^{(2)}}{\partial y_i} + \frac{\partial u^{(3)}}{\partial z_i}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{3} D_0\left(\frac{\partial^2\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_i^2} + \sum_{k=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y_i}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + \right.\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left. + \frac{\partial\tilde{U}_k^{(1)}}{\partial y_k}\right) + U_k^{(2)}\frac{\partial^2\tilde{U}_k^{(1)}}{\partial y_k\partial y_i} + \frac{\partial u^{(3)}}{\partial z_i}\right]\right)\right). \quad (50)$$

В терминах операторов A_j (см. формулу (18)):

$$A_2 u^{(2)} + A_3 u^{(1)} = -A_1 u^{(3)} - A_4\bar{u}. \quad (51)$$

Так как

$$\int\limits_Z A_1 u^{(3)}\, d\vec{z} = \\ = \int\limits_Z \sum_{i=1}^{3}\left(a_i\frac{\partial u^{(3)}}{\partial z_i} - D_0\frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial z_i^2}\right)\, d\vec{z} = 0,$$

$$\int\limits_Y\int\limits_Z A_4\bar{u}\,d\vec{y}\,d\vec{z} = \\ = -\int\limits_Y\int\limits_Z\sum_{i=1}^{3} D_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_i\partial y_i}\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0,$$

то

$$\int\limits_Z (A_2u^{(2)} + A_3u^{(1)})\,d\vec{z} = 0.$$

С учетом того, что

$$\int\limits_Z a_i\frac{\partial\tilde{U}^{(1)}}{\partial x_i}\,d\vec{z} = \int\limits_Z a_i\frac{\partial\tilde{U}^{(2)}}{\partial y_i}\,d\vec{z} = 0,$$

$$\int\limits_Z D_0\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y_i}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial\tilde{U}_k^{(1)}}{\partial y_k}\right)\right)\,d\vec{z} = 0,$$

$$\int\limits_Z D_0\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial z_i}\frac{\partial^2\tilde{U}_k^{(1)}}{\partial y_k\partial y_i}\,d\vec{z} = 0.$$

имеем

$$\sum_{i,k=1}^{3}\left(-D_0\frac{\partial^2\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_i^2} + \left\langle a_i\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y_i}\right\rangle_Z\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\partial\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k}\right) + \left\langle a_iU_k^{(2)}\right\rangle_Z\frac{\partial^2\tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k\partial y_i}\right) = 0. \quad (52)$$

Матрица

$$\mathbb{A}_2^{ij} = D_0\delta_{ij} - \left\langle a_iU_j^{(2)}\right\rangle_Z$$

строго положительно определена согласно предыдущим рассуждениям, так как уравнение для $U_j^{(2)}$ такое же, как для $U_j^{(1)}$.

Следовательно, в силу 1–периодичности $\tilde{U}^{(1)}$ по $\vec{y}$

$$\tilde{U}^{(1)}(\vec{x},\vec{y}) = \tilde{\tilde{U}}^{(1)}(\vec{x}).$$

Значит,

$$u^{(1)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t) = \tilde{\tilde{U}}^{(1)}(\vec{x}), \quad (53)$$

$$u^{(2)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t) = \\ = \sum_{k=1}^{3} U_k^{(2)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\frac{\partial\bar{u}(\vec{x},t)}{\partial x_k} + \tilde{U}^{(2)}(\vec{x},\vec{y}). \quad (54)$$

Из (29), с учетом того, что

$$\int\limits_Y\int\limits_Z A_2u^{(3)}\,d\vec{y}\,d\vec{z} = \\ = \int\limits_Y\int\limits_Z\sum_{i=1}^{3}\left[a_i\frac{\partial u^{(3)}}{\partial y_i} - D_0\frac{\partial^2u^{(3)}}{\partial y_i\partial z_i}\right]\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0, \quad (55)$$

$$\int\limits_Y\int\limits_Z A_4u^{(1)}\,d\vec{y}\,d\vec{z} = \\ = -\int\limits_Y\int\limits_Z\sum_{i=1}^{3} D_0\frac{\partial^2\tilde{\tilde{U}}^{(1)}}{\partial x_i\partial y_i}\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0 \quad (56)$$

и

$$\int\limits_Y\int\limits_Z A_1u^{(4)}\,d\vec{y}\,d\vec{z} = \int\limits_Y\int\limits_Z\sum_{i=1}^{3}\left(a_i\frac{\partial u^{(4)}}{\partial z_i} - \right. \\ \left. - D_0\frac{\partial^2u^{(4)}}{\partial z_i^2}\right)\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0, \quad (57)$$

получим

$$\int\limits_Y\int\limits_Z\left(A_3u^{(2)} + A_5\bar{u}\right)\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0, \quad (58)$$

$$\int\limits_Y\int\limits_Z\sum_{i=1}^{3}\left[a_i\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_i} - D_0\left(\frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2u^{(2)}}{\partial x_i\partial z_i}\right) + \right. \\ \left. + \bar{u}_t - D_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_i^2}\right]\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0, \quad (59)$$

$$\int\limits_Y\int\limits_Z\sum_{i,k=1}^{3}\left[a_i\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + a_iU_k^{(2)}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_k\partial x_i} + \right. \\ + a_i\frac{\partial\tilde{U}^{(2)}}{\partial x_i} - D_0\frac{\partial^2U_k^{(2)}}{\partial y_i^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} - D_0\frac{\partial^2\tilde{U}^{(2)}}{\partial y_i^2} - \\ \left. - D_0\frac{\partial^2U_k^{(2)}}{\partial x_i\partial z_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k} + \bar{u}_t - D_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_i^2}\right]\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0. \quad (60)$$

Так как

$$\int\limits_Y\int\limits_Z a_i\frac{\partial\tilde{U}^{(2)}}{\partial x_i}\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0, \int\limits_Y\int\limits_Z D_0\frac{\partial^2\tilde{U}^{(2)}}{\partial y_i^2}\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0,$$

$$\int\limits_Y\int\limits_Z D_0\frac{\partial^2U_k^{(2)}}{\partial y_i^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k}\,d\vec{y}\,d\vec{z} = 0,$$

$$\int\limits_Y\int\limits_Z D_0\frac{\partial^2U_k^{(2)}}{\partial x_i\partial z_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k}\,d\vec{z} = 0,$$

то окончательно выводим

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k}\left\langle a_i\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial x_i}\right\rangle_{Y\times Z} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_k\partial x_i}\left\langle a_iU_k^{(2)}\right\rangle_{Y\times Z} + \\ + \bar{u}_t - D_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_i^2} = 0, \quad (61)$$

т.е. искомое уравнение (13). Этим мы завершаем доказательство теорем 1 и 2.

Библиографический список

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М., 1973.

2. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. — New York, 1988.

3. Weinan E. Homogenization of linear and nonlinear transport equations, Communications in Pure and Applied Mathematics // Comm. on Pure and Appl. Math. — 1992. — 45.

4. McLaughlin D. W., Papanicolaou G. C., and Pironneau O. R. Convection of microstructure and related problems // SIAM J. Appl. Math. — 1985. — 45.

5. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis of periodic structures. — NH, 1978.

6. G. Allaire, M. Briane Multiscale convergence and reiterated homogenisation // Proc. R. Soc. Edinb. — 1996. — 126A.

7. I. Pankratova, A. Piatnitski Homogenization of convection-diffusion equation in infinite cylinder // Networks and Heterogeneous Media. — 2011. — 6 (1).

8. G. Allaire, I. Pankratova, A. Piatnitski Homogenization and concentration for a diffusion equation with large convection in a bounded domain // to appear in Journal of Functional Analysis. Internal report, CMAP, Ecole Polytechnique. — May, 2011. — n. 713.

9. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М., 1973.