МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Механико–математический факультет

Кафедра теоретической механики

Магистерская диссертация

ЗУБКОВОЙ Анны Владимировны

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД МЕТОДОМ ДВУХМАСШТАБНОЙ СХОДИМОСТИ АЛЛЕРА–НГУЕТСЕНГА

Научный руководитель
канд. физ.–мат. наук, доцент
С. А. Саженков

Новосибирск 2013

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается линеаризованная изотермическая модель совместного движения упругого пористого грунта и двухфазной ньютоновской вязкой сжимаемой жидкости. Движение жидких фаз даётся нестационарными уравнениями Стокса

$$\begin{aligned}\rho^0_{if} m_i \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_i}{\partial t^2} &= c_{\rho i}\rho^0_{if}\alpha^0_i \nabla_x (m_1 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1 + m_2 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2) \\ &+ \mathrm{div}_x \Big[m_i\Big(\nu_i - \frac{2}{3}\mu_i\Big)\Big(\mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_i}{\partial t}\Big)\mathbb{I} + 2 m_i \mu_i \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_i}{\partial t}\Big)\Big] \\ &+ \rho^0_{if} m_i \boldsymbol{g} + (-1)^i \boldsymbol{F}_{12}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_f \times (0,T), \quad i = 1,2, \quad (0.1)\end{aligned}$$

перемещение твёрдой фазы определяется уравнением Ламэ

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\nabla_x \mathrm{div}_x \boldsymbol{w} + \mathrm{div}_x (2\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w})) + \rho_s \boldsymbol{g},$$
$$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_s \times (0,T). \quad (0.2)$$

Требуется определить поля перемещений $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ жидких фаз и $\boldsymbol{w}$ — твёрдой фазы.

Контактный разрыв на границе между твёрдой и жидкой компонентами подчиняется классическому условию Ренкина–Гюгонио и условиям непрерывности перемещений. Система уравнений дополняется начально–краевыми условиями, а именно: условиями прилипания на границе $\partial\Omega$ и начальными данными для перемещений и скоростей. Поставленная начально–краевая задача является корректной. Существование и единственность обоснованы в [1] с помощью стандартных методов решения уравнений математической физики.

Поровое пространство снабжается периодической геометрией. В рассмотрение вводится малый параметр ε, который задаётся как характерный размер шаблонной ячейки. В этой работе рассматривается случай, когда коэффициенты сдвиговой вязкости в жидкой фазе зависят от малого параметра, а именно: $\mu_1 = \varepsilon^2 \mu_1^0$, $\mu_2 = \varepsilon^2 \mu_2^0$, где μ_1^0, μ_2^0 — постоянные.

Проводится процедура гомогенизации, то есть предельный переход при стремлении малого параметра к нулю. В качестве метода усреднения используется метод двухмасштабной сходимости Аллера–Нгуетсенга [2, 3].

В результате построена система предельных двухмасшатбных уравнений. Искомые величины и коэффициенты уравнений в этой системе зависят одновременно от двух типов переменных: микроскопических и макроскопических.

Затем проводится процедура асимптотической декомпозиции, выводится эффективная модель макроструктуры, коэффициенты которой определяются решением задач на ячейках, несущих полную информацию о микроструктуре. Макроскопическое уравнение представляет собой уравнение Био пороупругости для двухскоростной среды.

Следующие построения в магистерской диссертации связаны с продолжением работы С. В. Хохлова [4] для модели с постоянными физическими коэффициентами, представленной в работе [1]. В настоящей диссертации эта работа завершена: сформулированы задачи на ячейках в точной форме, доказана их корректность, уточнено предельное эффективное уравнение.

Теория гомогенизации, к которой относится данная работа, представляет собой задачи усреднения для термомеханических систем с быстро осциллирующими данными. Главной сложностью в изучении задач динамики сплошных сред с быстро осциллирующими, то есть быстро колеблющимися, термомеханическими свойствами, является наличие малого параметра, скажем, ε, характеризующего частоту колебаний. В предисловии монографии А. Л. Пятницкого, Г. А. Чечкина и А. С. Шамаева [5] было отмечено, что описание таких процессов на микроскопических масштабах, то есть на масштабах, на которых различается каждое отдельное колебание, затруднено даже с использованием современных суперкомпьютеров. В данной ситуации шаг разностного метода должен быть много меньше ε, что приводит к практически невыполнимым объёмам вычислений при малых значениях параметра. Поэтому естественным является стремление построить математически корректную усреднённую модель, не зависящую от ε, решения которой были бы близки к решению исходной задачи при малых ε.

Общим местом в постановках задач усреднения является требование условий на некоторую упорядоченность рассматриваемой структуры. Чаще всего предполагают, что среда является периодической, квазипериодической или случайной однородной. Снабжение микроструктуры периодической геометрией широко распространено в задачах усреднения в геофизике, а именно, в проблемах описания фильтрации жидкостей и газов через пористый грунт. Первые работы по построению процедур гомогенизации и результирующих усреднённых моделей фильтрации в периодических пористых средах изложены в монографиях Н. С. Бахвалова и Г. П. Панасенко [6], А. Бенсуссана, Ж.–Л. Лионса и Г. Папаниколау [7], Э. Санчеса—Паленсии [8] и статье Р. Барриджа и Дж. Б. Келлера [9].

В 1989 г. Габриэль Нгуетсенг [3] предложил интересную концепцию двухмасштабной сходимости, что привело к развитию нового способа выполнения и одновременно строгого обоснования процедур усреднения — метода двухмасштабной сходимости [2, 10, 11]. Этот метод оказался в ряде случаев очень удобным при усреднении периодических структур, поскольку двухмасштабная сходимость позволяет установить предельные режимы последовательностей периодических функций при стремлении длины периода к нулю более точно, чем слабая (в L^2, например) сходимость. В этой связи следует отметить работы Р. П. Джилберта, А. Микелича, Т. Клопо и Ж. Л. Феррэна [12], в которых метод двухмасштабной сходимости был применён для построения двух различных изотермических макроскопических моделей движения линейной сжимаемой вязкой жидкости в упругом пористом грунте. В последнее время эта тематика стала очень актуальной: имеется большое количество работ для изотермических, а также и для неизотермических моделей. Из наиболее последних результатов в этой связи стоит отметить цикл работ А. М. Мейрманова [13, 14, 15, 16]. Каждое новое достижение в этом направлении вносит вклад в лучшее понимание геофизических процессов. В этом ряду стоит материал настоящей диссертации.

Работа прошла апробацию на XLXI Международной студенческой конференции, за результаты присуждён диплом первой степени. Материалы настоящей диссертации были представлены также в рамках Международной школы–семинара «Ломоносовские чтения на Алтае» в 2012 г. и на Пятнадцатой региональной конференции по математике (МАК–2012). Часть результатов опубликована в статье в журнале "Известия Алтайского государственного университета, входящем в список ВАК, в трудах конференции «Ломоносовские чтения на Алтае» и в сборниках тезисов XLXI МНСК и ежегодной региональной конференции по математике МАК–2012 в г. Барнауле [17, 18, 19, 20].

Я выражаю благодарность своему научному руководителю С. А. Саженкову за предложенные задачи, а также за поддержку и внимание на всём протяжении написания данной работы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Математическая постановка задачи

Задача А. Линеаризованная изотермическая модель совместного движения упругого пористого грунта и двухфазной ньютоновской вязкой сжимаемой жидкости, целиком заполняющей поры. В пространственно–временной области $Q = \Omega \times (0, T)$, где $T-$ положительная постоянная, а Ω — единичный куб в $\mathbb{R}^3$ ($\Omega = (0,1)^3$), разбитый на два непересекающихся множества Ω_s и Ω_f и границу $\Gamma_0 = \partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s$ между ними, требуется определить поля перемещения $\boldsymbol{w}_1$ и $\boldsymbol{w}_2$ в жидких частях и поле перемещений $\boldsymbol{w}$ в твёрдой части, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned}\rho_{if}^0 m_i \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_i}{\partial t^2} &= c_{\rho i}\rho_{if}^0 \alpha_i^0 \nabla_x (m_1 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1 + m_2 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2) \\ &+ \mathrm{div}_x \Big[m_i \Big(\nu_i - \frac{2}{3}\mu_i\Big)\Big(\mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_i}{\partial t}\Big)\mathbb{I} + 2 m_i \mu_i \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_i}{\partial t}\Big)\Big] \\ &+ \rho_{if}^0 m_i \boldsymbol{g} + (-1)^i \boldsymbol{F}_{12}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_f \times (0, T), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{1.1a}$$

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\nabla_x \mathrm{div}_x \boldsymbol{w} + \mathrm{div}_x (2\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w})) + \rho_s \boldsymbol{g},$$

$$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_s \times (0, T); \tag{1.1b}$$

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma_0 \times (0, T); \tag{1.1c}$$

$$\begin{aligned}&(c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 \alpha_1^0 + c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 \alpha_2^0)(m_1 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1 + m_2 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2)\boldsymbol{n} \\ &+ m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big(\mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}\Big)\boldsymbol{n} + m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big(\mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}\Big)\boldsymbol{n} \\ &+ 2 m_1 \mu_1 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}\Big)\boldsymbol{n} + 2 m_2 \mu_2 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}\Big)\boldsymbol{n} = \\ &\Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)(\mathrm{div}_x \boldsymbol{w})\boldsymbol{n} + 2\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w})\boldsymbol{n}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma_0 \times (0, T); \end{aligned} \tag{1.1d}$$

условиям на $\partial\Omega \times (0,T)$:

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 = 0 \quad \text{на } (\partial\Omega_f \cap \partial\Omega) \times (0,T), \quad \boldsymbol{w} = 0 \quad \text{на } (\partial\Omega_s \cap \partial\Omega) \times (0,T) \quad (1.1\text{e})$$

и начальным данным

$$\boldsymbol{w}_1|_{t=0} = \boldsymbol{w}_1^0,\ \boldsymbol{w}_2|_{t=0} = \boldsymbol{w}_2^0 \text{ для } \boldsymbol{x} \in \Omega_f, \quad \boldsymbol{w}|_{t=0} = \boldsymbol{w}^0 \text{ для } \boldsymbol{x} \in \Omega_s, \quad (1.1\text{f})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_1^0,\ \frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_2^0 \text{ для } \boldsymbol{x} \in \Omega_f,\ \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}^0 \text{ для } \boldsymbol{x} \in \Omega_s. \quad (1.1\text{g})$$

Заданные функции удовлетворяют требованиям

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{w}_1^0,\ \boldsymbol{w}_2^0 \in H^1(\Omega_f), \qquad \boldsymbol{w}^0 \in H^1(\Omega_s), \\ &\boldsymbol{v}_1^0,\ \boldsymbol{v}_2^0 \in L^2(\Omega_f), \qquad \boldsymbol{v}^0 \in L^2(\Omega_s), \quad \boldsymbol{g} \in L^2(\Omega \times (0,T)). \end{aligned} \quad (1.1\text{h})$$

После этого можно найти объёмные насыщения α_i жидких фаз по формулам

$$\alpha_1 = k_0 \left(c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 (1 - \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1) - c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 (1 - \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2) + c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 / m_2 \right),$$
$$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_f \times (0,T), \quad (1.1\text{i})$$

$$\alpha_2 = k_0 \left(c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 (1 - \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2) - c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 (1 - \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1) + c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 / m_1 \right),$$
$$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_f \times (0,T), \quad (1.1\text{j})$$

где $k_0 = \dfrac{m_1 m_2}{c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 m_2 + c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 m_1}$ (отметим, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$),

плотности ρ_i^0 $(i = 1, 2)$ вычисляются по формулам

$$\rho_i^0 = \rho_{if}^0 \left[1 - \frac{\alpha_i^0}{m_i} (m_1 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1 + m_2 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2) \right], \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_f \times (0,T), \quad (1.1\text{k})$$

давление p — по формуле

$$p = p_* - c_{\rho i}\rho_{if}^0 \frac{\alpha_i^0}{m_i} (m_1 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1 + m_2 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2), \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_f \times (0,T). \quad (1.1\text{l})$$

В уравнениях (1.1a) — (1.1l) дифференциальный оператор $\mathbb{D}(x,\cdot)$ — это симметрическая часть градиента, то есть $\mathbb{D}(x,\cdot) = (1/2)(\nabla_x + \nabla_x^T)$. Физические величины, входящие в эти уравнения означают следующее:

ρ_1^0 и ρ_2^0 — истинные плотности соответствующей жидкой фазы;

α_1^0 и α_2^0 — объёмное насыщение в жидких фазах;

$\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ — скорости в жидких фазах;

$\boldsymbol{g}$ — плотность распределённых массовых сил, а именно: ускорение свободного падения;

$\boldsymbol{F}_{12}$ — поверхностная сила в жидкости, являющаяся поверхностной силой трения $K_F(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$;

ν_1 и ν_2 — коэффициенты объёмной вязкости в жидких фазах;

μ_1 и μ_2 — коэффициенты сдвиговой вязкости в жидких фазах;

K_F — коэффициент поверхностного трения;

ρ_s — среднее постоянное значение плотности в твёрдой фазе в естественном состоянии покоя;

η и λ — коэффициенты объёмной и сдвиговой вязкости в твёрдой фазе;

p_* — среднее постоянное значение давления в естественном состоянии покоя;

m_1 и m_2 — средние постоянные значения объёмного насыщения в жидких фазах в естественном состоянии покоя.

Коэффициенты

ρ_{1f}^0 и ρ_{2f}^0 — истинные средние плотности соответствующих жидких фаз;

$c_{\rho 1}$ и $c_{\rho 2}$ — квадраты скоростей звука являются положительными константами.

$\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к Γ_0.

Выполняется условие, что ν_1, ν_2, μ_1, μ_2, K_F, η и λ — заданные и положительные, при этом $\nu_1 - (2/3)\mu_1 > 0$, $\nu_2 - (2/3)\mu_2 > 0$ и $\eta - (2/3)\lambda > 0$.

1.2. Понятие обобщённого решения задачи A

Решение задачи (1.1a) — (1.1l) понимается в обобщённом смысле. Определение обобщённого решения конструируется стандартным способом, аналогично [21].

Заменим вектор–функции w_i в уравнении (1.1a) новыми вектор–функциями

$$\boldsymbol{w}_c := \frac{\rho^0_{1f} m_1}{\rho^0_f}\boldsymbol{w}_1 + \frac{\rho^0_{2f} m_2}{\rho^0_f}\boldsymbol{w}_2, \tag{1.2a}$$

$$\boldsymbol{w}_r := \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1, \tag{1.2b}$$

которые обозначают скорость двухфазной жидкости и относительную скорость жидких фаз, соответственно. В (1.2a) — (1.2b) и в дальнейшем под ρ^0_f мы понимаем плотность двухфазной жидкости $\rho^0_f := \rho^0_{1f} m_1 + \rho^0_{2f} m_2$.

Тогда система уравнений (1.1a) преобразуется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\rho^0_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_c}{\partial t^2} &= \alpha^0_c \nabla_x \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_c + \Big[m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big) + m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big]\nabla_x \mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_c}{\partial t} \\
&\quad + 2(m_1\mu_1 + m_2\mu_2)\mathrm{div}_x \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_c}{\partial t}\Big) + \rho^0_f \boldsymbol{g} \\
&\quad + \frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}\Big\{\alpha^0_c(\rho^0_{1f} - \rho^0_{2f})\nabla_x \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_r + \Big[\rho^0_{1f}\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big) - \rho^0_{2f}\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big] \times \\
&\quad \times \nabla_x \mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_r}{\partial t} + 2(\rho^0_{1f}\mu_2 - \rho^0_{2f}\mu_1)\mathrm{div}_x \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_r}{\partial t}\Big)\Big\},
\end{aligned} \tag{1.3a}$$

$$
\begin{aligned}
&2\rho^0_{1f}\rho^0_{2f}\frac{m_1m_2}{\rho^0_f}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}_r}{\partial t^2}+(\rho^0_{2f}m_2-\rho^0_{1f}m_1)\frac{\partial^2\boldsymbol{w}_c}{\partial t^2}=\\
&\quad\frac{m_1m_2}{\rho^0_f}\Big\{\alpha^0_r(\rho^0_{1f}-\rho^0_{2f})\nabla_x\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}_r+\Big[\rho^0_{2f}\Big(\nu_1-\frac{2}{3}\mu_1\Big)+\rho^0_{1f}\Big(\nu_2-\frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big]\times\\
&\qquad\times\nabla_x\mathrm{div}_x\frac{\partial\boldsymbol{w}_r}{\partial t}+2(\rho^0_{2f}\mu_1+\rho^0_{1f}\mu_2)\mathrm{div}_x\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}_r}{\partial t}\Big)\Big\}-2K_F\frac{\partial\boldsymbol{w}_r}{\partial t}\\
&\qquad+\alpha^0_r\nabla_x\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}_c+\Big[m_2\Big(\nu_2-\frac{2}{3}\mu_2\Big)-m_1\Big(\nu_1-\frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big]\times\\
&\times\nabla_x\mathrm{div}_x\frac{\partial\boldsymbol{w}_c}{\partial t}+2(m_2\mu_2-m_1\mu_1)\mathrm{div}_x\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}_c}{\partial t}\Big)+(\rho^0_{2f}m_2-\rho^0_{1f}m_1)\boldsymbol{g},
\end{aligned}
\tag{1.3b}
$$

где $\alpha^0_c=c_{\rho2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2+c_{\rho1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1$ и $\alpha^0_r=c_{\rho2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2-c_{\rho1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1$.

Обозначим через $\chi(\boldsymbol{x})$ характеристическую функцию подобласти Ω_f:

$$
\chi(\boldsymbol{x}):=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in\Omega_f,\\ 0, & \boldsymbol{x}\notin\Omega_f.\end{cases}\tag{1.4}
$$

Введём в рассмотрение вектор–функции $\boldsymbol{u}_c$ и $\boldsymbol{u}_r$ следующего вида

$$
\boldsymbol{u}_c:=\chi\boldsymbol{w}_c+(1-\chi)\boldsymbol{w},\qquad(\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times(0,T),\tag{1.5a}
$$

$$
\boldsymbol{u}_r:=\chi\boldsymbol{w}_r,\qquad(\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times(0,T)\tag{1.5b}
$$

и “равномерную” плотность $\rho^0:=\chi\rho^0_f+(1-\chi)\rho_s$.

Начальные условия (1.1f)–(1.1h) в смысле новых переменных примут вид

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_c\big|_{t=0}&=\boldsymbol{u}^0_c:=\chi\Big(\frac{\rho^0_{1f}m_1}{\rho^0_f}\boldsymbol{w}^0_1+\frac{\rho^0_{2f}m_2}{\rho^0_f}\boldsymbol{w}^0_2\Big)+(1-\chi)\boldsymbol{w}^0, &(1.6a)\\
\boldsymbol{u}_r\big|_{t=0}&=\boldsymbol{u}^0_r:=\chi(\boldsymbol{w}^0_2-\boldsymbol{w}^0_1), &(1.6b)\\
\frac{\partial\boldsymbol{u}_c}{\partial t}\Big|_{t=0}&=\boldsymbol{v}^0_c:=\chi\Big(\frac{\rho^0_{1f}m_1}{\rho^0_f}\boldsymbol{v}^0_1+\frac{\rho^0_{2f}m_2}{\rho^0_f}\boldsymbol{v}^0_2\Big)+(1-\chi)\boldsymbol{v}^0, &(1.6c)\\
\frac{\partial\boldsymbol{u}_r}{\partial t}\Big|_{t=0}&=\boldsymbol{v}^0_r:=\chi(\boldsymbol{v}^0_2-\boldsymbol{v}^0_1). &(1.6d)
\end{aligned}
$$

Фиксируем произвольное $\tau\in(0,T)$. Умножим (1.3a) и (1.1b) на достаточно гладкую пробную вектор–функцию $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)$, определенную в Ω и равную нулю на $\partial\Omega$, и проинтегрируем по $\Omega_f \times (0,\tau)$ и $\Omega_s \times (0,\tau)$, соответственно. Интегрируем по частям относительно $\boldsymbol{x}$ и t. Ввиду соотношения на границе (1.1d), мы замечаем, что интегралы по границе Γ_0 зануляются, и, беря в рассмотрение начальные данные (1.6), мы приходим к интегральному равенству

$$\int_0^\tau \int_\Omega \Big\{ \rho^0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} - \chi \alpha_c^0 \mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_c \, \mathrm{div}_x \boldsymbol{\Phi}$$
$$-\chi \Big[m_1 \Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1 \Big) + m_2 \Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2 \Big) \Big] \mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t} \, \mathrm{div}_x \boldsymbol{\Phi} - (1-\chi) \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda \Big) \mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_c \mathrm{div}_x \boldsymbol{\Phi}$$
$$- 2\chi (m_1\mu_1 + m_2\mu_2) \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}\Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\Phi}) - 2(1-\chi)\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_c) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\Phi})$$
$$- \chi \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} \Big[\alpha_c^0 (\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0) \mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_r \mathrm{div}_x \boldsymbol{\Phi}$$
$$+ \Big(\rho_{1f}^0 \Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2 \Big) - \rho_{2f}^0 \Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1 \Big) \Big) \mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t} \mathrm{div}_x \boldsymbol{\Phi}$$
$$+ 2(\rho_{1f}^0 \mu_2 - \rho_{2f}^0 \mu_1) \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t}\Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\Phi}) \Big] + \rho^0 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\Phi} \Big\} \, d\boldsymbol{x} \, dt =$$
$$\int_\Omega \rho^0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \tau) \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \rho^0 \boldsymbol{v}_c^0 \cdot \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, 0) \, d\boldsymbol{x}. \quad (1.7a)$$

Аналогично, фиксируя произвольное $\tau \in (0,T)$, умножая (1.3b) на достаточно гладкую пробную вектор–функцию $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},t)$, обращающуюся на $\partial\Omega_f$ в ноль, интегрируем по частям по $\Omega_f \times (0,\tau)$ относительно $\boldsymbol{x}$ и t. Беря в рассмотрение начальные данные (1.6), мы получаем интегральное равенство

$$\int_0^\tau \int_{\Omega_f} \Big\{ 2\rho^0_{1f}\rho^0_{2f}\frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}\frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} + (\rho^0_{2f}m_2 - \rho^0_{1f}m_1)\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t}$$
$$- \frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}\Big[\alpha^0_r(\rho^0_{1f}-\rho^0_{2f})\mathrm{div}_x\boldsymbol{u}_r\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Psi}$$
$$+ \Big(\rho^0_{2f}\Big(\nu_1-\frac{2}{3}\mu_1\Big)+\rho^0_{1f}\Big(\nu_2-\frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big)\mathrm{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t}\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Psi}$$
$$+ 2(\rho^0_{2f}\mu_1+\rho^0_{1f}\mu_2)\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t}\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\Psi})\Big] - 2K_F\frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\Psi} - \alpha^0_r\mathrm{div}_x\boldsymbol{u}_c\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Psi}$$
$$- \Big(m_2\Big(\nu_2-\frac{2}{3}\mu_2\Big) - m_1\Big(\nu_1-\frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big)\mathrm{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Psi}$$
$$- 2(m_2\mu_2 - m_1\mu_1)\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\Psi}) + (\rho^0_{2f}m_2-\rho^0_{1f}m_1)\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\Psi}\Big\}\,d\boldsymbol{x}\,dt =$$
$$\int_{\Omega_f}\Big\{2\rho^0_{1f}\rho^0_{2f}\frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}\frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\tau) + (\rho^0_{2f}m_2-\rho^0_{1f}m_1)\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\tau)\Big\}\,d\boldsymbol{x}$$
$$- \int_{\Omega_f}\Big\{2\rho^0_{1f}\rho^0_{2f}\frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}\boldsymbol{v}^0_r\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},0) + (\rho^0_{2f}m_2-\rho^0_{1f}m_1)\boldsymbol{v}^0_c\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},0)\Big\}\,d\boldsymbol{x}. \quad (1.7b)$$

Теперь мы можем сформулировать понятие обобщённого решения для задачи (1.1a) — (1.1l).

Определение 1. *Обобщённым решением задачи (1.1a) — (1.1l) называется пара вектор–функций* $\{\boldsymbol{u}_c(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x},t)\}$, *удовлетворяющих*

1) условиям регулярности

$$\boldsymbol{u}_c,\ \boldsymbol{u}_r \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \quad (1.8a)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t},\ \frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \quad (1.8b)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega)), \quad (1.8c)$$

$$\chi\, div_x\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t},\ \chi\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}\Big) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad (1.8d)$$

2) начальным данным (1.6a) — (1.6d) ,

3) интегральному равенству (1.7a) для любого $\tau\in[0,T]$ *и произвольной* $\boldsymbol{\Phi}\in C^1(\Omega\times[0,T])$ *такой, что* $\boldsymbol{\Phi}|_{\partial\Omega}=0$,

4) *интегральному равенству (1.7b) для любого* $\tau \in [0, T]$ *и произвольной* $\mathbf{\Psi} \in C^1(\Omega_f \times [0, T])$ *такой, что* $\mathbf{\Psi}|_{\partial\Omega_f} = 0$,

5) *равенству* $(1 - \chi)\boldsymbol{u}_r = 0$ *п.в. в* Ω, *supp*$(\boldsymbol{u}_r) \subset \Omega_f$.

Теперь рассмотрим теорему о существовании и единственности обобщённого решения задачи (1.1a) — (1.1l), сформулированную и доказанную в [1].

Теорема 1. *Для любых заданных* $\boldsymbol{g} \in L^2(\Omega \times (0, T))$, $\boldsymbol{u}_c^0, \boldsymbol{u}_r^0 \in H_0^1(\Omega)$ *и* $\boldsymbol{v}_c^0, \boldsymbol{v}_r^0 \in L^2(\Omega)$, *существует единственное обобщённое решение* $\{\boldsymbol{u}_c, \boldsymbol{u}_r\}$ *задачи (1.1a) — (1.1l) в смысле определения 1.*

Более того, это решение удовлетворяет энергетическому тождеству

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho^0_{1f}m_1\int_\Omega \chi\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}(\tau)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\rho^0_{2f}m_2\int_\Omega \chi\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}(\tau)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\quad+\frac{1}{2}\rho_s\int_\Omega(1-\chi)\Big|\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}(\tau)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_1\int_\Omega \chi\,|div_x\boldsymbol{w}_1(\tau)|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_2\int_\Omega \chi\,|div_x\boldsymbol{w}_2(\tau)|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\Big(\eta-\frac{2}{3}\lambda\Big)\int_\Omega(1-\chi)\,|div_x\boldsymbol{u}_c(\tau)|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}\lambda\int_\Omega(1-\chi)\,|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}_c(\tau))|^2\,d\boldsymbol{x}+m_1\Big(\nu_1-\frac{2}{3}\mu_1\Big)\int_0^\tau\int_\Omega\chi\Big|div_x\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&+m_2\Big(\nu_2-\frac{2}{3}\mu_2\Big)\int_0^\tau\int_\Omega\chi\Big|div_x\frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt+m_1\mu_1\int_0^\tau\int_\Omega\chi\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}\Big)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&\quad+m_2\mu_2\int_0^\tau\int_\Omega\chi\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}\Big)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt+K_F\int_0^\tau\int_\Omega\chi\Big|\frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t}\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt=\\
&\quad\frac{1}{2}\rho^0_{1f}m_1\int_\Omega\chi|\boldsymbol{v}^0_1|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\rho^0_{2f}m_2\int_\Omega\chi|\boldsymbol{v}^0_2|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\int_\Omega(1-\chi)|\boldsymbol{v}^0_c|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\quad+\frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_1\int_\Omega\chi\,\big|div_x\boldsymbol{w}^0_1\big|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_2\int_\Omega\chi\,\big|div_x\boldsymbol{w}^0_2\big|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\quad+\frac{1}{2}\Big(\eta-\frac{2}{3}\lambda\Big)\int_\Omega(1-\chi)\,\big|div_x\boldsymbol{u}^0_c\big|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\lambda\int_\Omega(1-\chi)\,\big|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}^0_c)\big|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\qquad-\int_0^\tau\int_\Omega\chi c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_2\,div_x\boldsymbol{w}_2\,div_x\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&\qquad-\int_0^\tau\int_\Omega\chi c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_1\,div_x\boldsymbol{w}_1\,div_x\frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega\chi\rho^0_{1f}m_1\boldsymbol{g}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}\,dt+\int_0^\tau\int_\Omega\chi\rho^0_{2f}m_2\boldsymbol{g}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&\qquad\qquad+\int_0^\tau\int_\Omega(1-\chi)\rho_s\boldsymbol{g}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}\,dt \qquad (1.9a)
\end{aligned}
$$

и энергетическому неравенству

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\rho^0_{1f}m_1\int_\Omega \chi\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}(\tau)\Big|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{4}\rho^0_{2f}m_2\int_\Omega \chi\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}(\tau)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{4}\rho_s\int_\Omega (1-\chi)\Big|\frac{\partial \boldsymbol{u}_c}{\partial t}(\tau)\Big|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_1\int_\Omega \chi\,|div_x \boldsymbol{w}_1(\tau)|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_2\int_\Omega \chi\,|div_x \boldsymbol{w}_2(\tau)|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\Big(\eta-\frac{2}{3}\lambda\Big)\int_\Omega (1-\chi)\,|div_x \boldsymbol{u}_c(\tau)|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}\lambda\int_\Omega (1-\chi)\,|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}_c(\tau))|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}m_1\Big(\nu_1-\frac{2}{3}\mu_1\Big)\int_0^\tau\int_\Omega \chi\Big|div_x\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}\Big|^2 d\boldsymbol{x}\,dt\\
&+\frac{1}{2}m_2\Big(\nu_2-\frac{2}{3}\mu_2\Big)\int_0^\tau\int_\Omega \chi\Big|div_x\frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}\Big|^2 d\boldsymbol{x}\,dt + m_1\mu_1\int_0^\tau\int_\Omega \chi\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial t}\Big)\Big|^2 d\boldsymbol{x}\,dt\\
&+m_2\mu_2\int_0^\tau\int_\Omega \chi\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial t}\Big)\Big|^2 d\boldsymbol{x}\,dt + K_F\int_0^\tau\int_\Omega \chi\Big|\frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial t}\Big|^2 d\boldsymbol{x}\,dt \le\\
&\frac{1}{2}\rho^0_{1f}m_1\int_\Omega \chi|\boldsymbol{v}^0_1|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\rho^0_{2f}m_2\int_\Omega \chi|\boldsymbol{v}^0_2|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (1-\chi)|\boldsymbol{v}^0_c|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_1\int_\Omega \chi\,\big|div_x \boldsymbol{w}^0_1\big|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_2\int_\Omega \chi\,\big|div_x \boldsymbol{w}^0_2\big|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}\Big(\eta-\frac{2}{3}\lambda\Big)\int_\Omega (1-\chi)\,\big|div_x \boldsymbol{u}^0_c\big|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\lambda\int_\Omega (1-\chi)\,\big|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}^0_c)\big|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\rho^0_{1f}m_1\int_0^\tau\int_\Omega \chi|\boldsymbol{g}|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt + \rho^0_{2f}m_2\int_0^\tau\int_\Omega \chi|\boldsymbol{g}|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&+\rho_s\int_0^\tau\int_\Omega (1-\chi)|\boldsymbol{g}|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt + (e^{c_0\tau}-1)\Bigg(\frac{1}{2}\rho^0_{1f}m_1\int_\Omega \chi|\boldsymbol{v}^0_1|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}\rho^0_{2f}m_2\int_\Omega \chi|\boldsymbol{v}^0_2|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (1-\chi)|\boldsymbol{v}^0_c|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_1\int_\Omega \chi\,\big|div_x \boldsymbol{w}^0_1\big|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_2\int_\Omega \chi\,\big|div_x \boldsymbol{w}^0_2\big|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}\Big(\eta-\frac{2}{3}\lambda\Big)\int_\Omega (1-\chi)\,\big|div_x \boldsymbol{u}^0_c\big|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\lambda\int_\Omega (1-\chi)\,\big|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}^0_c)\big|^2\,d\boldsymbol{x}\Bigg)\\
&+c_0\int_0^\tau e^{c_0 t}\Bigg(\int_0^t\int_\Omega \rho^0|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},s)|^2 e^{-c_0 s}ds\Bigg)\,dt \quad \forall\,\tau\in[0,T]. \qquad (1.9b)
\end{aligned}$$

В (1.9a) и (1.9b) использованы следующие обозначения:

$$\boldsymbol{w}_1 := \boldsymbol{u}_c - \frac{\rho^0_{2f}m_2}{\rho^0_f}\boldsymbol{u}_r, \qquad \boldsymbol{w}_2 := \boldsymbol{u}_c + \frac{\rho^0_{1f}m_1}{\rho^0_f}\boldsymbol{u}_r, \qquad (1.10a)$$

$$\boldsymbol{w}^0_1 := \boldsymbol{u}^0_c - \frac{\rho^0_{2f}m_2}{\rho^0_f}\boldsymbol{u}^0_r, \qquad \boldsymbol{w}^0_2 := \boldsymbol{u}^0_c + \frac{\rho^0_{1f}m_1}{\rho^0_f}\boldsymbol{u}^0_r, \qquad (1.10b)$$

$$\boldsymbol{v}^0_1 := \boldsymbol{v}^0_c - \frac{\rho^0_{2f}m_2}{\rho^0_f}\boldsymbol{v}^0_r, \qquad \boldsymbol{v}^0_2 := \boldsymbol{v}^0_c + \frac{\rho^0_{1f}m_1}{\rho^0_f}\boldsymbol{v}^0_r, \qquad (1.10c)$$

$$
c_0 := \max\left\{\frac{(c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_2)^2}{c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_1 m_2\Big(\nu_1-\dfrac{2}{3}\mu_1\Big)};\ \frac{(c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_1)^2}{c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_1 m_2\Big(\nu_2-\dfrac{2}{3}\mu_2\Big)}\right\}. \quad (1.10d)
$$

1.3. Геометрия структуры

Геометрия областей Ω_s^ε и Ω_f^ε задана и зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ — отношение длины ребра ячейки к размеру всей структуры. Ввиду того, что Ω — единичный куб, считаем размер всей структуры равным единице, а размер ячейки, соответственно, ε. Формальное описание геометрии задается аналогично [22] и состоит в следующем. Сначала постулируется структура внутри шаблонной ячейки $\mathcal{Y} = (0,1)^3$: полагаем, что $\mathcal{Y}_s$ — "твёрдая часть" — это некоторое открытое подмножество $\mathcal{Y}$, а $\mathcal{Y}_f$ — "жидкая часть" — дополнение к его замыканию, т. е. $\mathcal{Y}_f = \mathcal{Y}\backslash\overline{\mathcal{Y}_s}$. Затем конструируется периодическое повторение $\mathcal{Y}_s$ по всему $\mathbb{R}^3$ и полагается $\mathcal{Y}_s^k = \mathcal{Y}_s + k$, $k \in \mathbb{R}^3$. Очевидно, получаемое множество $E_s = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{R}^3} \mathcal{Y}_s^k$ и дополнение его замыкания $E_f = \mathbb{R}^3\backslash\overline{E}_s$ являются открытыми множествами в $\mathbb{R}^3$. Накладываются следующие требования на $\mathcal{Y}_s$ и E_s:

- $\mathcal{Y}_s$ является связным множеством строго положительной меры с липшицевой границей; $\mathcal{Y}_f$ также имеет строго положительную меру в $\mathcal{Y}$;

- E_f и E_s являются открытыми множествами в $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей раздела между ними, локально расположенными по одну сторону от своих границ; E_s связно.

Исходя из этой конструкции, вводим рассмотренную регулярную ε–сетку, покрывающую Ω, каждая ячейка которой является кубом $\mathcal{Y}_i^\varepsilon$ с длиной ребра, равной ε. При этом для простоты считаем, что $\dfrac{1}{\varepsilon}$ является натуральным числом. Каждый куб $\mathcal{Y}_i^\varepsilon$, $\varepsilon = 1, 2, 3, ..., \dfrac{1}{\varepsilon^3}$, получается из шаблонной ячейки $\mathcal{Y}$ посредством линейного гомеоморфизма Π_i^ε, состоящего из сжатия в $\dfrac{1}{\varepsilon}$ раз и переноса. Теперь определяем $\mathcal{Y}_{si}^\varepsilon = \Pi_i^\varepsilon(\mathcal{Y}_s)$, $\mathcal{Y}_{fi}^\varepsilon = \Pi_i^\varepsilon(\mathcal{Y}_f)$ и, наконец,

$$\Omega_s^\varepsilon = \bigcup_{1 \le k \le \frac{1}{\varepsilon^3}} \mathcal{Y}_{sk}^\varepsilon, \quad \Omega_f^\varepsilon = \bigcup_{1 \le k \le \frac{1}{\varepsilon^3}} \mathcal{Y}_{fk}^\varepsilon, \quad \Gamma^\varepsilon = \overline{\Omega}_s^\varepsilon \cap \Omega_f^\varepsilon.$$

Очевидно, что $\Omega_f^\varepsilon = \varepsilon E_f \cap \Omega$ и $\Omega_s^\varepsilon = \varepsilon E_s \cap \Omega$.

В выбранной периодической области коэффициенты сдвиговой вязкости в жидких фазах принимаем зависящими от малого параметра ε следующим образом [8]:

$$\mu_1 = \varepsilon^2 \mu_1^0, \quad \mu_2 = \varepsilon^2 \mu_2^0, \tag{1.11}$$

где μ_1^0 и μ_2^0 — постоянные относительно ε.

Тогда выражения (1.9a) и (1.9b) примут вид:

$$\frac{1}{2}\rho_{1f}^0 m_1 \int_\Omega \chi^\varepsilon \Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}_1^\varepsilon}{\partial t}(\tau)\Big|^2 \, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\rho_{2f}^0 m_2 \int_\Omega \chi^\varepsilon \Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}_2^\varepsilon}{\partial t}(\tau)\Big|^2 \, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{1}{2}\rho_s \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)\Big|\frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}(\tau)\Big|^2 d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 \alpha_1^0 m_1 \int_\Omega \chi^\varepsilon \left|\mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1^\varepsilon(\tau)\right|^2 \, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 \alpha_2^0 m_2 \int_\Omega \chi^\varepsilon \left|\mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2^\varepsilon(\tau)\right|^2 \, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big) \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon) \left|\mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_c^\varepsilon(\tau)\right|^2 \, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon) \left|\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_c^\varepsilon(\tau))\right|^2 \, d\boldsymbol{x} + m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\mu_1^0\Big) \int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon \Big|\mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_1^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 d\boldsymbol{x}\, dt$$
$$+ m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\mu_2^0\Big) \int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon \Big|\mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_2^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 d\boldsymbol{x}\, dt$$
$$+ m_1\varepsilon^2\mu_1^0 \int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon \Big|\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_1^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big|^2 d\boldsymbol{x}\, dt + m_2\varepsilon^2\mu_2^0 \int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon \Big|\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_2^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big|^2 d\boldsymbol{x}\, dt$$
$$+ K_F \int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon \Big|\frac{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 d\boldsymbol{x}\, dt =$$
$$\frac{1}{2}\rho_{1f}^0 m_1 \int_\Omega \chi^\varepsilon |\boldsymbol{v}_1^{0\varepsilon}|^2 \, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\rho_{2f}^0 m_2 \int_\Omega \chi^\varepsilon |\boldsymbol{v}_2^0|^2 \, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)|\boldsymbol{v}_c^0|^2 \, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 \alpha_1^0 m_1 \int_\Omega \chi^\varepsilon \left|\mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1^{0\varepsilon}\right|^2 \, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 \alpha_2^0 m_2 \int_\Omega \chi^\varepsilon \left|\mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2^{0\varepsilon}\right|^2 \, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big) \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon) \left|\mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon}\right|^2 \, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\lambda \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon) \left|\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon})\right|^2 \, d\boldsymbol{x}$$
$$- \int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 \alpha_1^0 m_2 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_2^\varepsilon \mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_1^\varepsilon}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}\, dt$$
$$- \int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 \alpha_2^0 m_1 \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_1^\varepsilon \mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}_2^\varepsilon}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}\, dt$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon \rho_{1f}^0 m_1 \boldsymbol{g} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}_1^\varepsilon}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}\, dt + \int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon \rho_{2f}^0 m_2 \boldsymbol{g} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}_2^\varepsilon}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}\, dt$$
$$+ \int_0^\tau \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)\rho_s \boldsymbol{g} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}\, dt \quad (1.12a)$$

и

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\rho^0_{1f}m_1\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon_1}{\partial t}(\tau)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{4}\rho^0_{2f}m_2\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon_2}{\partial t}(\tau)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\quad+\frac{1}{4}\rho_s\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\Big|\frac{\partial \boldsymbol{u}^\varepsilon_c}{\partial t}(\tau)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_1\int_\Omega\chi^\varepsilon\left|\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^\varepsilon_1(\tau)\right|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_2\int_\Omega\chi^\varepsilon\left|\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^\varepsilon_2(\tau)\right|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\Big(\eta-\frac{2}{3}\lambda\Big)\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathrm{div}_x\boldsymbol{u}^\varepsilon_c(\tau)\right|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}\lambda\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}^\varepsilon_c(\tau))\right|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}m_1\Big(\nu_1-\frac{2}{3}\varepsilon^2\mu^0_1\Big)\int_0^\tau\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big|\mathrm{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon_1}{\partial t}\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&\quad+\frac{1}{2}m_2\Big(\nu_2-\frac{2}{3}\varepsilon^2\mu^0_2\Big)\int_0^\tau\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big|\mathrm{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon_2}{\partial t}\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&+m_1\varepsilon^2\mu^0_1\int_0^\tau\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon_1}{\partial t}\Big)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt+m_2\varepsilon^2\mu^0_2\int_0^\tau\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon_2}{\partial t}\Big)\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&\quad+K_F\int_0^\tau\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big|\frac{\partial \boldsymbol{u}^\varepsilon_r}{\partial t}\Big|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\leq\\
&\frac{1}{2}\rho^0_{1f}m_1\int_\Omega\chi^\varepsilon|\boldsymbol{v}^{0\varepsilon}_1|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\rho^0_{2f}m_2\int_\Omega\chi^\varepsilon|\boldsymbol{v}^{0\varepsilon}_2|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)|\boldsymbol{v}^{0\varepsilon}_c|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_1\int_\Omega\chi^\varepsilon\left|\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^{0\varepsilon}_1\right|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_2\int_\Omega\chi^\varepsilon\left|\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^{0\varepsilon}_2\right|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}\Big(\eta-\frac{2}{3}\lambda\Big)\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathrm{div}_x\boldsymbol{u}^{0\varepsilon}_c\right|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\lambda\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}^{0\varepsilon}_c)\right|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\quad+\rho^0_{1f}m_1\int_0^\tau\int_\Omega\chi^\varepsilon|\boldsymbol{g}|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt+\rho^0_{2f}m_2\int_0^\tau\int_\Omega\chi^\varepsilon|\boldsymbol{g}|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&\quad+\rho_s\int_0^\tau\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)|\boldsymbol{g}|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt+(e^{c_0\tau}-1)\Big(\frac{1}{2}\rho^0_{1f}m_1\int_\Omega\chi^\varepsilon|\boldsymbol{v}^{0\varepsilon}_1|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&\quad+\frac{1}{2}\rho^0_{2f}m_2\int_\Omega\chi^\varepsilon|\boldsymbol{v}^{0\varepsilon}_2|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)|\boldsymbol{v}^{0\varepsilon}_c|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}c_{\rho 1}\rho^0_{1f}\alpha^0_1 m_1\int_\Omega\chi^\varepsilon\left|\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^{0\varepsilon}_1\right|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}c_{\rho 2}\rho^0_{2f}\alpha^0_2 m_2\int_\Omega\chi^\varepsilon\left|\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^{0\varepsilon}_2\right|^2\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{1}{2}\Big(\eta-\frac{2}{3}\lambda\Big)\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathrm{div}_x\boldsymbol{u}^{0\varepsilon}_c\right|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\lambda\int_\Omega(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}^{0\varepsilon}_c)\right|^2\,d\boldsymbol{x}\Big)\\
&\quad+c_0\int_0^\tau e^{c_0 t}\Big(\int_0^t\int_\Omega\rho^0|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},s)|^2e^{-c_0 s}ds\Big)\,dt\quad\forall\,\tau\in[0,T].\qquad(1.12\text{b})
\end{aligned}
$$

Здесь и далее мы используем индекс ε для обозначения множеств и величин, зависящих от ε.

2. ПОНЯТИЕ ДВУХМАСШТАБНОЙ СХОДИМОСТИ

Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ основан на методе двухмасштабной сходимости. Сформулируем основные понятия и свойства этого метода.

Определение 2. *(Г. Нгуетсенг [3]) Последовательность* $\{\phi^\varepsilon\} \subset L^2(Q)$ *называется двухмасштабно сходящейся к пределу* $\phi \in L^2(Q \times Y)$ *тогда и только тогда, когда для любой 1–периодической по* $\boldsymbol{y}$ *функции* $\sigma = \sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\sigma \in C^2(Q \times Y)$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q \phi^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)\sigma(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\, d\boldsymbol{x}\, dt = \int_{Q\times Y} \phi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y}\, dt.$$

Существование и свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей устанавливаются в следующей фундаментальной теореме.

Теорема 2.

1) Всякая ограниченная в $L^2(Q)$ *последовательность содержит подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу, принадлежащему* $L^2(Q \times Y)$;

2) Если последовательность из $L^2(Q)$ *двухмасштабно сходится одновременно к двум функциям* $\phi_1, \phi_2 \in L^2(Q \times Y)$, *то* $\phi_1 = \phi_2$ *п.в. в* $(Q \times Y)$;

3) Пусть последовательности $\{\phi^\varepsilon\}$ *и* $\{\nabla_x \phi^\varepsilon\}$ *ограничены в* $L^2(Q)$. *Тогда существуют функции* $\phi \in L^2(Q)$ *и* $\psi \in L^2(Q\times Y)$ *и подпоследовательность из* $\{\phi^\varepsilon\}$ *такие, что* ψ *— 1–периодична по* $\vec{y}$, $\nabla_y \psi \in L^2(Q\times Y)$, *и* $\{\phi^\varepsilon\}$ *и* $\{\nabla_x \phi^\varepsilon\}$ *двухмасштабно сходятся к* ϕ *и* $\nabla_x \phi(\vec{x}, t) + \nabla_y \psi(\vec{x}, t, \vec{y})$ *соответственно;*

4) Пусть последовательности $\{\phi^\varepsilon\}$ *и* $\{\varepsilon \nabla_x \phi^\varepsilon\}$ *ограничены в* $L^2(Q)$. *Тогда существует функция* $\phi \in L^2(Q \times Y)$ *и подпоследовательность из* $\{\phi^\varepsilon\}$

такие, что $\{\phi^\varepsilon\}$ *и* $\{\varepsilon\nabla_x\phi^\varepsilon\}$ *двухмасштабно сходятся к* ϕ *и* $\nabla_y\phi(\vec{x},t,\vec{y})$, *соответственно.*

3. ПОСТРОЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ МАКРОСТРУКТУРЫ

3.1. Двухмасштабные пределы

Определим $\overline{\chi}(y)$ как характеристическую функцию E_f:

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{y}) := \begin{cases} 1, & \boldsymbol{y} \in E_f, \\ 0, & \boldsymbol{y} \notin E_f. \end{cases} \tag{3.1}$$

Тогда очевидно, что $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \bar{\chi}\left(\boldsymbol{x}/\varepsilon\right)$. В этом параграфе мы получим систему двухмасштабных усреднённых уравнений для уравнений задачи (1.1a) — (1.1l) путём устремления малого параметра ε к 0.

В силу энергетического неравенства (1.12b) последовательности $\{\boldsymbol{u}_c^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{u}_r^\varepsilon\}$, $\{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon/\partial t\}$, $\{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon/\partial t\}$, $\{\mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_c^\varepsilon\}$, $\{\mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_r^\varepsilon\}$, $\{(1-\chi^\varepsilon)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_c^\varepsilon)\}$, $\{(1-\chi^\varepsilon)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_r^\varepsilon)\}$ равномерно ограничены в $L^2(\Omega\times[0,T])$ по ε. Нет равномерных оценок по ε для $\{\chi^\varepsilon\mathbb{D}\left(x, \partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon/\partial t\right)\}$ и $\{\chi^\varepsilon\mathbb{D}\left(x, \partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon/\partial t\right)\}$. Следовательно, нет равномерной ограниченности $\{\chi^\varepsilon \boldsymbol{u}_c^\varepsilon\}$ и $\{\chi^\varepsilon \boldsymbol{u}_r^\varepsilon\}$ в $L^2(0,T; H^1(\Omega))$.

Лемма 1 (о продолжении, [13])**.** *В предположениях о геометрии области* Ω_s^ε*,* $\psi^\varepsilon \in W_2^1(\Omega_s^\varepsilon)$ *и* $\psi^\varepsilon = 0$ *на границе* $\partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega$*. Тогда существует функция* $\sigma^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ *такая, что её сужение на подобласть* Ω_s^ε *совпадает с* ψ^ε*, т. е.*

$$(1-\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))(\sigma^\varepsilon(\boldsymbol{x}) - \psi^\varepsilon(\boldsymbol{x})) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{3.2}$$

При этом

$$||\sigma^\varepsilon||_{2,\Omega} \leq C||\psi^\varepsilon||_{2,\Omega_s^\varepsilon}, \quad ||\nabla_x \sigma^\varepsilon||_{2,\Omega} \leq C||\nabla_x \psi^\varepsilon||_{2,\Omega_s^\varepsilon} \tag{3.3}$$

в которой постоянная C *зависит только от геометрии ячейки и не зависит от* ε*.*

По лемме о продолжении существуют функции $\hat{\boldsymbol{u}}_c^\varepsilon$, $\hat{\boldsymbol{u}}_r^\varepsilon \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ такие, что $\hat{\boldsymbol{u}}_c^\varepsilon = \boldsymbol{u}_c^\varepsilon$ и $\hat{\boldsymbol{u}}_r^\varepsilon = \boldsymbol{u}_r^\varepsilon$ в Ω_s^ε, и семейства $\{\hat{\boldsymbol{u}}_c^\varepsilon\}$ и $\{\hat{\boldsymbol{u}}_r^\varepsilon\}$ равномерно по ε ограничены в $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$. Исходя из этого и теории двухмасштабной сходимости следует, что существуют подпоследовательности из $\{\varepsilon > 0 \,|\, \varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}\}$ и функции $\hat{\boldsymbol{u}}_c^*,\ \hat{\boldsymbol{u}}_r^* \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ и $\boldsymbol{V}_c^{(1)},\ \boldsymbol{V}_r^{(1)},\ \boldsymbol{V}_c^{(2)} \in L^2(\Omega \times [0,T] \times \mathcal{Y})\}$ такие, что

$$
\begin{gathered}
\nabla_y \boldsymbol{V}_c^{(1)}, \nabla_y \boldsymbol{V}_r^{(1)} \in L^2(\Omega \times [0,T] \times \mathcal{Y}),\\
(1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))(\mathbb{D}(x,\hat{\boldsymbol{u}}_c^*) + \mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}_c^{(2)})) \in L^2(\Omega \times [0,T] \times \mathcal{Y}),\\
\bar{\chi}(\boldsymbol{y})\mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}\right), \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t}\right) \in L^2(\Omega \times [0,T] \times \mathcal{Y}),\\
\boldsymbol{V}_c^{(1)}, \boldsymbol{V}_r^{(1)}, \boldsymbol{V}_c^{(2)} \quad \text{— 1 – периодичны по } \boldsymbol{y},
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

и справедливы следующие предельные соотношения:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_c^\varepsilon &\to \boldsymbol{u}_c^* \text{ слабо в } L^2(\Omega \times [0,T]),\\
\hat{\boldsymbol{u}}_c^\varepsilon &\to \hat{\boldsymbol{u}}_c^* \text{ слабо в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
\boldsymbol{u}_r^\varepsilon &\to \boldsymbol{u}_r^* \text{ слабо в } L^2(\Omega \times [0,T]),\\
\hat{\boldsymbol{u}}_r^\varepsilon &\to \hat{\boldsymbol{u}}_r^* \text{ слабо в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi^\varepsilon \boldsymbol{u}_c^\varepsilon &\to \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{V}_c^{(1)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),\\
\chi^\varepsilon \boldsymbol{u}_r^\varepsilon &\to \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{V}_r^{(1)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),\\
(1-\chi^\varepsilon)\hat{\boldsymbol{u}}_c^\varepsilon &\to (1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\hat{\boldsymbol{u}}_c^*(\boldsymbol{x},t),\\
(1-\chi^\varepsilon)\hat{\boldsymbol{u}}_r^\varepsilon &\to (1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\hat{\boldsymbol{u}}_r^*(\boldsymbol{x},t),\\
\chi^\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t} &\to \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),\\
\chi^\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon}{\partial t} &\to \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),\\
(1-\chi^\varepsilon)\frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t} &\to (1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_c^*}{\partial t}(\boldsymbol{x},t),\\
(1-\chi^\varepsilon)\frac{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon}{\partial t} &\to (1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_r^*}{\partial t}(\boldsymbol{x},t),\\
(1-\chi^\varepsilon)\mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_c^\varepsilon &\to (1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))(\mathrm{div}_x \hat{\boldsymbol{u}}_c^*(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(2)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})),\\
\varepsilon\chi^\varepsilon \mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_c^\varepsilon &\to \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(1)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),\\
\varepsilon\chi^\varepsilon \mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_r^\varepsilon &\to \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_r^{(1)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),\\
\varepsilon\chi^\varepsilon \mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t} &\to \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),\\
\varepsilon\chi^\varepsilon \mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon}{\partial t} &\to \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),\\
(1-\chi^\varepsilon)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}_c^\varepsilon) &\to (1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\big(\mathbb{D}(x,\hat{\boldsymbol{u}}_c^*(\boldsymbol{x},t)) + \mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}_c^{(2)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))\big),\\
&\quad \text{в двухмасштабном смысле, при } \varepsilon \searrow 0. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Замечание 1. *Умножим уравнение* $(1-\chi^\varepsilon)\hat{\boldsymbol{u}}_r^\varepsilon = 0$ *на* $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x},t)\varphi_2\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)$, *где* $\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x},t)$ *— достаточно гладкая и* $\varphi_2(\boldsymbol{y})$ *—* $\mathcal{Y}$*–периодическая,* $supp(\varphi_2) \subset \mathcal{Y}_s$. *Тогда после интегрирования на* $\Omega \times [0,\tau]$, *получим*

$$\int_0^\tau \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon)\hat{\boldsymbol{u}}_r^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x},t)\varphi_2\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right) d\boldsymbol{x}dt = 0.$$

При переходе двухмасштабному пределу при $\varepsilon \searrow 0$ *имеем:*

$$\int_0^\tau \int_\Omega \hat{\boldsymbol{u}}_r^* \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x},t)\int_{\mathcal{Y}_s} \varphi_2(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}dt = 0.$$

В силу произвольности $\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x},t)$ *и* $\varphi_2(\boldsymbol{y})$ *функция* $\hat{\boldsymbol{u}}_r^*=0$ *в* $\Omega\times[0,T]$.

Пусть функции $\boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon},\boldsymbol{u}_r^{0\varepsilon}\in H_0^1(\Omega)$ и $\boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon},\boldsymbol{v}_r^{0\varepsilon}\in L^2(\Omega)$ удовлетворяют предельным отношениям

$$\boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon}\to\boldsymbol{u}_c^{0*},\quad \boldsymbol{u}_r^{0\varepsilon}\to\boldsymbol{u}_r^{0*} \text{ слабо в } H_0^1(\Omega), \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon}\to\boldsymbol{v}_c^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{v}_r^{0\varepsilon}\to\boldsymbol{v}_r^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \text{ в двухмасштабном смысле} \tag{3.7}$$

при $\varepsilon\searrow 0$ для некоторых функций $\boldsymbol{u}_c^{0*},\boldsymbol{u}_r^{0*}\in H_0^1(\Omega)$, и $\boldsymbol{v}_c^{0*},\boldsymbol{v}_r^{0*}\in L^2(\Omega\times\mathcal{Y})$.

Подставим тестовые функции следующего вида

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)+\varepsilon\boldsymbol{\psi}\Big(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)+\varepsilon^2\boldsymbol{\xi}\Big(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big),$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ — произвольные гладкие функции, равные нулю возле $\partial\Omega$, и $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ — $\mathcal{Y}$–периодические, $supp\,\boldsymbol{\psi}\subset\Omega\times(0,T)\times\mathcal{Y}_s$, $supp\,\boldsymbol{\xi}\subset\Omega\times(0,T)\times\mathcal{Y}_f$, в интегральные равенства (1.7a) и (1.7b).

Замечание 2. *По построению имеем, что* $(1-\chi^\varepsilon)\boldsymbol{u}_c^\varepsilon=(1-\chi^\varepsilon)\hat{\boldsymbol{u}}_c^\varepsilon$. *С помощью этого равенства перепишем выражения*

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}=\chi^\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}+(1-\chi^\varepsilon)\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}_c^\varepsilon}{\partial t},\quad div_x\boldsymbol{u}_c^\varepsilon=\chi^\varepsilon div_x\boldsymbol{u}_c^\varepsilon+(1-\chi^\varepsilon)div_x\hat{\boldsymbol{u}}_c^\varepsilon.$$

Имеют место следующие двухмасштабные пределы:

$$\int_0^\tau\int_\Omega\rho^0\frac{\partial\boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}\,dt\to \int_0^\tau\int_\Omega\int_{\mathcal{Y}}\rho^0\Big((1-\bar\chi(\boldsymbol{y}))\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}_c^*}{\partial t}+\bar\chi(\boldsymbol{y})\frac{\partial\boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}\Big)\cdot\boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{3.8}$$

$$\int_0^\tau\int_\Omega-\alpha_c^0\mathrm{div}_x\boldsymbol{u}_c^\varepsilon\,\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Phi}\,d\boldsymbol{x}\,dt\to \int_0^\tau\int_\Omega\int_{\mathcal{Y}}-\alpha_c^0\Big(\bar\chi(\boldsymbol{y})\mathrm{div}_y\boldsymbol{V}_c^{(1)}\mathrm{div}_y\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})+(1-\bar\chi(\boldsymbol{y}))(\mathrm{div}_x\hat{\boldsymbol{u}}_c^*(\boldsymbol{x},t)+ \mathrm{div}_y\boldsymbol{V}_c^{(2)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))\cdot(\mathrm{div}_x\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)+\mathrm{div}_y\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))\Big)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{3.9}$$

$$\int_0^\tau \int_\Omega -\chi^\varepsilon (m_1\nu_1 + m_2\nu_2)\mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}\mathrm{div}_x \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x}\, dt \to \\ \int_0^\tau \int_\Omega \int_{\mathcal{Y}_f} -(m_1\nu_1 + m_2\nu_2)\mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t} \cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}\, dt. \quad (3.10)$$

$$\int_0^\tau \int_\Omega -(1-\chi^\varepsilon)\Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_c^\varepsilon\, \mathrm{div}_x \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x}\, dt \to \\ \int_0^\tau \int_\Omega \int_{\mathcal{Y}_s} -\Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)(\mathrm{div}_x \hat{\boldsymbol{u}}_c^* + \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(2)}) \cdot (\mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) \\ + \mathrm{div}_y \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}))\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}\, dt. \quad (3.11)$$

$$\int_0^\tau \int_\Omega -2(1-\chi^\varepsilon)\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_c^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\Phi})\, d\boldsymbol{x}\, dt \to \\ \int_0^\tau \int_\Omega \int_{\mathcal{Y}_s} -2\lambda(\mathbb{D}(x, \hat{\boldsymbol{u}}_c^*) + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}_c^{(2)})) : (\mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)) \\ + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})))\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}\, dt. \quad (3.12)$$

$$\int_0^\tau \int_\Omega -\chi^\varepsilon \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\alpha_c^0(\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0)\mathrm{div}_x \boldsymbol{u}_r^\varepsilon\, \mathrm{div}_x \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x}\, dt \to \\ \int_0^\tau \int_\Omega \int_{\mathcal{Y}_f} -\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\alpha_c^0(\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0)\mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_r^{(1)} \cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}\, dt. \quad (3.13)$$

$$\int_0^\tau \int_\Omega -\chi^\varepsilon \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\Big(\rho_{1f}^0\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\mu_2^0\Big) - \rho_{2f}^0\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\mu_1^0\Big)\Big)\mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon}{\partial t}\mathrm{div}_x \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x}\, dt \to \\ \int_0^\tau \int_\Omega \int_{\mathcal{Y}_f} -\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}(\rho_{1f}^0\nu_2 - \rho_{2f}^0\nu_1)\mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t} \cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}\, dt. \quad (3.14)$$

$$\int_0^\tau \int_\Omega -\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\rho^0 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x}\, dt \to \int_0^\tau \int_\Omega \int_{\mathcal{Y}} -\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\rho^0 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}\, dt. \quad (3.15)$$

$$\int_\Omega \rho^0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \boldsymbol{\Phi}(\tau)\, d\boldsymbol{x} \to \\ \int_\Omega \int_{\mathcal{Y}} \rho^0 \Big((1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_c^*}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau) + \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau)\Big) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}. \quad (3.16)$$

$$\int_\Omega -\rho^0 \boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon}\cdot \boldsymbol{\Phi}|_{t=o}\,d\boldsymbol{x} \to \int_\Omega\int_{\mathcal{Y}} -\rho^0 \boldsymbol{v}_c^{0*}\cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}. \tag{3.17}$$

$$\int_0^\tau\int_\Omega 2\chi^\varepsilon \rho_{1f}^0\rho_{2f}^0\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}\frac{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}\,dt \to \int_0^\tau\int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} 2\rho_{1f}^0\rho_{2f}^0\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}\frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{3.18}$$

$$\int_0^\tau\int_\Omega \chi^\varepsilon(\rho_{2f}^0 m_2-\rho_{1f}^0 m_1)\frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}\,dt \to \int_0^\tau\int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} (\rho_{2f}^0 m_2-\rho_{1f}^0 m_1)\frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{3.19}$$

$$\int_0^\tau\int_\Omega -\chi^\varepsilon\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}\alpha_r^0(\rho_{1f}^0-\rho_{2f}^0)\mathrm{div}_x\boldsymbol{u}_r^\varepsilon\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Psi}\,d\boldsymbol{x}\,dt \to \int_0^\tau\int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} -\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}\alpha_r^0(\rho_{1f}^0-\rho_{2f}^0)\mathrm{div}_y\boldsymbol{V}_r^{(1)}\cdot\mathrm{div}_y\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{3.20}$$

$$\int_0^\tau\int_\Omega -\chi^\varepsilon\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}\Big(\rho_{2f}^0\Big(\nu_1-\frac{2}{3}\varepsilon^2\mu_1^0\Big)+\rho_{1f}^0\Big(\nu_2-\frac{2}{3}\varepsilon^2\mu_2^0\Big)\Big)\mathrm{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon}{\partial t}\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Psi}\,d\boldsymbol{x}\,dt \to \int_0^\tau\int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} -\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}(\rho_{2f}^0\nu_1+\rho_{1f}^0\nu_2)\mathrm{div}_y\frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t}\cdot\mathrm{div}_y\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{3.21}$$

$$\int_0^\tau\int_\Omega -2\chi^\varepsilon K_F\frac{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\Psi}\,d\boldsymbol{x}\,dt \to \int_0^\tau\int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} -2K_F\frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{3.22}$$

$$\int_0^\tau\int_\Omega -\chi^\varepsilon\alpha_r^0\mathrm{div}_x\boldsymbol{u}_c^\varepsilon\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Psi}\,d\boldsymbol{x}\,dt \to \int_0^\tau\int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} -\alpha_r^0\mathrm{div}_y\boldsymbol{V}_c^{(1)}\cdot\mathrm{div}_y\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \tag{3.23}$$

$$\int_0^\tau \int_\Omega -\chi^\varepsilon\Big(m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\mu_2^0\Big) - m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\varepsilon^2\mu_1^0\Big)\Big)\mathrm{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}\mathrm{div}_x\boldsymbol{\Psi}\,d\boldsymbol{x}\,dt \to \\ \int_0^\tau \int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} -(m_2\nu_2 - m_1\nu_1)\mathrm{div}_y\frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}\mathrm{div}_y\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \quad (3.24)$$

$$\int_0^\tau \int_\Omega \chi^\varepsilon(\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1)\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\Psi}\,d\boldsymbol{x}\,dt \to \\ \int_0^\tau \int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f}(\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1)\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}\,dt. \quad (3.25)$$

$$\int_\Omega 2\chi^\varepsilon\rho_{1f}^0\rho_{2f}^0\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}\frac{\partial \boldsymbol{u}_r^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\boldsymbol{x} \to \\ \int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} 2\rho_{1f}^0\rho_{2f}^0\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}\frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}. \quad (3.26)$$

$$\int_\Omega \chi^\varepsilon(\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1)\frac{\partial \boldsymbol{u}_c^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\boldsymbol{x} \to \\ \int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f}(\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1)\frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}. \quad (3.27)$$

$$\int_\Omega -2\chi^\varepsilon\rho_{1f}^0\rho_{2f}^0\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}\boldsymbol{v}_r^{0\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x} \to \\ \int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} -2\rho_{1f}^0\rho_{2f}^0\frac{m_1m_2}{\rho_f^0}\boldsymbol{v}_r^{0*}\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}. \quad (3.28)$$

$$\int_\Omega -\chi^\varepsilon(\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1)\boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x} \to \\ \int_\Omega\int_{\mathcal{Y}_f} -(\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1)\boldsymbol{v}_c^{0*}\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{x}. \quad (3.29)$$

Тогда предельные уравнения (1.7a) и (1.7b) принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_\Omega \int_{\mathcal{Y}} \Big[\rho^0 \Big((1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_c^*}{\partial t} + \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}\Big)\cdot \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{x},t) \\
&\qquad - \alpha_c^0 \Big(\bar{\chi}(\boldsymbol{y})\mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(1)} \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) + \\
&(1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))(\mathrm{div}_x \hat{\boldsymbol{u}}_c^*(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(2)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))\cdot(\mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}_y \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))\Big) \\
&\qquad - \bar{\chi}(\boldsymbol{y})(m_1\nu_1 + m_2\nu_2)\mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}\cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \\
&- (1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)(\mathrm{div}_x \hat{\boldsymbol{u}}_c^* + \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(2)})\cdot(\mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{div}_y \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})) \\
&- 2(1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\lambda(\mathbb{D}(x,\hat{\boldsymbol{u}}_c^*) + \mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}_c^{(2)})) : (\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)) + \mathbb{D}(y,\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))) \\
&\qquad - \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\alpha_c^0(\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0)\mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_r^{(1)}\cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \\
&\qquad - \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}(\rho_{1f}^0\nu_2 - \rho_{2f}^0\nu_1)\mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t}\cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \\
&\qquad - \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\rho^0 \boldsymbol{g}\cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)\Big]\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}\, dt = \\
&\int_\Omega \int_{\mathcal{Y}} \Big[\rho^0 \Big((1-\bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_c^*}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau) + \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)\Big)\cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\tau) \\
&\qquad - \rho^0 \boldsymbol{v}_c^{0*}\cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\Big]\, d\boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{x}, \quad (3.30)
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^\tau \int_\Omega \int_{\mathcal{Y}_f} \Big\{ 2\rho_{1f}^0 \rho_{2f}^0 \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{x}, t) + (\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1) \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{x}, t)
$$

$$
- \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} \Big\{ \alpha_r^0 (\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0) \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_r^{(1)} \cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})
$$

$$
+ (\rho_{2f}^0 \nu_1 + \rho_{1f}^0 \nu_2) \mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t} \cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \Big\} - 2K_F \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)
$$

$$
- \alpha_r^0 \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(1)} \cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) - (m_2 \nu_2 - m_1 \nu_1) \mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t} \mathrm{div}_y \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})
$$

$$
+ (\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1) \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) \Big\} \, d\boldsymbol{y} \, d\boldsymbol{x} \, dt =
$$

$$
\int_\Omega \int_{\mathcal{Y}_f} \Big\{ 2\rho_{1f}^0 \rho_{2f}^0 \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t} (\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \tau)
$$

$$
+ (\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1) \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t} (\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \tau)
$$

$$
- 2\rho_{1f}^0 \rho_{2f}^0 \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} \boldsymbol{v}_r^{0*} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, 0) - (\rho_{2f}^0 m_2 - \rho_{1f}^0 m_1) \boldsymbol{v}_c^{0*} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, 0) \Big\} \, d\boldsymbol{y} \, d\boldsymbol{x}. \quad (3.31)
$$

Выберем пробные функции следующим образом: $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) \neq 0$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = 0$. В результате получим макроскопическое уравнение из равенства (3.30) в силу произвольности $\boldsymbol{\varphi}$:

$$
\rho_s |\mathcal{Y}_s| \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{u}}_c^*}{\partial t^2} + \rho_f^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \big\langle \boldsymbol{V}_c^{(1)} \big\rangle_{\mathcal{Y}_f} - \Big(\eta - \frac{2}{3} \lambda \Big) \Big[|\mathcal{Y}_s| \nabla_x \mathrm{div}_x \hat{\boldsymbol{u}}_c^* + \nabla_x \big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(2)} \big\rangle_{\mathcal{Y}_s} \Big]
$$

$$
- 2\lambda \mathrm{div}_x \Big[|\mathcal{Y}_s| \mathbb{D}(x, \hat{\boldsymbol{u}}_c^*) + \big\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}_c^{(2)}) \big\rangle_{\mathcal{Y}_s} \Big] + \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} (\rho_f^0 |\mathcal{Y}_f| + \rho_s |\mathcal{Y}_s|) \boldsymbol{g} = 0. \quad (3.32)
$$

При $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \neq 0$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = 0$ в силу произвольности пробных функций выберем $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{\psi}_2(\boldsymbol{y})$, тогда получаем первое микроскопическое уравнение:

$$
\int_{\mathcal{Y}_s} \Big[\alpha_c^0 \nabla_y \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(2)} + \Big(\eta - \frac{2}{3} \lambda \Big) \nabla_y \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(2)} + 2\lambda \mathrm{div}_y \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}_c^{(2)}) \Big] \boldsymbol{\psi}_2(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} =
$$

$$
\int_{\partial \mathcal{Y}_s \setminus \partial \mathcal{Y}} \Big[\Big(\alpha_c^0 \Big(\mathrm{div}_x \hat{\boldsymbol{u}}_c^* + \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(2)} \Big) + \Big(\eta - \frac{2}{3} \lambda \Big) \Big(\mathrm{div}_x \hat{\boldsymbol{u}}_c^* + \mathrm{div}_y \boldsymbol{V}_c^{(2)} \Big) \Big)
$$

$$
+ 2\lambda \Big(\mathbb{D}(x, \hat{\boldsymbol{u}}_c^*) + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}_c^{(2)}) \Big) : \mathbb{I} \Big] \boldsymbol{n}(\sigma_y) \cdot \boldsymbol{\psi}_2(\sigma_y) \, d\sigma_y. \quad (3.33)
$$

При $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \neq 0$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = 0$ из (3.30) выберем $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\xi}_1(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\xi}_2(\boldsymbol{y})$, тогда получаем второе микроскопическое уравнение:

$$\int_{\mathcal{Y}_f} \nabla_y \mathrm{div}_y \Big[\alpha_c^0 \boldsymbol{V}_c^{(1)} + (m_1\nu_1 + m_2\nu_2) \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t} + \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} \Big(\alpha_c^0 (\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0) \boldsymbol{V}_r^{(1)} + (\rho_{1f}^0 \nu_2 - \rho_{2f}^0 \nu_1) \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t} \Big) \Big] \boldsymbol{\xi}_2(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} =$$
$$\int_{\partial\mathcal{Y}_f} \mathrm{div}_y \Big[\alpha_c^0 \boldsymbol{V}_c^{(1)} + (m_1\nu_1 + m_2\nu_2) \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t} + \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} \Big(\alpha_c^0 (\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0) \boldsymbol{V}_r^{(1)} + (\rho_{1f}^0 \nu_2 - \rho_{2f}^0 \nu_1) \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t} \Big) \Big] \boldsymbol{n}(\sigma_y) \cdot \boldsymbol{\xi}_2(\sigma_y)\, d\sigma_y. \tag{3.34}$$

Из соотношения (3.31) следует третье микроскопическое уравнение:

$$\int_{\mathcal{Y}_f} \nabla_y \mathrm{div}_y \Big[\alpha_r^0 \boldsymbol{V}_c^{(1)} + (m_2\nu_2 - m_1\nu_1) \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t} + \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} \Big(\alpha_r^0 (\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0) \boldsymbol{V}_r^{(1)} + (\rho_{2f}^0 \nu_1 + \rho_{1f}^0 \nu_2) \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t} \Big) \Big] \boldsymbol{\xi}_2(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} =$$
$$\int_{\partial\mathcal{Y}_f} \mathrm{div}_y \Big[\alpha_r^0 \boldsymbol{V}_c^{(1)} + (m_2\nu_2 - m_1\nu_1) \frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t} + \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0} \Big(\alpha_r^0 (\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0) \boldsymbol{V}_r^{(1)} + (\rho_{2f}^0 \nu_1 + \rho_{1f}^0 \nu_2) \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t} \Big) \Big] \boldsymbol{n}(\sigma_y) \cdot \boldsymbol{\xi}_2(\sigma_y)\, d\sigma_y. \tag{3.35}$$

Систему замыкает уравнение

$$\boldsymbol{u}_r^* = \left\langle \boldsymbol{V}_r^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{Y}_f} \tag{3.36}$$

в силу единственности предела согласно теореме Нгуетсенга.

В выражениях выше учитывается тот факт, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_c^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}_c^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad \text{п.в. в } \Omega \times \mathcal{Y}, \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_r^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}_r^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad \text{п.в. в } \Omega \times \mathcal{Y}. \tag{3.38}$$

Это следует из теоремы 2, п. 2).

3.2. Асимптотическая декомпозиция

Разрешим уравнения (3.33), (3.34) и (3.35) относительно функций $\boldsymbol{V}_c^{(1)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{V}_r^{(1)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{V}_c^{(2)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, считая при этом $\hat{\boldsymbol{u}}_c^*(\boldsymbol{x}, t)$ заданной. Для этого применим метод разделения переменных. Сперва сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_c^{(1)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) &= \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\Big(\frac{\rho_{1f}^0 m_1}{\rho_f^0}\boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) + \frac{\rho_{2f}^0 m_2}{\rho_f^0}\boldsymbol{U}_2(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\Big), && (3.39)\\
\boldsymbol{V}_r^{(1)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) &= \bar{\chi}(\boldsymbol{y})\Big(\boldsymbol{U}_2(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\Big), && (3.40)\\
\boldsymbol{V}_c^{(2)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) &= (1 - \bar{\chi}(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{U}_3(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}). && (3.41)
\end{aligned}$$

Будем искать $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, $\boldsymbol{U}_3$ в виде:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) &= \sum_{i,j=1}^{3}\Big[\frac{\partial \hat{u}_{c,i}^*}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}) && (3.42)\\
&\qquad + \int_0^t \frac{\partial \hat{u}_{c,i}^*}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, \tau)\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y}, t-\tau)\, d\tau\Big], && (3.43)\\
\boldsymbol{U}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) &= \sum_{i,j=1}^{3}\Big[\frac{\partial \hat{u}_{c,i}^*}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y}) && (3.44)\\
&\qquad + \int_0^t \frac{\partial \hat{u}_{c,i}^*}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, \tau)\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y}, t-\tau)\, d\tau\Big], && (3.45)\\
\boldsymbol{U}_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) &= \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial \hat{u}_{c,i}^*}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{Z}_5^{ij}(\boldsymbol{y}), && (3.46)
\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (3.33) и после некоторых преобразований получаем

$$\sum_{i,j,m=1}^{3}\int_{\mathcal{Y}_s}\Big\{\Big(\alpha_c^0 + \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\Big)\frac{\partial^2 Z_{5,m}^{ij}}{\partial y_k y_m} + \lambda\Big(\frac{\partial^2 Z_{5,k}^{ij}}{\partial y_k y_m} + \frac{\partial^2 Z_{5,m}^{ij}}{\partial y_k^2}\Big)\Big\}\psi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} =$$

$$\sum_{i,j,m=1}^{3}\int_{\partial\mathcal{Y}_s\setminus\partial\mathcal{Y}}\Big\{\Big(\alpha_c^0 + \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\Big)\Big(\delta^{ij} + \frac{\partial^2 Z_{5,m}^{ij}}{\partial y_k y_m}\Big) +$$

$$\lambda\Big(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk} + \frac{\partial^2 Z_{5,k}^{ij}}{\partial y_k y_m} + \frac{\partial^2 Z_{5,m}^{ij}}{\partial y_k^2}\Big)\Big\}\psi(\boldsymbol{y})n_k(\sigma_y)\, d\sigma_y, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.47)$$

Интегральные равенства (3.47) будут выполнены при любых $\psi(\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{Z}_5^{ij}(\boldsymbol{y})$ служит решением следующей задачи.

Задача C 1. *Вектор–функция* $\boldsymbol{Z}_5^{ij}(\boldsymbol{y}) \in (W_2^1(\mathcal{Y}_s))^3$ $(i,j=1,2,3)$ *находится из системы*

$$\Big(\alpha_c^0 + \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\Big)\nabla_y div_y \boldsymbol{Z}_5^{ij} + 2\lambda div_y \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_5^{ij}) = 0 \quad \text{на } \mathcal{Y}_s, \tag{3.48a}$$

$$\Big[\Big(\alpha_c^0 + \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\Big)\Big(\delta^{ij}\mathbb{I} + div_y \boldsymbol{Z}_5^{ij}\mathbb{I}\Big) + 2\lambda\Big(\mathbb{J}^{ij} + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_5^{ij})\Big)\Big] \cdot \boldsymbol{n}(\sigma_y) = 0 \quad \text{на } \partial\mathcal{Y}_s \setminus \partial\mathcal{Y}, \tag{3.48b}$$

$$\boldsymbol{Z}_5^{ij}(\boldsymbol{y}) \ \text{— 1–периодическая.} \tag{3.48c}$$

Из (3.34) и (3.35) получим

$$\sum_{i,j,m=1}^{3}\Big\{\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big[\alpha_c^0\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{1,m}}{\partial y_m}+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{3,m}}{\partial y_m}\Big)+C_1\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},0)$$

$$+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},0)\Big)+BC_2\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{3,m}}{\partial y_m}-\frac{\partial Z^{ij}_{1,m}}{\partial y_m}\Big)+BC_3\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},0)$$

$$-\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},0)\Big)\Big]\psi_k\,d\boldsymbol{y}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big[C_1\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{1,m}}{\partial y_m}+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{3,m}}{\partial y_m}\Big)$$

$$+BC_3\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{3,m}}{\partial y_m}-\frac{\partial Z^{ij}_{1,m}}{\partial y_m}\Big)\Big]\psi_k\,d\boldsymbol{y}+\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\int_0^t\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}\Big[\alpha_c^0\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)$$

$$+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\;+C_1\Big(A_1\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)+A_2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)$$

$$+BC_2\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)-\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)$$

$$+BC_3\Big(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\Big]\psi_k\,d\tau\,d\boldsymbol{y}\Big\}=$$

$$\sum_{i,j,m=1}^{3}\Big\{\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\int\limits_{\partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y}}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[\alpha_c^0\Big(A_1Z^{ij}_{1,m}+A_2Z^{ij}_{3,m}\Big)+C_1\Big(A_1Z^{ij}_{2,m}(\boldsymbol{y},0)+A_2Z^{ij}_{4,m}(\boldsymbol{y},0)\Big)$$

$$+BC_2\Big(Z^{ij}_{3,m}-Z^{ij}_{1,m}\Big)+BC_3\Big(Z^{ij}_{4,m}(\boldsymbol{y},0)-Z^{ij}_{2,m}(\boldsymbol{y},0)\Big)\Big]n_k(\sigma_y)\psi_k(\sigma_y)\,d\sigma_y$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\int\limits_{\partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y}}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[C_1\Big(A_1Z^{ij}_{1,m}+A_2Z^{ij}_{3,m}\Big)$$

$$+BC_3\Big(Z^{ij}_{3,m}-Z^{ij}_{1,m}\Big)\Big]n_k(\sigma_y)\psi_k(\sigma_y)\,d\sigma_y$$

$$+\int\limits_{\partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y}}\int_0^t\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\tau)\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[\alpha_c^0\Big(A_1Z^{ij}_{2,m}(\boldsymbol{y},t-\tau)+A_2Z^{ij}_{4,m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)$$

$$+C_1\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)+BC_2\Big(Z^{ij}_{4,m}(\boldsymbol{y},t-\tau)-Z^{ij}_{2,m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)$$

$$+BC_3\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)-\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\Big]n_k(\sigma_y)\psi_k(\sigma_y)\,d\tau\,d\sigma_y\Big\}=0,$$

$$k=1,2,3. \quad (3.49)$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j,m=1}^{3}\Big\{\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big[\alpha_r^0\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{1,m}}{\partial y_m}+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{3,m}}{\partial y_m}\Big)+C_4\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},0)\\
&\qquad+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},0)\Big)+BC_5\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{3,m}}{\partial y_m}-\frac{\partial Z^{ij}_{1,m}}{\partial y_m}\Big)\\
&\qquad+BC_6\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},0)-\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},0)\Big)\Big]\psi_k\,d\boldsymbol{y}\\
&+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\frac{\partial}{\partial y_k}\Big[C_4\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{1,m}}{\partial y_m}+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{3,m}}{\partial y_m}\Big)+BC_6\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{3,m}}{\partial y_m}-\frac{\partial Z^{ij}_{1,m}}{\partial y_m}\Big)\Big]\psi_k\,d\boldsymbol{y}\\
&+\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\int_0^t\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}\Big[\alpha_r^0\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\\
&\qquad+C_4\Big(A_1\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)+A_2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\\
&\qquad+BC_5\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)-\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)+BC_6\Big(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\\
&\qquad-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial y_m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\Big]\psi_k\,d\tau\,d\boldsymbol{y}\Big\}=\\
&\sum_{i,j,m=1}^{3}\Big\{\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\int\limits_{\partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y}}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[\alpha_r^0\Big(A_1Z^{ij}_{1,m}+A_2Z^{ij}_{3,m}\Big)\\
&\qquad+C_4\Big(A_1Z^{ij}_{2,m}(\boldsymbol{y},0)+A_2Z^{ij}_{4,m}(\boldsymbol{y},0)\Big)+BC_5\Big(Z^{ij}_{3,m}-Z^{ij}_{1,m}\Big)\\
&\qquad+BC_6\Big(Z^{ij}_{4,m}(\boldsymbol{y},0)-Z^{ij}_{2,m}(\boldsymbol{y},0)\Big)\Big]n_k(\sigma_y)\psi_k(\sigma_y)\,d\sigma_y\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\int\limits_{\partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y}}\frac{\partial}{\partial y_m}\Big[C_4\Big(A_1Z^{ij}_{1,m}+A_2Z^{ij}_{3,m}\Big)\\
&\qquad+BC_6\Big(Z^{ij}_{3,m}-Z^{ij}_{1,m}\Big)\Big]n_k(\sigma_y)\psi_k(\sigma_y)\,d\sigma_y\\
&+\int\limits_{\partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y}}\int_0^t\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\tau)\frac{\partial}{\partial y_k}\Big[\alpha_r^0\Big(A_1Z^{ij}_{2,m}(\boldsymbol{y},t-\tau)+A_2Z^{ij}_{4,m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\\
&\qquad+C_4\Big(A_1\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)+A_2\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\\
&\qquad+BC_5\Big(Z^{ij}_{4,m}(\boldsymbol{y},t-\tau)-Z^{ij}_{2,m}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\\
&\qquad+BC_6\Big(\frac{\partial Z^{ij}_{4,m}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)-\frac{\partial Z^{ij}_{2,m}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\Big]n_k(\sigma_y)\psi_k(\sigma_y)\,d\tau\,d\sigma_y\Big\},\\
&\qquad\qquad k=1,2,3. \quad (3.50)
\end{aligned}
$$

Здесь коэффициенты A_1, A_2, B, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, D означают следующее:

$A_1 = \dfrac{\rho^0_{1f} m_1}{\rho^0_f}$, $A_2 = \dfrac{\rho^0_{2f} m_2}{\rho^0_f}$, $B = \dfrac{m_1 m_2}{\rho^0_f}$, $C_1 = (m_1\nu_1 + m_2\nu_2)$, $C_2 = \alpha^0_c(\rho^0_{1f} - \rho^0_{2f})$, $C_3 = (\rho^0_{1f}\nu_2 - \rho^0_{2f}\nu_1)$, $C_4 = (m_2\nu_2 - m_1\nu_1)$, $C_5 = \alpha^0_r(\rho^0_{1f} - \rho^0_{2f})$, $C_6 = (\rho^0_{2f}\nu_1 + \rho^0_{1f}\nu_2)$, $D = (\rho^0_f|\mathcal{Y}_f| + \rho_s|\mathcal{Y}_s|)$.

Находим $\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0)$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},0)$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},t)$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},t)$ как результат последовательного решения следующих задач C2–C4.

Задача С 2. *Вектор–функции* $\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y}) \in (W^1_2(\mathcal{Y}_f))^3$ *(*$i,j = 1,2,3$*) находятся из системы*

$$\begin{cases} \nabla_y div_y\Big(C_1(A_1\boldsymbol{Z}^{ij}_1 + A_2\boldsymbol{Z}^{ij}_3) + BC_3(\boldsymbol{Z}^{ij}_3 - \boldsymbol{Z}^{ij}_1)\Big) = 0, \\ \nabla_y div_y\Big(C_4(A_1\boldsymbol{Z}^{ij}_1 + A_2\boldsymbol{Z}^{ij}_3) + BC_6(\boldsymbol{Z}^{ij}_3 - \boldsymbol{Z}^{ij}_1)\Big) = 0 \quad \text{на } \mathcal{Y}_f, \end{cases} \tag{3.51a}$$

$$\begin{cases} div_y\Big(C_1(A_1\boldsymbol{Z}^{ij}_1 + A_2\boldsymbol{Z}^{ij}_3) + BC_3(\boldsymbol{Z}^{ij}_3 - \boldsymbol{Z}^{ij}_1)\Big) = 0, \\ div_y\Big(C_4(A_1\boldsymbol{Z}^{ij}_1 + A_2\boldsymbol{Z}^{ij}_3) + BC_6(\boldsymbol{Z}^{ij}_3 - \boldsymbol{Z}^{ij}_1)\Big) = 0 \quad \text{на } \partial\mathcal{Y}_f \setminus \partial\mathcal{Y}, \end{cases} \tag{3.51b}$$

$$\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y}) \text{ — 1–периодические.} \tag{3.51c}$$

Замечание 3. *В покомпонентной форме уравнения* (3.51a) *имеют вид:*

$$m_1\nu_1\frac{\partial^2 Z^{ij}_{1,k}}{\partial y_k \partial y_m} + m_2\nu_2\frac{\partial^2 Z^{ij}_{3,k}}{\partial y_k \partial y_m} = 0, \tag{3.52}$$

$$-m_1\nu_1\frac{\partial^2 Z^{ij}_{1,k}}{\partial y_k \partial y_m} + m_2\nu_2\frac{\partial^2 Z^{ij}_{3,k}}{\partial y_k \partial y_m} = 0, \quad m = 1,2,3. \tag{3.53}$$

Задача С 3. *Начальные данные* $\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0)$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},0) \in (W^1_2(\mathcal{Y}_f))^3$ *(*$i,j = 1,2,3$*) даются уравнениями и краевыми условиями*

$$\begin{cases} \nabla_y div_y\Big[\alpha^0_c(A_1\boldsymbol{Z}^{ij}_1 + A_2\boldsymbol{Z}^{ij}_3) + C_1(A_1\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0) + A_2\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},0)) \\ \quad +BC_2(\boldsymbol{Z}^{ij}_3 - \boldsymbol{Z}^{ij}_1) + BC_3(\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},0) - \boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0))\Big] = 0, \\ \nabla_y div_y\Big[\alpha^0_r(A_1\boldsymbol{Z}^{ij}_1 + A_2\boldsymbol{Z}^{ij}_3) + C_4(A_1\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0) + A_2\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},0)) \\ \quad +BC_5(\boldsymbol{Z}^{ij}_3 - \boldsymbol{Z}^{ij}_1) + BC_6(\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},0) - \boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0))\Big] = 0 \quad \text{на } \mathcal{Y}_f, \end{cases} \tag{3.54a}$$

$$
\begin{cases}
div_y\Big[\alpha_c^0(A_1\boldsymbol{Z}_1^{ij}+A_2\boldsymbol{Z}_3^{ij})+C_1(A_1\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)+A_2\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)) \\
\quad +BC_2(\boldsymbol{Z}_3^{ij}-\boldsymbol{Z}_1^{ij})+BC_3(\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)-\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0))\Big]=0, \\
div_y\Big[\alpha_r^0(A_1\boldsymbol{Z}_1^{ij}+A_2\boldsymbol{Z}_3^{ij})+C_4(A_1\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)+A_2\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)) \\
\quad +BC_5(\boldsymbol{Z}_3^{ij}-\boldsymbol{Z}_1^{ij})+BC_6(\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)-\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0))\Big]=0 \\
\quad \text{на } \partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y},
\end{cases}
\tag{3.54b}
$$

$$
\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0),\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)\ \text{— 1–периодические.} \tag{3.54c}
$$

Замечание 4. *В покомпонентной форме уравнения* (3.54a) *имеют вид:*

$$
\begin{aligned}
m_1\nu_1\frac{\partial^2 Z_{2,k}^{ij}(\boldsymbol{y},0)}{\partial y_k\partial y_m}+m_2\nu_2\frac{\partial^2 Z_{4,k}^{ij}(\boldsymbol{y},0)}{\partial y_k\partial y_m} &+ (\alpha_c^0A_1-BC_2)\frac{\partial^2 Z_{1,k}^{ij}}{\partial y_k\partial y_m} \\
&+ (\alpha_c^0A_2+BC_2)\frac{\partial^2 Z_{3,k}^{ij}}{\partial y_k\partial y_m}=0,
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

$$
\begin{aligned}
-m_1\nu_1\frac{\partial^2 Z_{2,k}^{ij}(\boldsymbol{y},0)}{\partial y_k\partial y_m}+m_2\nu_2\frac{\partial^2 Z_{4,k}^{ij}(\boldsymbol{y},0)}{\partial y_k\partial y_m} &+ (\alpha_r^0A_1-BC_5)\frac{\partial^2 Z_{1,k}^{ij}}{\partial y_k\partial y_m} \\
+(\alpha_r^0A_2+BC_5)\frac{\partial^2 Z_{3,k}^{ij}}{\partial y_k\partial y_m} &= 0,\quad m=1,2,3.
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

Задача С 4. $\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)$, $\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\in L^1(0,T;(W_2^1(\mathcal{Y}_f))^3)$ *(*$i,j=1,2,3$*) находятся из системы:*

$$
\begin{cases}
\nabla_y div_y\Big[\alpha_c^0(A_1\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)+A_2\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t))+C_1(A_1\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)+A_2\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)) \\
\quad +BC_2(\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)-\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))+BC_3(\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)-\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))\Big]=0, \\
\nabla_y div_y\Big[\alpha_r^0(A_1\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)+A_2\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t))+C_4\Big(A_1\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)+A_2\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big) \\
\quad +BC_5(\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)-\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))+BC_6\Big(\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)-\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big)\Big]=0, \\
\quad \text{на } \mathcal{Y}_f,
\end{cases}
\tag{3.57a}
$$

$$
\begin{cases}
div_y\Big[\alpha_c^0(A_1\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)+A_2\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t))+C_1(A_1\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)+A_2\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))\\
+BC_2(\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)-\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))+BC_3(\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)-\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))\Big]=0,\\
div_y\Big[\alpha_r^0(A_1\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)+A_2\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t))+C_4\Big(A_1\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)+A_2\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big)\\
+BC_5(\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)-\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))+BC_6\Big(\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)-\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big)\Big]=0\\
\text{на } \partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y},
\end{cases}
\tag{3.57b}
$$

$$
\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0),\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)\ -\ \textit{решения задачи C3}, \tag{3.57c}
$$

$$
\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t),\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\ -\ \textit{1–периодические по } \boldsymbol{y}. \tag{3.57d}
$$

Системы уравнений (3.52)–(3.53), (3.55)–(3.56) и (3.57a), а также уравнение (3.48a) являются эллиптическими [23, 24]. Следовательно для них выполняется следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть геометрия множеств $\mathcal{Y}_f$ и $\mathcal{Y}_s$ и все коэффициенты заданы. Тогда каждая из задач C1—C4 имеет единственное решение.*

Подставляя (3.39) в (3.32), получаем эффективное уравнение

$$
\begin{aligned}
\rho_s|\mathcal{Y}_s|\frac{\partial^2 \hat{u}^*_{c,k}}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^{3}\Big\{\rho_f^0\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\Big(A_1\left\langle Z^{ij}_{1,k}\right\rangle_{\mathcal{Y}_f} + A_2\left\langle Z^{ij}_{3,k}\right\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big) \\
+ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\Big(A_1\left\langle Z^{ij}_{2,k}(\boldsymbol{y},0)\right\rangle_{\mathcal{Y}_f} + A_2\left\langle Z^{ij}_{4,k}(\boldsymbol{y},0)\right\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big) \\
+ \frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\Big(A_1\Big\langle\frac{\partial Z^{ij}_{2,k}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f} + A_2\Big\langle\frac{\partial Z^{ij}_{4,k}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big)\Big] \\
- \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(|\mathcal{Y}_s|\frac{\partial \hat{u}^*_{c,k}}{\partial x_k} + \frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\left\langle \mathrm{div}_y Z^{ij}_{5,k}\right\rangle_{\mathcal{Y}_s}\Big) \\
- \lambda\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[2|\mathcal{Y}_s|\sum_{l=1}^{3}\Big(\frac{\partial \hat{u}^*_{c,k}}{\partial x_l} + \frac{\partial \hat{u}^*_{c,l}}{\partial x_k}\Big) + \frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}\left\langle \mathbb{D}(y, Z^{ij}_{5,k})\right\rangle_{\mathcal{Y}_s}\Big] \\
+ \rho_f^0\int_0^t \frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\tau)\Big(A_1\Big\langle\frac{\partial^2 Z^{ij}_{2,k}}{\partial t^2}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f} + A_2\Big\langle\frac{\partial^2 Z^{ij}_{4,k}}{\partial t^2}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big)\,d\tau\Big\} \\
+ BDg_k = 0, \quad k = 1,2,3. \qquad (3.58)
\end{aligned}
$$

По–другому его можно переписать в следующем виде, где коэффициенты $\boldsymbol{K}_j$ однозначно определяют поведение микроструктуры и находятся из задач на ячейках.

$$
\begin{aligned}
\rho_s|\mathcal{Y}_s|\frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{u}}^*_{c}}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^{3}\Big\{\boldsymbol{K}^{ij}_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j} + \boldsymbol{K}^{ij}_2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j} + \boldsymbol{K}^{ij}_3\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j} \\
- \mathbb{C}^{ij} : \nabla_x\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j} + \int_0^t \boldsymbol{K}^{ij}_4(\tau)\frac{\partial \hat{u}^*_{c,i}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\Big\} + BD\boldsymbol{g} = 0, \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

где

$$K_{1k}^{ij} = \rho_f^0\Big(A_1\left\langle Z_{1,k}^{ij}\right\rangle_{\mathcal{Y}_f} + A_2\left\langle Z_{3,k}^{ij}\right\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big), \tag{3.60}$$

$$K_{2k}^{ij} = \rho_f^0\Big(A_1\left\langle Z_{2,k}^{ij}(\boldsymbol{y},0)\right\rangle_{\mathcal{Y}_f} + A_2\left\langle Z_{4,k}^{ij}(\boldsymbol{y},0)\right\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big), \tag{3.61}$$

$$K_{3k}^{ij} = \rho_f^0\Big(A_1\Big\langle\frac{\partial Z_{2,k}^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f} + A_2\Big\langle\frac{\partial Z_{4,k}^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big), \tag{3.62}$$

$$C_{kl}^{ij} = \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\left(|\mathcal{Y}_s|\delta_{ik}\delta_{ijl}\delta_{lk} + \left\langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{Z}_5^{ij}\right\rangle_{\mathcal{Y}_s}\delta_{lk}\right) \tag{3.63}$$

$$+ \lambda\left(2|\mathcal{Y}_s|(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_5^{ij})\right\rangle_{\mathcal{Y}_s}\delta_{lk}\right), \tag{3.64}$$

$$K_{4k}^{ij} = \rho_f^0\Big(A_1\Big\langle\frac{\partial^2 Z_{2,k}^{ij}}{\partial t^2}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f} + A_2\Big\langle\frac{\partial^2 Z_{4,k}^{ij}}{\partial t^2}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big). \tag{3.65}$$

Подставив представление (3.39) в уравнение (3.36) получим эффективное уравнение для $\boldsymbol{u}_r^*$:

$$\boldsymbol{u}_r^* = \sum_{i,j=1}^{3}\Big\langle\frac{\partial \hat{u}_{c,i}^*}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\Big(\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\Big)$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial \hat{u}_{c,i}^*}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\Big(\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau) - \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)d\,\tau\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}. \tag{3.66}$$

Итак, основным результатом настоящей диссертации является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функции $\boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon}, \boldsymbol{u}_r^{0\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ и $\boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon}, \boldsymbol{v}_r^{0\varepsilon} \in L^2(\Omega)$ удовлетворяют предельным отношениям*

$$\boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon} \to \boldsymbol{u}_c^{0*}, \quad \boldsymbol{u}_r^{0\varepsilon} \to \boldsymbol{u}_r^{0*} \text{ слабо в } H_0^1(\Omega), \tag{3.67}$$

$$\boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon} \to \boldsymbol{v}_c^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{v}_r^{0\varepsilon} \to \boldsymbol{v}_r^{0*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$$\text{в смысле двухмасштабной сходимости} \tag{3.68}$$

при $\varepsilon \searrow 0$ для некоторых функций $\boldsymbol{u}_c^{0*}, \boldsymbol{u}_r^{0*} \in H_0^1(\Omega)$ и $\boldsymbol{v}_c^{0*}, \boldsymbol{v}_r^{0*} \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$. Пусть функции $\boldsymbol{u}_c^{\varepsilon}$, $\boldsymbol{u}_r^{\varepsilon}$ являются обобщёнными решениями задачи A, *соответствующим заданным функциям* $\boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon}$, $\boldsymbol{u}_r^{0\varepsilon}$, $\boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon}$, $\boldsymbol{v}_r^{0\varepsilon}$ *при произвольном фиксированном* $\varepsilon > 0$, *так, что* $\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}$.

Функция $\boldsymbol{u}_c^{\varepsilon}$ *допускает продолжение* $\hat{\boldsymbol{u}}_c^{\varepsilon}$ *из области* $\Omega_s^{\varepsilon} \times (0,T)$ *на область* $Q = \Omega \times (0,T)$, *где* T *— положительная постоянная, а* Ω *— единичный куб в* $\mathbb{R}^3$ $(\Omega = (0,1)^3)$ *так, что последовательность* $\{\hat{\boldsymbol{u}}_c^{\varepsilon}\}$ *сходится сильно в* $L^2(Q)$ *и слабо в* $L^2((0,T);W_2^1(\Omega))$ *к функции* $\hat{\boldsymbol{u}}_c^{*}$. *В то же время последовательность* $\{\boldsymbol{u}_r^{\varepsilon}\}$ *сходится слабо* $L^2(Q)$ *к функции* $\boldsymbol{u}_r^{*}$.

Тогда функции $\hat{\boldsymbol{u}}_c^{*}$ *и* $\boldsymbol{u}_r^{*}$ *удовлетворяют в* Q *следующей начально–краевой задаче.*

Задача Н. *В пространственно–временном цилиндре* $Q = \Omega \times (0,T)$ *требуется определить поля перемещений* $\hat{\boldsymbol{u}}_c^{*}$ *и* $\boldsymbol{u}_r^{*}$, *удовлетворяющие уравнению Био* (3.59) *и уравнению* (3.66)

а также начальным данным

$$\hat{\boldsymbol{u}}_c^{*}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_c^{0*}, \quad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_c^{*}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}_c^{0*}, \tag{3.69}$$

$$\boldsymbol{u}_r^{*}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_c^{0*}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_r^{*}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}_r^{0*} \tag{3.70}$$

и краевым условиям

$$\hat{\boldsymbol{u}}_c^{*} = 0,\ \boldsymbol{u}_r^{*} = 0 \ \text{на}\ (\partial\Omega) \times (0,T). \tag{3.71}$$

4. СЛУЧАЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для модели (1.1a)—(1.1h), рассматриваемой в первой части этой диссертации, с сохранением условий для геометрии микроструктуры и с такими же заменами переменных, проводилась процедура гомогенизации для случая, когда все физические коэффициенты не зависят от малого параметра. Результатом этой работы является следующая теорема.

4.1. Гомогенная макроскопическая модель

Теорема 4. *Пусть функции* $\boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon}, \boldsymbol{u}_r^{0\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ *и* $\boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon}, \boldsymbol{v}_r^{0\varepsilon} \in L^2(\Omega)$ *удовлетворяют предельным отношениям*

$$\boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon} \to \boldsymbol{u}_c^{0*}, \quad \boldsymbol{u}_r^{0\varepsilon} \to \boldsymbol{u}_r^{0*} \text{ слабо в } H_0^1(\Omega), \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon} \to \boldsymbol{v}_c^{0*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{v}_r^{0\varepsilon} \to \boldsymbol{v}_r^{0*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$\text{в смысле двухмасштабной сходимости} \tag{4.2}$$

при $\varepsilon \searrow 0$ *для некоторых функций* $\boldsymbol{u}_c^{0*}, \boldsymbol{u}_r^{0*} \in H_0^1(\Omega)$ *и* $\boldsymbol{v}_c^{0*}, \boldsymbol{v}_r^{0*} \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$. *Пусть функция* $\boldsymbol{u}_c^{\varepsilon}$ *является обобщённым решением задачи А, соответствующим заданным функциям* $\boldsymbol{u}_c^{0\varepsilon}$, $\boldsymbol{u}_r^{0\varepsilon}$, $\boldsymbol{v}_c^{0\varepsilon}$, $\boldsymbol{v}_r^{0\varepsilon}$ *при произвольном фиксированном* $\varepsilon > 0$, *так, что* $\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}$. *Тогда при* $\varepsilon \searrow 0$ $(\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N})$ *последовательность* $\boldsymbol{u}_c^{\varepsilon}$ *слабо в* $W_2^1(Q)$ *сходится к функции* $\boldsymbol{u}_c^{*}$, *являющейся обобщённым решением нижеследующей задачи Б, в постановке которой постоянные* 3×3*–матрицы* $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$, *тензоры четвёртого порядка* $\mathbb{B}$, $\mathbb{E}$, *функции* $t \mapsto \mathbb{F}(t)$ *и* $t \mapsto \mathbb{G}(t)$ *со значениями в пространстве* 3×3*–матриц зависят только от геометрии областей* $\mathcal{Y}_f$ *и* $\mathcal{Y}_s$ *и от величин* α_c^0, α_r^0, ρ_{1f}^0, ρ_{2f}^0, ρ_s, ν_1,

μ_1, m_1, ν_2, μ_2, m_2 *и однозначно ими определяются из уравнений* (4.16a)–(4.16f).

Замечание 5. *Можно заметить, что* $\boldsymbol{u}_r^*$ *не фигурирует в эффективной модели. Это связано с тем, что* $\boldsymbol{u}_r^* = 0$ *п. в. в* $\Omega \times [0, T]$.

Задача Б. *В пространственно–временном цилиндре* $Q = \Omega \times (0, T)$, *где* T *— положительная постоянная, а* Ω *— единичный куб в* $\mathbb{R}^3$ ($\Omega = (0,1)^3$), *требуется определить поле перемещений* $\boldsymbol{u}_c^*(\boldsymbol{x}, t)$, *удовлетворяющее уравнению*

$$
\begin{aligned}
&(\rho_f^0|\mathcal{Y}_f| + \rho_s|\mathcal{Y}_s|)\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_c^*}{\partial t^2} + (\rho_f^0|\mathcal{Y}_f| + \rho_s|\mathcal{Y}_s|)\boldsymbol{g} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \Big\{ \Big(A_2|\mathcal{Y}_f|\frac{\partial}{\partial x_l}\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}_c^*}{\partial t}\Big) - 2\lambda|\mathcal{Y}_s|\frac{\partial}{\partial x_l}\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_c^*)) \Big) + \frac{\partial^2 u_{c,i}^*}{\partial x_k \partial x_j} A_k^{ij} \\
&\qquad + \frac{\partial^2 u_{c,i}^*}{\partial x_k \partial x_j} B_{kl}^{ij} + \frac{\partial^3 u_{c,i}^*}{\partial t \partial x_k \partial x_j} C_k^{ij} + \frac{\partial^2 u_{c,i}^*}{\partial x_l \partial x_j} E_{kl}^{ij} \\
&\qquad + \int_0^t \frac{\partial^2 u_{c,i}^*}{\partial x_k \partial x_j} F_k^{ij}(t-s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial^3 u_{c,i}^*}{\partial t \partial x_k \partial x_j} G_{kl}^{ij}(t-s)\, ds \Big\} = 0, \quad (4.3)
\end{aligned}
$$

начальным данным

$$
\boldsymbol{u}_c^*(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_c^{0*}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_c^*}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v}_c^{0*} \quad (4.4)
$$

и краевому условию

$$
\boldsymbol{u}_c^* = 0 \text{ на } (\partial\Omega) \times (0, T). \quad (4.5)
$$

Определение 3. *Функция* $\boldsymbol{u}_c^*$ *называется обобщённым решением задачи Б, если она удовлетворяет условию регулярности* $\boldsymbol{u}_c^* \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$, *краевому условию (4.5) в смысле следов и интегральному равенству*

$$\int_Q \Big[(\rho_f^0|\mathcal{Y}_f| + \rho_s|\mathcal{Y}_s|)\frac{\partial \boldsymbol{u}_c^*}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + (\rho_f^0|\mathcal{Y}_f| + \rho_s|\mathcal{Y}_s|)\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\varphi}$$

$$-\Big(A_2|\mathcal{Y}_f|\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{u}_c^*}{\partial t}\Big) - 2\lambda|\mathcal{Y}_s|\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}_c^*))\Big) : \mathbb{D}(x,\varphi) - \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j}A^{ij}\, div_x\boldsymbol{\varphi}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j}B^{ij} : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) - \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_{c,i}^*}{\partial t\partial x_j}C^{ij}\, div_x\boldsymbol{\varphi} - \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j}E^{ij} : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})$$

$$-\int_0^t \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j}F^{ij}(t-s)\, div_x\boldsymbol{\varphi}\, ds - \int_0^t \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_{c,i}^*}{\partial t\partial x_j}G^{ij}(t-s) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\, ds\Big]\, dx\, dt =$$

$$(\rho_f^0|\mathcal{Y}_f| + \rho_s|\mathcal{Y}_s|)\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{u}_c^*}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\tau)\, dx - \int_\Omega \boldsymbol{P}_c^0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\, dx, \quad (4.6)$$

для любой гладкой вектор–функции $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$, обращающейся в ноль вблизи $\partial\Omega$ и в окрестности $t = T$.

Замечание 6. *Исходя из задачи Б, можем найти остальные механические величины: α_1, α_2, ρ_i^0 $(i = 1, 2)$, p — по формулам:*

$$\alpha_1 = a_1 + \sum_{i,j=1}^{3} K_1^{ij}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j} + \int_0^t \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j}H_1^{ij}(t-s)ds, \quad (4.7)$$

$$\alpha_2 = a_2 + \sum_{i,j=1}^{3} K_2^{ij}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j} + \int_0^t \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j}H_2^{ij}(t-s)ds, \quad (4.8)$$

$$\rho_i^0 = \rho_{if}^0\left[1 - \frac{\alpha_i^0}{m_i}\left(\sum_{i,j=1}^{3} K_3^{ij}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j} + \int_0^t \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j}H_3^{ij}(t-s)ds\right)\right], \quad (4.9)$$

$$p = p_* - c_{\rho i}\rho_{if}^0\frac{\alpha_i^0}{m_i}\left(\sum_{i,j=1}^{3} K_3^{ij}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j} + \int_0^t \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_{c,i}^*}{\partial x_j}H_3^{ij}(t-s)ds\right), \quad (4.10)$$

где константы a_1, a_2, постоянные матрицы $\mathbb{K}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ и функции $t \mapsto \mathbb{H}_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ со значениями в пространстве 3×3–матриц зависят только от геометрии областей $\mathcal{Y}_f$ и $\mathcal{Y}_s$ и от величин ρ^0_{1f}, ρ^0_{2f}, m_1, ν_2, μ_2, m_2, $c_{\rho 1}$, $c_{\rho 2}$, которыми однозначно определяются из уравнений (4.17a) — (4.17h).

4.2. Структура эффективных коэффициентов

Функции $\boldsymbol{Z}^{ij}_1$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_2$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_3$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_4$ и $\boldsymbol{Z}^{ij}_5$ служат решениями краевых задач на шаблонной ячейке $\mathcal{Y}$, формулируемых ниже, согласно методу, изложенному в [6].

Задача D 1. *Вектор–функция* $\boldsymbol{Z}^{ij}_5(\boldsymbol{y}) \in (W^1_2(\mathcal{Y}_s))^3$ $(i,j=1,2,3)$ *находится из системы*

$$div_y\Big((1-\chi(\boldsymbol{y}))\Big((\eta-\frac{2}{3}\lambda)(\delta_{ij}\mathbb{I}+div_y\boldsymbol{Z}^{ij}_5(\boldsymbol{y})\mathbb{I})+\lambda(\mathbb{J}^{ij}+2\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}^{ij}_5(\boldsymbol{y})))\Big)\Big)=0$$
$$\textit{на } \mathcal{Y}_s, \quad (4.11a)$$

$$(1-\chi(\boldsymbol{y}))\Big((\eta-\frac{2}{3}\lambda)(\delta_{ij}\mathbb{I}+div_y\boldsymbol{Z}^{ij}_5(\boldsymbol{y})\mathbb{I})+\lambda(\mathbb{J}^{ij}+2\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}^{ij}_5(\boldsymbol{y})))\Big)=0$$
$$\textit{на } \partial\mathcal{Y}_s\setminus\partial\mathcal{Y}, \quad (4.11b)$$

$$\boldsymbol{Z}^{ij}_5(\boldsymbol{y}) \ \text{— 1–периодическая.} \quad (4.11c)$$

Задача D 2. *Вектор–функции* $\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y}) \in (W^1_2(\mathcal{Y}_f))^3$ $(i,j=1,2,3)$ *находятся из системы*

$$div_y\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(A_1\delta_{ij}\mathbb{I}+A_2\mathbb{J}^{ij}+A_3 div_y\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_4 div_y\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_5\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}))$$
$$+A_6\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y}))\Big)\Big]=0, \quad (4.12a)$$

$$div_y\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(A_7\delta_{ij}\mathbb{I}+A_8\mathbb{J}^{ij}+A_9 div_y\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_{10} div_y\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_{11}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}))$$
$$+A_{12}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y}))\Big)\Big]=0 \quad \textit{на } \mathcal{Y}_f, \quad (4.12b)$$

$$\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(A_1\delta_{ij}\mathbb{I}+A_2\mathbb{J}^{ij}+A_3\,div_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_4\,div_y\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_5\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}))$$
$$+A_6\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y}))\Big)\Big]=0, \quad (4.12c)$$

$$\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(A_7\delta_{ij}\mathbb{I}+A_8\mathbb{J}^{ij}+A_9\,div_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_{10}\,div_y\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_{11}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}))$$
$$+A_{12}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y}))\Big)\Big]=0 \text{ *на* } \partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y}, \quad (4.12d)$$

$$\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y}) \text{ — 1–периодические.} \quad (4.12e)$$

Задача D 3. *Начальные данные* $\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)$, $\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)\in(W_2^1(\mathcal{Y}_f))^3$ *(*$i,j=1,2,3$*) даются уравнениями*

$$div_y\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(\alpha_c^0\delta_{ij}\mathbb{I}+A_{13}\,div_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_{14}\,div_y\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_3\,div_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}$$
$$+A_4\,div_y\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}+A_5\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0))+A_6\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0))\Big)\Big]=0, \quad (4.13a)$$

$$div_y\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(\alpha_r^0\delta_{ij}\mathbb{I}+A_{15}\,div_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_{16}\,div_y\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_9\,div_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}$$
$$+A_{10}\,div_y\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}+A_{11}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0))+A_{12}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0))\Big)\Big]=0 \quad \text{ *на* } \mathcal{Y}_f,$$
$$(4.13b)$$

$$\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(\alpha_c^0\delta_{ij}\mathbb{I}+A_{13}\,div_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_{14}\,div_y\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_3\,div_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}$$
$$+A_4\,div_y\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}+A_5\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0))+A_6\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0))\Big)\Big]=0, \quad (4.13c)$$

$$\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(\alpha_r^0\delta_{ij}\mathbb{I}+A_{15}\,div_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_{16}\,div_y\boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}+A_9\,div_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}$$
$$+A_{10}\,div_y\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}+A_{11}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0))+A_{12}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0))\Big)\Big]=0$$
$$\text{ *на* } \partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y}, \quad (4.13d)$$

$$\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0),\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0) \text{ — 1–периодические.} \quad (4.13e)$$

Задача D 4. $\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)$, $\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t) \in L^1(0,T;(W_2^1(\mathcal{Y}_f))^3)$ *$(i,j=1,2,3)$ находятся из системы:*

$$div_y\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(A_{13}div_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_{14}div_y\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_3div_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I} \\ +A_4div_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_5\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))+A_6\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))\Big)\Big]=0, \tag{4.14a}$$

$$div_y\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(A_{15}div_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_{16}div_y\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_9div_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I} \\ +A_{10}div_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_{11}\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))+A_{12}\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))\Big)\Big]=0 \\ \text{на } \mathcal{Y}_f, \tag{4.14b}$$

$$\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(A_{13}div_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_{14}div_y\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_3div_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I} \\ +A_4div_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_5\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))+A_6\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))\Big)\Big]=0, \tag{4.14c}$$

$$\chi(\boldsymbol{y})\Big[\chi(\boldsymbol{y})\Big(A_{15}div_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_{16}div_y\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_9div_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I} \\ +A_{10}div_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}+A_{11}\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))+A_{12}\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t))\Big)\Big]=0 \\ \text{на } \partial\mathcal{Y}_f\setminus\partial\mathcal{Y}, \tag{4.14d}$$

$$\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0),\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},0)\ -\ \textit{решения задачи D3}, \tag{4.14e}$$

$$\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t),\boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\ -\ \textit{1–периодические по } \boldsymbol{y}. \tag{4.14f}$$

В (4.11a) — (4.12b) через $\boldsymbol{e}^j$ обозначаются вектора стандартного декартова базиса в $\mathbb{R}^3$; $\mathbb{J}^{ij}\stackrel{def}{=}(1/2)(\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j+\boldsymbol{e}^j\otimes\boldsymbol{e}^i)$ – 3×3-матрица, в представлении которой $\boldsymbol{e}^k\otimes\boldsymbol{e}^l$ – это диада двух базисных векторов, определяемая для любого $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ по закону $(\boldsymbol{e}^k\otimes\boldsymbol{e}^l)\boldsymbol{a}=a_l\boldsymbol{e}^k$. В перечисленных выше задачах на ячейках используются следующие обозначения для констант:

$$A_1 = m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big) + m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big), \tag{4.15a}$$

$$A_2 = 2(m_1\mu_1 + m_2\mu_2), \tag{4.15b}$$

$$\begin{aligned} A_3 = \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\Big(m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big) + m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big) \\ - \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\Big(\rho_{1f}^0\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big) - \rho_{2f}^0\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big), \end{aligned} \tag{4.15c}$$

$$\begin{aligned} A_4 = \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\Big(m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big) + m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big) \\ + \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\Big(\rho_{1f}^0\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big) - \rho_{2f}^0\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big), \end{aligned} \tag{4.15d}$$

$$A_5 = 2\frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}(m_1\mu_1 + m_2\mu_2) - 2\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}(\rho_{1f}^0\mu_2 - \rho_{2f}^0\mu_1), \tag{4.15e}$$

$$A_6 = 2\frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}(m_1\mu_1 + m_2\mu_2) + 2\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}(\rho_{1f}^0\mu_2 - \rho_{2f}^0\mu_1), \tag{4.15f}$$

$$A_7 = m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big) - m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big), \tag{4.15g}$$

$$A_8 = 2(m_2\mu_2 - m_1\mu_1) \tag{4.15h}$$

$$\begin{aligned} A_9 = \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\Big(m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big) - m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big) \\ - \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\Big(\rho_{2f}^0\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big) + \rho_{1f}^0\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big), \end{aligned} \tag{4.15i}$$

$$\begin{aligned} A_{10} = \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\Big(m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big) - m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big) \\ + \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\Big(\rho_{2f}^0\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big) + \rho_{1f}^0\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big), \end{aligned} \tag{4.15j}$$

$$A_{11} = 2\frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}(m_2\mu_2 - m_1\mu_1) - 2\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}(\rho_{2f}^0\mu_1 + \rho_{1f}^0\mu_2), \tag{4.15k}$$

$$A_{12} = 2\frac{m_2\rho^0_{2f}}{\rho^0_f}(m_2\mu_2 - m_1\mu_1) + 2\frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}(\rho^0_{2f}\mu_1 + \rho^0_{1f}\mu_2), \tag{4.15l}$$

$$A_{13} = \alpha^0_c\Big(\frac{m_1\rho^0_{1f}}{\rho^0_f} - \frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}(\rho^0_{1f} - \rho^0_{2f})\Big), \tag{4.15m}$$

$$A_{14} = \alpha^0_c\Big(\frac{m_2\rho^0_{2f}}{\rho^0_f} + \frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}(\rho^0_{1f} - \rho^0_{2f})\Big), \tag{4.15n}$$

$$A_{15} = \alpha^0_r\Big(\frac{m_1\rho^0_{1f}}{\rho^0_f} - \frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}(\rho^0_{1f} - \rho^0_{2f})\Big), \tag{4.15o}$$

$$A_{16} = \alpha^0_r\Big(\frac{m_2\rho^0_{2f}}{\rho^0_f} + \frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}(\rho^0_{1f} - \rho^0_{2f})\Big). \tag{4.15p}$$

В интегральном равенстве (4.6) компоненты тензоров и матриц определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
A^{ij} = \alpha^0_c\Big(|\mathcal{Y}_f|\delta_{ij}\mathbb{I} + \Big\langle\frac{m_1\rho^0_{1f}}{\rho^0_f}\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y})\mathbb{I} + \frac{m_2\rho^0_{2f}}{\rho^0_f}\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y})\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big)\\
+ \Big(m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big) + m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big)\Big\langle\frac{m_1\rho^0_{1f}}{\rho^0_f}\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}\\
+ \frac{m_2\rho^0_{2f}}{\rho^0_f}\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f} + \Big(\eta - \frac{2}{3}\lambda\Big)\Big(|\mathcal{Y}_s|\delta_{ij}\mathbb{I} + \Big\langle\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_5(\boldsymbol{y})\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_s}\Big)\\
+ \frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}\Big[\alpha^0_c(\rho^0_{1f} - \rho^0_{2f})\Big\langle\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y})\mathbb{I} - \mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y})\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}\\
+ \Big(\rho^0_{1f}\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big) - \rho^0_{2f}\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big)\Big\langle\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I} - \mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}\Big],
\end{aligned} \tag{4.16a}$$

$$\begin{aligned}
B^{ij} = 2(m_1\mu_1 + m_2\mu_2)\Big\langle\frac{m_1\rho^0_{1f}}{\rho^0_f}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y})) + \frac{m_2\rho^0_{2f}}{\rho^0_f}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}^{ij}_3(\boldsymbol{y}))\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}\\
+ 2\lambda\Big\langle\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_5(\boldsymbol{y})\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_s}\\
+ 2\frac{m_1 m_2}{\rho^0_f}(\rho^0_{1f}\mu_2 - \rho^0_{2f}\mu_1)\Big\langle\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_4(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I} - \mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0)\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f},
\end{aligned} \tag{4.16b}$$

$$C^{ij} = \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\Big(\rho_{2f}^0\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big) + \rho_{1f}^0\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big)\Big\langle \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}$$

$$+ \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f} + \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\Big[\alpha_c^0(\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0)\Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I} - \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}$$

$$+ \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\Big(\rho_{1f}^0\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big) - \rho_{2f}^0\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big)\Big)\Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I} - \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}, \tag{4.16c}$$

$$E^{ij} = 2(m_1\mu_1 + m_2\mu_2)\Big\langle \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})) + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y}))\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}$$

$$+ 2\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}(\rho_{1f}^0\mu_2 - \rho_{2f}^0\mu_1)\Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I} - \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}, \tag{4.16d}$$

$$F^{ij} = \alpha_c^0\Big\langle \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I} + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f} + \Big(m_1\Big(\nu_1 - \frac{2}{3}\mu_1\Big)$$

$$+ m_2\Big(\nu_2 - \frac{2}{3}\mu_2\Big)\Big)\Big\langle \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I} + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \frac{\partial \boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}$$

$$+ \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}\alpha_c^0(\rho_{1f}^0 - \rho_{2f}^0)\Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I} - \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)\mathbb{I}\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}, \tag{4.16e}$$

$$G^{ij} = 2(m_1\mu_1 + m_2\mu_2)\Big\langle \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathbb{D}\Big(\boldsymbol{y}, \frac{\partial \boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big) + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathbb{D}\Big(\boldsymbol{y}, \frac{\partial \boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}$$

$$+ 2\frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}(\rho_{1f}^0\mu_2 - \rho_{2f}^0\mu_1)\Big\langle \mathbb{D}\Big(\boldsymbol{y}, \frac{\partial \boldsymbol{Z}_2^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big) - \mathbb{D}\Big(\boldsymbol{y}, \frac{\partial \boldsymbol{Z}_4^{ij}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\Big)\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}. \tag{4.16f}$$

Постоянные, матрицы и тензоры для объёмных насыщенностей жидких фаз, истинных плотностей и давления определяются следующим образом:

$$a_1 = \frac{m_1 m_2}{c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 m_2 + c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 m_1}\Big(c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 - c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 + \frac{c_{\rho 2}\rho_{2f}^0}{m_2}\Big), \tag{4.17a}$$

$$a_2 = \frac{m_1 m_2}{c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 m_2 + c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 m_1}\Big(c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 - c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 + \frac{c_{\rho 1}\rho_{1f}^0}{m_1}\Big), \tag{4.17b}$$

$$K_1^{ij} = (c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 - c_{\rho 2}\rho_{2f}^0)\Big[\delta_{ij}\mathbb{I} + \Big\langle \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}) + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}$$

$$+ \Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_5^{ij}(\boldsymbol{y})\Big\rangle_{\mathcal{Y}_s}\Big] + \frac{\rho_{1f}^0\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}(c_{\rho 1}m_2 + c_{\rho 2}m_1)\Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y}) - \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}, \tag{4.17c}$$

$$K_2^{ij} = (c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 - c_{\rho 1}\rho_{1f}^0)\Big[\delta_{ij}\mathbb{I} + \Big\langle \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}) + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}$$

$$+ \Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_5^{ij}(\boldsymbol{y})\Big\rangle_{\mathcal{Y}_s}\Big] + \frac{1}{\rho_f^0}(c_{\rho 2}(\rho_{2f}^0)^2 m_2 + c_{\rho 1}(\rho_{1f}^0)^2 m_1)\Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})$$

$$- \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}, \tag{4.17d}$$

$$K_3^{ij} = (m_1 + m_2)\Big[\delta_{ij}\mathbb{I} + \Big\langle \frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}) + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y})\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}$$

$$+ \Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_5^{ij}(\boldsymbol{y})\Big\rangle_{\mathcal{Y}_s}\Big] - \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}(\rho_{2f}^0 - \rho_{1f}^0)\Big\langle \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_3^{ij}(\boldsymbol{y}) - \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}, \tag{4.17e}$$

$$H_1^{ij}(t) = \Big\langle (c_{\rho 1}\rho_{1f}^0 - c_{\rho 2}\rho_{2f}^0)\Big(\frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t) + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\Big)$$

$$+ \frac{\rho_{1f}^0\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}(c_{\rho 1}m_2 + c_{\rho 2}m_1)(\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t) - \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}, \tag{4.17f}$$

$$H_2^{ij}(t) = \Big\langle (c_{\rho 2}\rho_{2f}^0 - c_{\rho 1}\rho_{1f}^0)\Big(\frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t) + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\Big)$$

$$+ \frac{1}{\rho_f^0}(c_{\rho 2}(\rho_{2f}^0)^2 m_2 + c_{\rho 1}(\rho_{1f}^0)^2 m_1)(\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t) - \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f}, \tag{4.17g}$$

$$H_3^{ij}(t) = \Big\langle (m_1 + m_2)\Big(\frac{m_1\rho_{1f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t) + \frac{m_2\rho_{2f}^0}{\rho_f^0}\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t)\Big)$$

$$- \frac{m_1 m_2}{\rho_f^0}(\rho_{2f}^0 - \rho_{1f}^0)(\mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_4^{ij}(\boldsymbol{y},t) - \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)).\Big\rangle_{\mathcal{Y}_f} \tag{4.17h}$$

Следующее утверждение констатирует, что требование о том, чтобы $\boldsymbol{Z}_1^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_2^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_3^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_4^{ij}$ и $\boldsymbol{Z}_5^{ij}$ служили решениями вышепоставленных задач, корректно.

Предложение 2. *Пусть геометрия множеств $\mathcal{Y}_f$ и $\mathcal{Y}_s$ и все коэффициенты заданы. Тогда каждая из задач C5—C8 имеет единственное решение.*

Задачи C5—C8 давно известны и хорошо изучены. Справедливость предложения непосредственно вытекает, например, из [22], [25, гл. 1, стр. 18]. В силу предложения 2 можем считать $\boldsymbol{Z}_1^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_2^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_2^{ij}\mid_{t=0}$, $\boldsymbol{Z}_3^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_4^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_4^{ij}\mid_{t=0}$, $\boldsymbol{Z}_5^{ij}$ известными функциями, значения которых определяются только данными микроструктуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе были получены эффективные уравнения для линеаризованной изотермической модели совместного движения упругого пористого грунта и двухфазной ньютоновской вязкой сжимаемой жидкости, содержащей малый параметр. Для случая, когда физические коэффициенты уравнений постоянны, уточнено эффективное уравнение макроструктуры и записаны задачи на ячейках, а также доказана их корректность. В случае, когда коэффициенты сдвиговой вязкости в жидких фазах зависят от ε, построена система предельных двухмасштабных уравнений. Затем с помощью процедуры асимптотической декомпозиции удалось вывести эффективную модель макроструктуры, вывести задачи на ячейках, полностью определяющие поведение микроструктуры, доказать их корректность.

Список литературы

[1] Sazhenkov S. A., Sazhenkova E. V. *Small perturbations of two–phase thermofluid in pores: linearization procedure and equations of isothermal microstructure* (Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2011. – Vol. 8. – P. 127–158).

[2] Allaire G. *Homogenization and two–scale convergence* (SIAM J. Math. Anal. – 1992. – Vol. 23. – No. 6. – P. 1482–1518).

[3] Nguetseng G. *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization* (SIAM J. Math. Anal. – 1989. – Vol. 20. – P. 608–623).

[4] Хохлов С. В. *Эффективная модель двухфазной жидкости в порах: однофазный вязкоупругий предел* (Магист. дис. — ММФ НГУ, Новосибирск, 2011).

[5] Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А., Шамаев А. С. *Усреднение. Методы и приложения* (Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007).

[6] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. *Осреднение процессов в периодических средах* (М.: Наука, 1984. – 352 с).

[7] Bensoussan A. et al. *Asymptotic analysis for periodic structures* (A. Bensoussan, J.–L. Lions, G. Papanicolau. – Amsterdam: North Holland, 1978. – 700 p).

[8] Санчес–Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний* (Пер. с англ. – М.: Мир, 1984 – 472 с).

[9] Burridge R., Keller J. B. *Poroelasticity equations derived from microstructure* (J. Acoust. Soc. Amer. – 1981 – V. 70, N. 4 – P. 1140–1146).

[10] Hornung U., (ed.) *Homogenization and porous media* (New York: Springer–Verlag, 1997).

[11] Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P. *Two–scale convergence* (Int. J. Pure Appl. Math. – 2002.– Vol. 2. – No. 1. – P. 35–86).

[12] Clopeau T., Ferrin J. L., Gilbert R. P., Mikelić A. *Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part II* (Math. Comp. Modelling. – 2001. – Vol. 33. – P. 821–841).

[13] Мейрманов А. М. *Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах* (Сиб. матем. журн., 48:3 (2007), 645—667).

[14] Мейрманов А. М. *Неизотермическая фильтрация и сейсмоакустика в пористых грунтах: уравнения термовязкоупругости и уравнения Ламе* (Сб. статей/ Дифференциальные уравнения и динамические системы, Тр. МИАН. М.: Изд–во МАИК. – 2008. – Вып. 261. – С. 210–219).

[15] Мейрманов А. М. *Определение акустических и фильтрационных характеристик термоупругих пористых сред: уравнения термоупругости Био* (Матем. сб. – 2008. – Т. 199. - №3 – С. 45–68).

[16] Мейрманов А. М. *Уравнения акустики в упругих пористых средах* (Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13 – №2 – С. 98–110).

[17] Зубкова А. В., Саженков С. А. *Эффективное уравнение турбулентной диффузии в трещиновато–пористой среде* (Известия Алтайского гос. ун–та, Барнаул – 2012 – Вып. 1(73) – С. 47–54).

[18] Зубкова А. В., Саженков С. А., Саженкова Е. В. *Усреднение изотермической трехфазной задачи пороупругости* (Сборник научных статей международной школы–семинара "Ломоносовские чтения на Алтае" в 4-х частях, Барнаул: АлтГПА, 20–23 ноября 2012, часть II, стр.163–167).

[19] Зубкова А. В. *Усреднение изотермической трехфазной задачи пороупругости, подчиненной схеме Рахматулина* (Матер. XLXI МНСК, НГУ, 2013, стр. 188).

[20] Зубкова А. В. *Усреднение уравнений динамики двухфазной сжимаемой среды в упругом пористом грунте* (МАК—2012. Материалы четырнадцатой региональной конференции по математике, Барнаул, июнь 2012 г. — Барнаул: Изд–во Алт. ун–та, 2012. — С. 43).

[21] Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики* (М.: Наука, 1973).

[22] Gilbert R. P., Mikelić A. *Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I* (Nonlinear Anal. – 2000. – Vol. 40. – P. 185–212).

[23] Lions, J.–L., Dautray, R., Sneddon, I. N., Craig, A. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology – Volume 5: Evolution Problems I* (Berlin, Springer, 1990).

[24] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа* (М.: Наука, 1973).

[25] *В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник,* Усреднение дифференциальных операторов, М. Физматлит, 1993.