Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Новосибирский государственный университет

Механико–математический факультет
Кафедра теоретической механики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

ЗУБКОВА Анна Владимировна

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ В МНОГОМАСШТАБНОМ СЛУЧАЕ

Научный руководитель
канд. физ.–мат. наук, доцент
С. А. Саженков

Новосибирск 2011

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению переноса массы в трещиновато-пористой микроструктуре. Общим местом при изучении математических моделей микроструктур является наличие малого параметра, выражающего собой отношение характерных размеров. Нами рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^k}\mathrm{div}_x(\vec{a}^\varepsilon u^\varepsilon) = D_0 \Delta_x u^\varepsilon,$$

где $\vec{a}^\varepsilon = \vec{a}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right)$, $\vec{a}\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ — заданная гладкая вектор-функция, 1–периодическая по $\vec{y}$ и $\vec{z}$, соленоидальная, т. е. $\mathrm{div}_x\vec{a} = \mathrm{div}_y\vec{a} = \mathrm{div}_z\vec{a} = 0$. Среднее значение $\vec{a}$ на периоде $Z = (0, 1)$ равно нулю:

$$\int\limits_Z \vec{a}\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)\, d\vec{z} = 0.$$

D_0 — постоянный положительный коэффициент, ε — положительный малый параметр, степень k равна 1 или 2. Уравнение снабжается начальными данными и граничным условием

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u^0(\vec{x}), \quad u^0 \in L^2(\Omega), \quad u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь $\vec{x}$ — макроскопическая переменная. Наличие переменной $\frac{\vec{x}}{\varepsilon}$ отвечает за мезоскопический масштаб, на уровне трещин. Переменная $\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}$ — микроскопический уровень, уровень пор.

Объект нашего исследования — уравнения, в которых присутствует малый параметр. Нас интересуют предельные уравнения, возникающие при стремлении ε к нулю, то есть уравнения, описывающие эффективные режимы.

Большое внимание в литературе уделяется уравнению

$$u_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\nabla \cdot (a^\varepsilon u^\varepsilon) = D_0 \Delta u^\varepsilon,$$

где $a^\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$, $D_0 > 0$ —молекулярная диффузия. Предполагается, что $\langle a \rangle = 0$. Маклафлином и др. [1] было показано, что при стремлении ε к 0 решение этого уравнения сильно в $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ сходится к решению $u_t = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (D_0\delta_{ij} + D_{ij}) u_{x_i x_j}$. Здесь $D_T = (D_{ij})$ — тензор турбулентной диффузии. Остаётся открытым вопрос о поведении D_T при $D_0 \to 0$.

Вейнаном И [2] рассматривалось транспортное уравнение микроструктуры, где $a^\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$:

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + \nabla_x \cdot (a^\varepsilon(x) f(u^\varepsilon)) = 0 \\ u^\varepsilon(x, 0) = U_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = u_0^\varepsilon(x). \end{cases}$$

Одним из последних достижений была работа А. М. Мейрманова, где рассматривалась задача о нахождении эффективных режимов для системы уравнений Стокса [3].

Для получения эффективных режимов нами используется метод многомасштабной сходимости, сконструированный Аллером и Брианом [4]. А так же применяется метод формальных асимптотических разложений Бенсуссана, Лионса и Папаниколау [5].

Работа прошла опробацию на XLIX Международной студенческой конференции. Опубликован тезис [6].

Я выражаю благодарность своему научному руководителю С. А. Саженкову за предложенные задачи, а также за поддержку и внимание на всём протяжении написания данной работы.

1. ОСНОВЫ МНОГОМАСШТАБНОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ

Настоящая глава содержит сводку известных положений теории многомасштабной сходимости. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — n положительных функций от $\varepsilon > 0$, которые сходятся к 0 при $\varepsilon \to 0$. Предполагается, что

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = 0 \quad \forall k \in 1, \ldots, n-1.$

Определение 1. *[4, опр. 2.2] Для любой Y_k–периодической функции (для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$) $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ существует осциллирующая функция $[\phi]_\varepsilon$, определённая по правилу:*

$$[\phi]_\varepsilon(x) = \phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{x}{\varepsilon_n}\right).$$

Определение 2. *[4, опр. 2.3] Последовательность $u_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ (n+1)–масштабно сходится к $u_0(x, y_1, \ldots, y_n) \in L^2(\Omega \times Y_1 \times \ldots \times Y_n)$, если*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega u_\varepsilon(x)[\phi]_\varepsilon(x)\, dx = \int\limits_\Omega \int\limits_{Y_1} \ldots \int\limits_{Y_n} u_0(x, y_1, \ldots, y_n)\phi(x, y_1, \ldots, y_n)\, dx\, dy_1 \ldots dy_n \quad (1.1)$$

для любой функции $\phi \in L^2[\Omega; C_{per}(Y_1 \times \ldots \times Y_n)]$. Обозначение: $u_\varepsilon \overset{(n+1)-sc}{\longrightarrow} u_0(x, y_1, \ldots, y_n)$.

<u>Замечание:</u> индекс *per* означает 1–периодичность по переменным $y_1, \ldots, y_n$.

Теорема 1. *[4, т. 2.5] Пусть* u_ε *— последовательность функций из* $L^2(\Omega)$*, которые (n+1)–масштабно сходятся к* $u_0(x, y_1, \dots, y_n)$ *и удовлетворяют условию*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||u_\varepsilon||_{L^2(\Omega)} = ||u_0||_{L^2(\Omega \times Y_1 \times \ldots \times Y_n)}.$$

Тогда для любой последовательности v_ε*, которая (n+1)–масштабно сходится к* $v_0(x, y_1, \dots, y_n)$*, имеем*

$$u_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x) \xrightarrow{w} \int\limits_{Y_1} \dots \int\limits_{Y_n} u_0(x, y_1, \dots, y_n) v_0(x, y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n$$

слабо в $L^1(\Omega)$*.*

Более того, если $u_0(x, y_1, \dots, y_n) \in L^2[\Omega; C_{per}(Y_1 \times \ldots \times Y_n)]$*, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big|\Big| u_\varepsilon - [u_0]_\varepsilon \Big|\Big|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Теорема 2. *[4, т. 2.6] Для любой ограниченной последовательности* u_ε *в* $H^1(\Omega)$ *существует функция* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *и n функций* $u_k(x, y_1, \dots, y_n) \in L^2[\Omega \times Y_1 \times \ldots \times Y_k; H^1_{per}(y_k)]$*, т. ч. с точностью до подпоследовательности*

$$u_\varepsilon \xrightarrow{(n+1)-sc} u(x),$$

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{(n+1)-sc} \nabla u(x) + \sum_{k=1}^{n} \nabla_{y_k} u_k(x, y_1, \dots, y_k).$$

Более того, для любого набора (n+1) функций $(u, u_1, \dots, u_n)$ *существует ограниченная последовательность* u_ε *в* $H^1(\Omega)$*, (n+1)–масштабно сходящаяся к нему.*

Лемма 1. *[4, следствие 3.4] Пусть* $\phi \in \mathcal{D}[\Omega; C^{\infty}_{per}(Y_1, \ldots, Y_n)]$ *– функции такие, что для* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *имеем*

$$\int\limits_{Y_k} \ldots \int\limits_{Y_n} \phi \, dy_k \ldots dy_n = 0.$$

Предполагая, что шкалы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *вполне разделённые, т. е.*

$$\exists m \in \mathbb{N}, m \geq 0 \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon_k} \left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \right)^m = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n-1;$$

имеем $\frac{1}{\varepsilon_k}[\phi]_\varepsilon$ *ограничено в* $H^{-1}(\Omega)$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Математическая постановка задачи

В пространственно-временном цилиндре $Q_T := \Omega \times (0, T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, $T = const > 0$, рассматривается линейное параболическое уравнение

$$u_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^k}\vec{a}^\varepsilon \cdot \nabla_x u^\varepsilon = D_0 \Delta_x u^\varepsilon, \tag{2.1}$$

D_0 — постоянный положительный коэффициент, ε — положительный малый параметр, степень k равна 1 или 2. Имеются начальные данные и граничное условие:

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u^0(\vec{x}), \quad u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.2}$$

$$0 \le u^0 \le 1. \tag{2.3}$$

Здесь $\vec{a}^\varepsilon = \vec{a}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right)$, $\vec{a}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ — заданная функция, т. ч.

$$\mathrm{div}_x \vec{a} = \mathrm{div}_y \vec{a} = \mathrm{div}_z \vec{a} = 0, \tag{2.4}$$

$$\int\limits_Z \vec{a}\, d\vec{z} = 0. \tag{2.5}$$

В силу известной теории уравнений в частных производных [7, гл. III, §3, теорема 3.2] имеем

Теорема 3. *При фиксированном ε задача (2.1),(2.2) однозначно разрешима в классе $\overset{\circ}{V}{}_2^{0,1}(Q_T)$ при любых $f \in L_{2,1}(Q_T)$, если выполнено предположе-*

ние:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{\varepsilon^k}a_i^{\varepsilon}\right)} \le \mu^{\varepsilon}. \qquad (2.6)$$

Пространство $\overset{\circ}{V}{}_2^{0,1}(Q_T) = V_2^{0,1}(Q_T) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(Q_T)$ — подпространство $V_2^{0,1}(Q_T)$. В нём плотны гладкие функции, равные нулю вблизи $S_T = \{(x,t) \in E_{n+1} : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$.

$V_2^{0,1}(Q_T)$ — подпространство $V_2(Q_T)$, элементы которого имеют на сечениях Ω_t следы из $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$, непрерывно меняющихся с $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Omega)$.

$V_2(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из элементов $W_2^{0,1}(Q_T)$, имеющих конечную норму $|u|_{Q_T} = \underset{0\le t\le T}{esssup}||u(x,t)||_{2,\Omega} + ||u_x||_{2,Q_T}$.

2.2. Обобщённое решение

Запишем обобщённую постановку задачи. Для этого возьмём бесконечно гладкую функцию $\Phi(\vec{x},t)$, т. ч.

$$\Phi|_{t=T} = 0, \quad \Phi|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (2.7)$$

Домножаем уравнение (2.1) на Φ, интегрируем на Ω, затем интегрируем по частям в первом слагаемом в левой части и в правой части. Получаем

$$\int\limits_{Q_T} u_t^{\varepsilon}\Phi\, d\vec{x}\, dt = -\int\limits_{\Omega} u^0(\vec{x})\Phi(\vec{x},0)\, d\vec{x} - \int\limits_{Q_T} u^{\varepsilon}\Phi_t\, d\vec{x}\, dt, \qquad (2.8)$$

т. к.

$$\int\limits_{\Omega} u^{\varepsilon}(\vec{x},T)\Phi(\vec{x},T)\, d\vec{x} = 0. \qquad (2.9)$$

$$\int\limits_{Q_T} D_0 \Delta_x u^\varepsilon \Phi \, d\vec{x}\, dt = -\int\limits_{Q_T} D_0 \nabla_x u^\varepsilon \cdot \nabla_x \Phi \, d\vec{x}\, dt, \tag{2.10}$$

с учётом финитности Φ.

В силу этих рассуждений получим следующее понятие обобщённого решения задачи (2.1),(2.2):

Определение 3. *Обобщённым решением $u^\varepsilon = u^\varepsilon(\vec{x}, t)$ задачи (2.1),(2.2) называется функция из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{0,1}(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному равенству*

$$\int\limits_{Q_T} D_0 \nabla_x u^\varepsilon \cdot \nabla_x \Phi \, d\vec{x}\, dt + \frac{1}{\varepsilon^k} \int\limits_{Q_T} (\vec{a}^\varepsilon \cdot \nabla_x u^\varepsilon) \Phi \, d\vec{x}\, dt =$$
$$\int\limits_{Q_T} u^\varepsilon \Phi_t \, d\vec{x}\, dt + \int\limits_{\Omega} u^0(\vec{x}) \Phi(\vec{x}, 0)\, d\vec{x}, \tag{2.11}$$

при любых Φ, т. ч. $\Phi|_{t=T} = 0$, $\Phi|_{\partial\Omega} = 0$.

2.3. Равномерные оценки

Имеем энергетическое неравенство [7, гл. III, §3, (3.14)]

$$|u^\varepsilon|_{Q_T} \le c(t) ||u^\varepsilon(\vec{x}, 0)||_{2,\Omega} \equiv c(t) ||u^0(\vec{x})||_{Q_T}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.12}$$

Функция $c(t)$ определяется величиной T и постоянной D_0.

Теорема 4. *[8, гл. III, т. 7.2] Пусть $u(\vec{x}, t)$ есть обобщённое решение из $\overset{\circ}{V}{}_2^{0,1}(Q_T)$ уравнения (2.1), коэффициенты которого $b_i = \frac{1}{\varepsilon^k} a_i^\varepsilon$ удовлетворяют условиям*

$$\left\| \sum_{i=1}^n b_i^2 \right\|_{q,r,Q_T} \le \mu_1^\varepsilon, \quad q, r > 0,$$

и

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1,$$

$$q \in \left(\frac{n}{2}, \infty\right], r \in [1, \infty)\,, \textit{при } n \geq 2,$$

$$q \in [1, \infty), r \in [1, 2]\,, \textit{при } n = 1.$$

Тогда для почти всех $(\vec{x}, t)$ *из* Q_T *имеем* $0 \leq u^\varepsilon \leq 1$.

Здесь $\|u\|_{q,r,Q_T} = \left(\int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega |u(x,t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\right)^{\frac{1}{r}}, \quad q \geq 1, r \geq 1.$

3. СЛУЧАЙ k=1

На основании метода Аллера-Бриана [4] в силу приведённых выше оценок возможен переход к трёхмасштабному пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\xrightarrow{3-sc} u^*(\vec{x},t), \\ \nabla_x u^\varepsilon &\xrightarrow{3-sc} \nabla_x u^* + \nabla_y u_1(\vec{x},\vec{y},t) + \nabla_z u_2(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t), \\ \Phi^\varepsilon &\xrightarrow{3-sc} \Phi(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t), \\ \vec{a} &\xrightarrow{3-sc} a^*(\vec{x},t). \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует справедливость следующей леммы

Лемма 2. $\forall \psi \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}^3)$ *семейство* $\left\{a_i^\varepsilon \psi\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)\right\}$, $i = 1{,}2{,}3$, *равномерно по* ε *ограничено в* $H^{-1}(\Omega)$.

Из леммы 2 следует, что

$$\left|\int\limits_{Q_T} \frac{1}{\varepsilon}\vec{a}^\varepsilon u^\varepsilon \cdot \nabla_x \phi \, d\vec{x} dt\right| \le \varepsilon \left\|\frac{1}{\varepsilon^2}\vec{a}^\varepsilon u^\varepsilon\right\|_{H^{-1}} \cdot \|u^\varepsilon\|_{H^1} \cdot \|\nabla_x \phi\|_C \le \varepsilon c_1 c_2 \|\nabla_x \phi\|_C \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Таким образом, получим следующую задачу:

Задача А. Требуется найти $u^* \in \overset{\circ}{V}{}^{0,1}_2(Q_T)$, удовлетворяющую следующему уравнению

$$u^*_t = D_0 \Delta_x u^*, \tag{3.1}$$

и начальным и граничным условиям

$$u^*|_{t=0} = u^0(\vec{x}), \quad u^*|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.2}$$

4. СЛУЧАЙ k=2

4.1. Метод формальных асимптотических разложений

Воспользуемся методом формальных асимптотических разложений, описанном в книге Бенсуссана, Лионса, Папаниколау [5]. Обозначим

$$A^{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right). \tag{4.1}$$

Имеем

$$A^{\varepsilon} = \varepsilon^{-4} A_1 + \varepsilon^{-3} A_2 + \varepsilon^{-2} A_3 + \varepsilon^{-1} A_4 + A_5, \tag{4.2}$$

где

$$A_1 = a_i \frac{\partial}{\partial z_i} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}. \tag{4.3}$$

$$A_2 = a_i \frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{4.4}$$

$$A_3 = A_4 = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}. \tag{4.5}$$

$$A_5 = \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим u^{ε} в виде

$$u(\vec{x}, t) = \bar{u}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right) + \varepsilon u^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right) + \varepsilon^2 u^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right) + \varepsilon^3 u^{(3)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right) + \varepsilon^4 u^{(4)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon}, \frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}, t\right), \tag{4.7}$$

где $\bar{u}, u^{(i)}$ — 1–периодические по $\vec{y}, \vec{z}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

Тогда

$$\nabla_x u^\varepsilon = \nabla_x \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon^2}\nabla_z \bar{u} + \varepsilon \nabla_x u^{(1)} + \nabla_y u^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_z u^{(1)} +$$
$$\varepsilon^2 \nabla_x u^{(2)} + \varepsilon \nabla_y u^{(2)} + \nabla_z u^{(2)} + \varepsilon^3 \nabla_x u^{(3)} + \varepsilon^2 \nabla_y u^{(3)} + \varepsilon \nabla_z u^{(3)} +$$
$$\varepsilon^4 \nabla_x u^{(4)} + \varepsilon^3 \nabla_y u^{(4)} + \varepsilon^2 \nabla_z u^{(4)}, \quad (4.8)$$

$$\Delta_x u^\varepsilon = \Delta_x \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_y \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon^4}\Delta_z \bar{u} + \varepsilon \Delta_x u^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon}\Delta_y u^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon^3}\Delta_z u^{(1)} +$$
$$\varepsilon^2 \Delta_x u^{(2)} + \Delta_y u^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_z u^{(2)} + \varepsilon^3 \Delta_x u^{(3)} + \varepsilon \Delta_y u^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon}\Delta_z u^{(3)} +$$
$$\varepsilon^4 \Delta_x u^{(4)} + \varepsilon^2 \Delta_y u^{(4)} + \Delta_z u^{(4)}, \quad (4.9)$$

$$u_t^\varepsilon = \bar{u}_t + \varepsilon u_t^{(1)} + \varepsilon^2 u_t^{(2)} + \varepsilon^3 u_t^{(3)} + \varepsilon^4 u_t^{(4)}. \quad (4.10)$$

Из (2.1) при $k = 2$ следует

$$\bar{u}_t + \varepsilon u_t^{(1)} + \varepsilon^2 u_t^{(2)} + \varepsilon^3 u_t^{(3)} + \varepsilon^4 u_t^{(4)} +$$
$$\vec{a} \cdot \Bigg(\frac{1}{\varepsilon^2}\nabla_x \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon^3}\nabla_y \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon^4}\nabla_z \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_x u^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon^2}\nabla_y u^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon^3}\nabla_z u^{(1)} +$$
$$\nabla_x u^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y u^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon^2}\nabla_z u^{(2)} + \varepsilon \nabla_x u^{(3)} + \nabla_y u^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_z u^{(3)} +$$
$$\varepsilon^2 \nabla_x u^{(4)} + \varepsilon \nabla_y u^{(4)} + \nabla_z u^{(4)} \Bigg) =$$
$$D_0 \Bigg(\Delta_x \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_y \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon^4}\Delta_z \bar{u} + \varepsilon \Delta_x u^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon}\Delta_y u^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon^3}\Delta_z u^{(1)} +$$
$$\varepsilon^2 \Delta_x u^{(2)} + \Delta_y u^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_z u^{(2)} + \varepsilon^3 \Delta_x u^{(3)} + \varepsilon \Delta_y u^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon}\Delta_z u^{(3)} +$$
$$\varepsilon^4 \Delta_x u^{(4)} + \varepsilon^2 \Delta_y u^{(4)} + \Delta_z u^{(4)} \Bigg). \quad (4.11)$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при степенях ε, получим

$$\varepsilon^{-4}: \quad \vec{a} \cdot \nabla_z \bar{u} = D_0 \Delta_z \bar{u}. \tag{4.12}$$

$$\varepsilon^{-3}: \quad \vec{a} \cdot \left(\nabla_y \bar{u} + \nabla_z u^{(1)}\right) = D_0 \Delta_z u^{(1)}. \tag{4.13}$$

$$\varepsilon^{-2}: \quad \vec{a} \cdot \left(\nabla_x \bar{u} + \nabla_y u^{(1)} + \nabla_z u^{(2)}\right) = D_0 \left(\Delta_y \bar{u} + \Delta_z u^{(2)}\right). \tag{4.14}$$

$$\varepsilon^{-1}: \quad \vec{a} \cdot \left(\nabla_x u^{(1)} + \nabla_y u^{(2)} + \nabla_z u^{(3)}\right) = D_0 \left(\Delta_y u^{(1)} + \Delta_z u^{(3)}\right). \tag{4.15}$$

$$\varepsilon^{0}: \quad \bar{u}_t + \vec{a} \cdot \left(\nabla_x u^{(2)} + \nabla_y u^{(3)} + \nabla_z u^{(4)}\right) = D_0 \left(\Delta_x \bar{u} + \Delta_y u^{(2)} + \Delta_z u^{(4)}\right). \tag{4.16}$$

В терминах A_i:

$$A_1 \bar{u} = 0. \tag{4.17}$$

$$A_1 u^{(1)} + A_2 \bar{u} = 0. \tag{4.18}$$

$$A_1 u^{(2)} + A_2 u^{(1)} + A_3 \bar{u} = 0. \tag{4.19}$$

$$A_1 u^{(3)} + A_2 u^{(2)} + A_3 u^{(1)} = 0. \tag{4.20}$$

$$A_1 u^{(4)} + A_2 u^{(3)} + A_3 u^{(2)} + A_5 \bar{u} = 0. \tag{4.21}$$

Теорема 5. *[9, гл. III, §1, т. 1.3] Если коэффициенты* a_{ij}, a_i, a *в уравнении* $a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x)$ *принадлежат* $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, *удовлетворяют неравенству* $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu\xi^2$, $\nu = const > 0$, $a(x) \leq 0$ *и* $\partial\Omega$ *принадлежит* $C^{2+\alpha}$, *то задача*

$$a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x),$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi(x)$$

однозначно разрешима в $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ *при всех* $f(x)$ *из* $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ *и* $\phi(x)$ *из* $C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$.

Рассмотрим уравнение (4.12), где x и y — параметры:

$$\vec{a}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\cdot\nabla_z\bar{u}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t)=D_0\Delta_z\bar{u}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t), \tag{4.22}$$

$\bar{u}$ — 1–периодическая по $\vec{z}$.

Это эллиптическое уравнение в силу вышеприведённой теоремы (5) имеет единственное решение $\bar{u}=\bar{u}(\vec{x},\vec{y},t)$.

Выберем $u^{(1)}$ в виде:

$$u^{(1)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t)=\sum_{k=1}^{3}U_k^{(1)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\frac{\partial\bar{u}(\vec{x},\vec{y},t)}{\partial y_k}+\tilde{U}^{(1)}(\vec{x},\vec{y}). \tag{4.23}$$

Тогда из (4.13) следует:

$$\sum_{i=1}^{3}a_i\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\right)=D_0\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2U_k^{(1)}}{\partial z_i^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}. \tag{4.24}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\left[\sum_{i=1}^{3}a_i\left(\delta_{ik}+\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\right)\right]=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}\left[D_0\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2U_k^{(1)}}{\partial z_i^2}\right]. \tag{4.25}$$

$$\sum_{i=1}^{3}a_i\left(\delta_{ik}+\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial z_i}\right)=D_0\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2U_k^{(1)}}{\partial z_i^2},\quad k=1,2,3. \tag{4.26}$$

Задача на ячейке:

$$a_k+\vec{a}\cdot\nabla_zU_k^{(1)}=D_0\Delta_zU_k^{(1)},\quad k=1,2,3, \tag{4.27}$$

$$U_k^{(1)}\text{ — 1–периодическая по }\vec{z}, \tag{4.28}$$

$$\left\langle U_k^{(1)}\right\rangle_Z=0. \tag{4.29}$$

Согласно теореме (5) мы можем утверждать следующее:

Лемма 3. *Задача (4.27)–(4.29) имеет единственное решение* $U_k^{(1)} \in C^{2+\alpha}(Z)$.

Подставим выражение (4.23) в (4.14), получим

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial y_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_k} + U_k^{(1)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_k \partial y_i} + \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_i} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_i} \right) \right) = \sum_{i=1}^{3} D_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z_i^2} \right). \quad (4.30)$$

В терминах A_j:

$$A_2 u^{(1)} + A_3 \bar{u} = -A_1 u^{(2)}. \quad (4.31)$$

Интегрируем по $\vec{z}$.

Т. к.

$$\int\limits_Z A_1 u^{(2)}\, d\vec{z} = \int\limits_Z \sum_{i=1}^{3} \left(a_i \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_i} - D_0 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z_i^2} \right) d\vec{z} = 0,$$

получим

$$\int\limits_Z \left(A_2 u^{(1)} + A_3 \bar{u} \right) d\vec{z} = \int\limits_Z \sum_{i=1}^{3} \left[a_i \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial y_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_k} + U_k^{(1)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_k \partial y_i} + \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_i} \right) \right) - D_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_i^2} \right] d\vec{z} = 0. \quad (4.32)$$

Имеем

$$\int\limits_Z a_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\, d\vec{z} = \langle a_i \rangle_Z \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = 0,$$

$$\int\limits_Z a_i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_i}\, d\vec{z} = \langle a_i \rangle_Z \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y_i} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{3}\left(-D_0\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y_i^2}+\left\langle a_i\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial y_i}\right\rangle_Z\frac{\partial\bar{u}}{\partial y_k}+\left\langle a_iU_k^{(1)}\right\rangle_Z\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y_k\partial y_i}\right)=0. \qquad (4.33)$$

Покажем, что это уравнение эллиптического типа.

Рассмотрим $\mathbb{A}_1^{ij}=D_0\delta_{ij}-\left\langle a_iU_j^{(1)}\right\rangle_Z$.

Из (4.27) следует

$$\int\limits_Z\left(a_k+\vec{a}\cdot\nabla_zU_k^{(1)}\right)\phi\,d\vec{z}+\int\limits_Z D_0\nabla_zU_k^{(1)}\cdot\nabla_z\phi\,d\vec{z}=0,$$

где ϕ — 1–периодическая по $\vec{z}$.

Выберем в качестве $\phi:=U_j^{(1)}$.

$$\left\langle a_iU_j^{(1)}\right\rangle_Z=-\int\limits_Z\vec{a}\cdot\nabla_zU_k^{(1)}U_j^{(1)}\,d\vec{z}-\int\limits_Z D_0\nabla_zU_k^{(1)}\cdot\nabla_zU_j^{(1)}\,d\vec{z}.$$

Тогда $\mathbb{A}_1^{ij}=D_0\delta_{ij}+\int\limits_Z\vec{a}\cdot\nabla_zU_i^{(1)}U_j^{(1)}\,d\vec{z}+\int\limits_Z D_0\nabla_zU_i^{(1)}\cdot\nabla_zU_j^{(1)}\,d\vec{z}$.

Возьмём $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^3$.

$$\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{A}_1^{ij}\xi_i\xi_j=$$

$$D_0|\vec{\xi}|^2+\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_Z\vec{a}\cdot\nabla_z\left(U_i^{(1)}\xi_i\right)\left(U_j^{(1)}\xi_j\right)\,d\vec{z}+$$

$$\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_Z D_0\nabla_z\left(U_i^{(1)}\xi_i\right)\cdot\nabla_z\left(U_j^{(1)}\xi_j\right)\,d\vec{z}=$$

$$D_0|\vec{\xi}|^2+\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_Z\left(\vec{a}\cdot\nabla_z\Psi\right)\Psi\,d\vec{z}+\int\limits_Z D_0|\nabla_z\Psi|^2\,d\vec{z}\geq D_0|\vec{\xi}|^2, \qquad (4.34)$$

где $\Psi:=\sum\limits_{k=1}^{3}U_k^{(1)}\xi_k$, с учётом того, что

$$\int\limits_Z(\vec{a}\cdot\nabla_z\Psi)\Psi\,d\vec{z}=\int\limits_Z\vec{a}\cdot\nabla_z\frac{\Psi^2}{2}\,d\vec{z}=-\int\limits_Z(\mathrm{div}_x\vec{a})\frac{\Psi}{2}=0,$$

$$\int_Z D_0 |\nabla_z \Psi|^2 \, d\vec{z} \ge 0.$$

Следовательно, $\mathbb{A}_1 > 0$.

В силу 1–периодичности $\bar{u}$ по $\vec{y}$ задача (4.33) имеет единственное решение $\bar{u} = \bar{u}(\vec{x}, t)$ (теорема 5).

Тогда

$$u^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, t) = \tilde{U}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}). \tag{4.35}$$

Выберем $u^{(2)}$ в виде:

$$u^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, t) = \sum_{k=1}^{3} U_k^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \left(\frac{\partial \bar{u}(\vec{x}, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y})}{\partial y_k} \right) + \tilde{U}^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}). \tag{4.36}$$

Тогда из (4.14) следует

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k} + \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial z_i} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k} \right) \right) \right) = \sum_{i,k=1}^{3} D_0 \frac{\partial^2 U_k^{(2)}}{\partial z_i^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k} \right). \tag{4.37}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k} \right) \cdot a_i \left(\delta_{ik} + \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial z_i} \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k} \right) \cdot \left(D_0 \frac{\partial^2 U_k^{(2)}}{\partial z_i^2} \right), \quad k = 1, 2, 3. \tag{4.38}$$

$$a_k + \vec{a} \cdot \nabla_z U_k^{(2)} = D_0 \Delta_z U_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{4.39}$$

$$U_k^{(2)} \text{ — 1–периодическая по } \vec{z}, \tag{4.40}$$

$$\left\langle U_k^{(2)} \right\rangle_Z = 0. \tag{4.41}$$

Эта задача на ячейке совпала с задачей на ячейке (4.27)–(4.29).

Подставим (4.35) и (4.36) в (4.15):

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial \tilde{U}_k^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y_i} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{U}_k^{(1)}}{\partial y_k} \right) + U_k^{(2)} \frac{\partial^2 \tilde{U}_k^{(1)}}{\partial y_k \partial y_i} + \frac{\partial \tilde{U}^{(2)}}{\partial y_i} + \frac{\partial u^{(3)}}{\partial z_i} \right) = \sum_{i=1}^{3} D_0 \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial z_i^2} \right). \quad (4.42)$$

В терминах A_j:

$$A_2 u^{(2)} + A_3 u^{(1)} = -A_1 u^{(3)}. \quad (4.43)$$

Так как

$$\int\limits_Z A_1 u^{(3)}\, d\vec{z} = \int\limits_Z \sum_{i=1}^{3} \left(a_i \frac{\partial u^{(3)}}{\partial z_i} - D_0 \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial z_i^2} \right) d\vec{z} = 0,$$

то

$$\int\limits_Z (A_2 u^{(2)} + A_3 u^{(1)})\, d\vec{z} = 0.$$

С учётом того, что

$$\int\limits_Z a_i \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial x_i}\, d\vec{z} = \int\limits_Z a_i \frac{\partial \tilde{U}^{(2)}}{\partial y_i}\, d\vec{z} = 0,$$

имеем

$$\sum_{i,k=1}^{3} \left(-D_0 \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_i^2} + \left\langle a_i \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial y_i} \right\rangle_Z \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k} \right) + \left\langle a_i U_k^{(2)} \right\rangle_Z \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(1)}}{\partial y_k \partial y_i} \right) = 0. \quad (4.44)$$

$\mathbb{A}_2^{ij} = D_0 \delta_{ij} - \left\langle a_i U_j^{(2)} \right\rangle_Z > 0$ согласно предыдущим рассуждениям, т. к. уравнение для $U_j^{(2)}$ такое же, как для $U_j^{(1)}$.

Следовательно, в силу 1–периодичности $\tilde{U}^{(1)}$ по $\vec{y}$

$$\tilde{U}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{\tilde{U}}^{(1)}(\vec{x}).$$

Значит,

$$u^{(1)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t) = \tilde{\tilde{U}}^{(1)}(\vec{x}). \tag{4.45}$$

$$u^{(2)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t) = \sum_{k=1}^{3} U_k^{(2)}(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \frac{\partial \bar{u}(\vec{x},t)}{\partial x_k} + \tilde{U}^{(2)}(\vec{x},\vec{y}). \tag{4.46}$$

Из (4.16), с учётом того, что

$$\int\limits_Y \int\limits_Z A_2 u^{(3)}\, d\vec{y}\, d\vec{z} = \int\limits_Y \int\limits_Z a_i \frac{\partial u^{(3)}}{\partial y_i}\, d\vec{y}\, d\vec{z} = 0 \tag{4.47}$$

и

$$\int\limits_Y \int\limits_Z A_1 u^{(4)}\, d\vec{y}\, d\vec{z} = \int\limits_Y \int\limits_Z \left(a_i \frac{\partial u^{(4)}}{\partial z_i} - D_0 \frac{\partial^2 u^{(4)}}{\partial z_i^2} \right) d\vec{y}\, d\vec{z} = 0, \tag{4.48}$$

получим

$$\int\limits_Y \int\limits_Z \left(A_3 u^{(2)} + A_5 \bar{u} \right) d\vec{y}\, d\vec{z} = 0. \tag{4.49}$$

$$\int\limits_Y \int\limits_Z \left[a_i \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_i} - D_0 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y_i^2} + \bar{u}_t - D_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i^2} \right] d\vec{y}\, d\vec{z} = 0. \tag{4.50}$$

$$\int\limits_Y \int\limits_Z \left[a_i \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + a_i U_k^{(2)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_k \partial x_i} + a_i \frac{\partial \tilde{U}^{(2)}}{\partial x_i} - \right.$$
$$\left. D_0 \frac{\partial^2 U_k^{(2)}}{\partial y_i^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} - D_0 \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(2)}}{\partial y_i^2} + \bar{u}_t - D_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i^2} \right] d\vec{y}\, d\vec{z} = 0. \tag{4.51}$$

Так как

$$\int\limits_Y \int\limits_Z a_i \frac{\partial \tilde{U}^{(2)}}{\partial x_i}\, d\vec{y}\, d\vec{z} = \int\limits_Y \int\limits_Z D_0 \frac{\partial^2 U_k^{(2)}}{\partial y_i^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k}\, d\vec{y}\, d\vec{z} = \int\limits_Y \int\limits_Z D_0 \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(2)}}{\partial y_i^2}\, d\vec{y}\, d\vec{z} = 0, \tag{4.52}$$

то

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} \left\langle a_i \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial x_i} \right\rangle_{Y \times Z} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_k \partial x_i} \left\langle a_i U_k^{(2)} \right\rangle_{Y \times Z} + \bar{u}_t - D_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i^2} = 0. \tag{4.53}$$

В итоге приходим к следующей постановке:

Задача Б. Требуется найти $\bar u \in \overset{\circ}{V}{}_2^{0,1}(Q_T)$, удовлетворяющее эффективному эллиптическому уравнению

$$\bar u_t + \left\langle a_i \frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial x_i} \right\rangle_{Y\times Z} \frac{\partial \bar u}{\partial x_k} + \left(\left\langle a_i U_k^{(2)} \right\rangle_{Y\times Z} - D_0 \delta_{ik} \right) \frac{\partial^2 \bar u}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \qquad (4.54)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\bar u|_{t=0} = \bar u^0(\vec x), \quad \bar u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (4.55)$$

где $U_k^{(2)}$ находится из решения задачи на ячейке (4.39)–(4.41).

4.2. Метод многомасштабной гомогенизации

На основании метода Аллера–Бриана [4] в силу приведённых выше оценок возможен переход к трёхмасштабному пределу при $\varepsilon \to 0$.

$u^0(\vec x) \xrightarrow{w} \tilde u^0(\vec x)$ в $L^2(Q_T)$, $u^0 \xrightarrow{3-sc} \tilde u^0$, $u^\varepsilon \xrightarrow{w} u^*$ в $L^2(Q_T)$, $u^\varepsilon(\vec x, t) \xrightarrow{3-sc} u^*(\vec x, t)$.

Лемма 4. *Существуют подпоследовательность* $\left\{\frac{1}{\varepsilon^2} \vec a_k^{\varepsilon} u^{\varepsilon_k}\right\}_{k\to 0}$ *и функционал* $Q \in [C^1(\Omega) \times C^1_{per}(Y))]^*$ *такие, что*

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \frac{1}{\varepsilon_k^2} \int\limits_\Omega \vec a^{\varepsilon_k} u^{\varepsilon_k} \Psi_1\left(\frac{\vec x}{\varepsilon_k}\right) \Psi_2(\vec x)\, d\vec x = \left\langle Q, \Psi_1\Psi_2 \right\rangle, \qquad (4.56)$$

$\forall \Phi_1 \in C^1_{per}(Y), \Phi_2 \in C^1(\Omega)$.

Доказательство. Левую часть (4.56) определяет функционал Q^ε на $C^1(\Omega)\times$ $C^1_{per}(Y)$ по формуле

$$\Psi_1(\vec y)\Psi_2(\vec x) \mapsto \int\limits_\Omega \frac{1}{\varepsilon_k^2} \vec a^{\varepsilon_k} u^{\varepsilon_k} \Psi_1\left(\frac{\vec x}{\varepsilon_k}\right) \Psi_2(\vec x)\, d\vec x \equiv \left\langle Q^\varepsilon, \Psi_1\Psi_2 \right\rangle.$$

Очевидно, функционал Q^ε линеен. Из леммы (2) следует, что

$$|\langle Q^\varepsilon, \Psi_1\Psi_2\rangle| \le \big\|Q^\varepsilon\Psi_1\big\|_{H^{-1}}\big\|\Psi_2\big\|_{H^1} \le \big\|Q^\varepsilon\big\|_{H^{-1}}\big\|\Psi_1\big\|_{C^1}\big\|\Psi_2\big\|_{C^1}.$$

Так как $C^1(\Omega)\times C^1_{per}(Y)$ — сепарабельно, то по теореме Алаоглу существуют $\{Q^{\varepsilon_k}\}$ и $Q \in \big(C^1(\Omega)\times C^1_{per}(Y)\big)^*$ такие, что $Q^{\varepsilon_k} \to Q$ *–слабо в $\big(C^1(\Omega)\times C^1_{per}(Y)\big)^*$.

□

Напомним обобщённую постановку задачи:

$$\int\limits_{Q_T} D_0\nabla_x u^\varepsilon\cdot\nabla_x\Phi\, d\vec{x}\, dt - \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{Q_T}(\vec{a}^\varepsilon u^\varepsilon)\cdot\nabla_x\Phi\, d\vec{x}\, dt =$$
$$\int\limits_{Q_T} u^\varepsilon\Phi_t\, d\vec{x}\, dt + \int\limits_{\Omega} u^0(\vec{x})\Phi(\vec{x},0)\, d\vec{x}. \quad (4.57)$$

Процедура гомогенизации основана на специальном выборе пробной функции Φ.

Пусть $\Phi = \Phi(\vec{x},t)$. Тогда, при переходе к трёхмасштабному пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z} D_0\left(\nabla_x u^* + \nabla_y U(\vec{x},\vec{y},t) + \nabla_z W(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t)\right)\cdot\nabla_x\Phi\, d\vec{z}\, d\vec{y}\, d\vec{x}\, dt -$$
$$\langle Q,\nabla_x\Phi\rangle = \int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z} u^*\Phi_t\, d\vec{z}\, d\vec{y}\, d\vec{x}\, dt + \int\limits_{\Omega}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z}\tilde{u}^0(\vec{x})\Phi(\vec{x},0)\, d\vec{z}\, d\vec{y}\, d\vec{x}. \quad (4.58)$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z}\nabla_y U(\vec{x},\vec{y},t)\cdot\nabla_x\Phi\, d\vec{z}\, d\vec{y}\, d\vec{x}\, dt =$$
$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z}\nabla_z W(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t)\cdot\nabla_x\Phi\, d\vec{z}\, d\vec{y}\, d\vec{x}\, dt = 0,$$

имеем

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_Y\int\limits_Z D_0\nabla_x u^*\cdot\nabla_x\Phi\,d\vec z\,d\vec y\,d\vec x\,dt-\int\limits_Y\int\limits_Z\langle Q,\nabla_x\Phi\rangle\;d\vec z\,d\vec y=$$

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_Y\int\limits_Z u^*\Phi_t\,d\vec z\,d\vec y\,d\vec x\,dt+\int\limits_\Omega\int\limits_Y\int\limits_Z \tilde u^0(\vec x)\Phi(\vec x,0)\,d\vec z\,d\vec y\,d\vec x. \quad (4.59)$$

В дифференциальном виде:

$$u_t^*+\operatorname{div}_x\langle Q\rangle_Y-D_0\Delta_x u^*=0. \quad (4.60)$$

В (4.60) $\langle Q\rangle_Y$ — проекция Q на Y.

Пусть теперь $\Phi=\varepsilon\Phi_1(\vec x,t)\psi_1\left(\frac{\vec x}{\varepsilon}\right)$. Здесь и далее функции, зависящие от $\vec y=\frac{\vec x}{\varepsilon}$ и $\vec z=\frac{\vec x}{\varepsilon^2}$, являются 1–периодическими по $\vec y$ и $\vec z$. Тогда

$$\int\limits_{Q_T} D_0\nabla_x u^\varepsilon\cdot\left(\varepsilon\nabla_x\Phi_1(\vec x,t)\psi_1\left(\frac{\vec x}{\varepsilon}\right)+\Phi_1(\vec x,t)\cdot\nabla_y\psi_1\left(\frac{\vec x}{\varepsilon}\right)\right)\,d\vec x\,dt-$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{Q_T}\vec a^\varepsilon u^\varepsilon\cdot\left(\varepsilon\nabla_x\Phi_1(\vec x,t)\psi_1\left(\frac{\vec x}{\varepsilon}\right)+\Phi_1(\vec x,t)\cdot\nabla_y\psi_1\left(\frac{\vec x}{\varepsilon}\right)\right)\,d\vec x\,dt=$$

$$\varepsilon\int\limits_{Q_T}u^\varepsilon(\Phi_1)_t(\vec x,t)\psi_1\left(\frac{\vec x}{\varepsilon}\right)\,d\vec x\,dt+\varepsilon\int\limits_\Omega u^0(\vec x)\Phi_1(\vec x,0)\psi_1\left(\frac{\vec x}{\varepsilon}\right)\,d\vec x. \quad (4.61)$$

При $\varepsilon\to 0$, с учётом того, что

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_Y\int\limits_Z\nabla_x u^*(\vec x,t)\Phi_1\cdot\nabla_y\psi_1\,d\vec z\,d\vec y\,d\vec x\,dt=$$

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_Y\int\limits_Z\nabla_z W(\vec x,\vec y,\vec z,t)\Phi_1\cdot\nabla_y\psi_1\,d\vec z\,d\vec y\,d\vec x\,dt=0,$$

получим

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z} D_0\nabla_y U(\vec{x},\vec{y},t)\Phi_1(\vec{x},t)\cdot\nabla_y\psi_1(\vec{y})\,d\vec{z}\,d\vec{z}\,d\vec{y}\,dt-$$

$$\int\limits_{Y}\int\limits_{Z}\langle Q,\Phi_1\cdot\nabla_y\psi_1\rangle\;d\vec{z}\,d\vec{y}=0. \quad (4.62)$$

Это можно записать так:

$$\mathrm{div}_y Q - D_0\Delta_y U = 0. \quad (4.63)$$

Выберем $\Phi=\varepsilon^2\Phi_2(\vec{x},t)\psi_2\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)$. Перепишем (4.57) в виде:

$$-\int\limits_{Q_T} D_0 u^\varepsilon\Delta_x\Phi\,d\vec{x}\,dt+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{Q_T}(\vec{a}^\varepsilon\cdot\nabla_x u^\varepsilon)\Phi\,d\vec{x}\,dt=$$

$$\int\limits_{Q_T} u^\varepsilon\Phi_t\,d\vec{x}\,dt+\int\limits_{\Omega} u^0(\vec{x})\Phi(\vec{x},0)\,d\vec{x}. \quad (4.64)$$

Тогда получим

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z}\vec{a}^*\cdot\left(\nabla_x u^*(\vec{x},t)+\nabla_y U(\vec{x},\vec{y},t)\right)\Phi_2(\vec{x},t)\psi_2(\vec{y})\,d\vec{z}\,d\vec{z}\,d\vec{y}\,dt=0. \quad (4.65)$$

Возьмём $U(\vec{x},\vec{y},t)$ в виде

$$U(\vec{x},\vec{y},t)=U_k^1(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\frac{\partial u^*(\vec{x},t)}{\partial x_k}.$$

Тогда

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z}\frac{\partial u^*(\vec{x},t)}{\partial x_j}\left(a_j^*+\vec{a}^*\cdot\nabla_y U_j^1(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\right)\Phi_2(\vec{x},t)\psi_2(\vec{y})\,d\vec{z}\,d\vec{z}\,d\vec{y}\,dt=0.$$

Отсюда следует

$$a_j^*+\vec{a}^*\cdot\nabla_y U_j^1(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=0. \quad (4.66)$$

В (2.11) возьмём $\Phi = \varepsilon^2\Phi_3(\vec{x},t)\psi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)\phi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right)$.

$$\int\limits_{Q_T} D_0\nabla_x u^\varepsilon \cdot \left(\varepsilon^2\nabla_x\Phi_3(\vec{x},t)\psi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)\phi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right) + \right.$$

$$\left. \varepsilon\Phi_3(\vec{x},t)\cdot\nabla_y\psi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)\phi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right) + \Phi_3(\vec{x},t)\psi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla_z\phi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right)\right) d\vec{x}\,dt +$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{Q_T}\vec{a}^\varepsilon\cdot\nabla_x u^\varepsilon\Phi_3(\vec{x},t)\psi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)\phi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right) d\vec{x}\,dt =$$

$$\varepsilon\int\limits_{Q_T} u^\varepsilon(\Phi_3)_t(\vec{x},t)\psi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)\phi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right) d\vec{x}\,dt +$$

$$\varepsilon\int\limits_{\Omega} u^0(\vec{x})\Phi_3(\vec{x},0)\psi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right)\phi_3\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon^2}\right) d\vec{x}. \quad (4.67)$$

При переходе к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим:

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z} D_0\left(\nabla_x u^*(\vec{x},t) + \nabla_y U(\vec{x},\vec{y},t) + \nabla_z W(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t)\right)\times$$

$$\Phi_3(\vec{x},t)\psi_3(\vec{y})\cdot\nabla_z\phi_3(\vec{z})\,d\vec{z}\,d\vec{z}\,d\vec{y}\,dt +$$

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z}\vec{a}^*\cdot\left(\nabla_x u^*(\vec{x},t) + \nabla_y U(\vec{x},\vec{y},t) + \nabla_z W(\vec{x},\vec{y},\vec{z},t)\right)\times$$

$$\Phi_3(\vec{x},t)\psi_3(\vec{y})\phi_3(\vec{z})\,d\vec{z}\,d\vec{z}\,d\vec{y}\,dt = 0. \quad (4.68)$$

С учётом того, что

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z}\nabla_x u^*(\vec{x},t)\Phi_3\psi_3\cdot\nabla_z\phi_3\,d\vec{z}\,d\vec{y}\,d\vec{x}\,dt =$$

$$\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Y}\int\limits_{Z}\nabla_y U(\vec{x},\vec{y},t)\Phi_3\psi_3\cdot\nabla_z\phi_3\,d\vec{z}\,d\vec{y}\,d\vec{x}\,dt = 0,$$

окончательно получим:

$$\vec{a}^*\cdot\left(\nabla_x u^* + \nabla_y U + \nabla_z W\right) - D_0\Delta_z W = 0. \quad (4.69)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе были получены эффективные уравнения для уравнения переноса с молекулярной диффузией, содержащего малый параметр. В случае $k = 1$ на макроскопическом уровне присутствует только чистая диффузия, конвекция отсутствует. В случае $k = 2$ с помощью метода формальных асимптотических разложений удалось найти эффективное уравнение, содержащее конвективный член, а также диффузионный член. Помимо молекулярной диффузии есть турбулентная. Методом многомасштабной сходимости были получены уравнения для доказательства сильной сходимости решения, за исключение одного, замыкающего. Целью ближайшей работы является найти замыкающее уравнение и доказать сильную сходимость решения, тем самым на математически строгом уровне завершить обоснование процедуры гомогенизации.

Список литературы

[1] McLaughlin, D. W., Papanicolaou, G. C., and Pironneau, O. R. *Convection of microstructure and related problems* (SIAM J. Appl. Math. 45, 1985, 780-797).

[2] Weinan E *Homogenization of linear and nonlinear transport equations, Communications in Pure and Applied Mathematics* XLV:301-326, 1992).

[3] Meirmanov A. *Double porosity models for liquid filtration in incompressible poroelastic media* (Math. Models Methods Appl. Sci., 20:4, 2010, 635–659).

[4] G. Allaire, M. Briane *Multiscale convergence and reiterated homogenisation* (Proc. R. Soc. Edinb. 126, 1996).

[5] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis of periodic structures* (NH, 1978).

[6] Зубкова А. В. *Усреднение уравнения турбулентной диффузии в многомасштабном случае* (Матер. XLIX МНСК, НГУ, 2011, стр. 142).

[7] Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики* (М.: Наука, 1973).

[8] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* (М.: Наука, 1967).

[9] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа* (М.: Наука, 1973).