WS 16/17

Dr. rer. nat. Armin Rund
Institut für Mathematik und Wiss. Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

Numerische Mathematik I

12. Übung

Die Aufgaben werden besprochen am 25.01.2016

1. **Hermite-Interpolation**
   Gegeben sei die Funktion $f(x) = \exp(x)\sin(5x)$ und ihre Ableitung
   $$f'(x) = \exp(x)(\sin(5x) + 5\cos(5x)).$$
   Berechnen Sie das Hermite-Polynom auf dem Intervall $[0, 1]$ mit den Stützstellen in den Punkten 0 und 1 (ohne Verwendung eines Computers).

2. **Polynominterpolation**
   Schreiben Sie einen Pseudocode für die Funktion `c=interpolation(x,y)`, welcher den Koeffizientenvektor $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ des Newton-Polynoms $P_n(x)$ mit dem Schema der dividierten Differenzen berechnet. Eingabeparameter sind die Stützstellen $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit Stützwerten $y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Schreiben Sie zur Auswertung des Newton-Polynoms an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ eine weitere Funktion `p=auswertung(c,x,a)`, die das Horner Schema verwendet.

3. **Diskrete reelle Fourier-Transformation**

Eine 2π-periodische Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ist in äquidistanten Stützstellen $x_k = 2\pi k/n$, $k = 0, \ldots, n-1$ mit einem trigonometrischen Polynom P zu interpolieren, d.h.

$$P(x_k) = f_k = f(x_k), \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Diese Aufgabe ist eindeutig falls der Grad des trig. Polynoms P passend gewählt wird:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{a_0}{2} + \frac{a_{n/2}}{2} \cos(\frac{n}{2}x) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx), & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$a_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos(kx_j),$$

$$b_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin(kx_j).$$

Interpolieren Sie die beiden folgenden Datensätze mit passenden trigonometrischen Polynomen.

(a)

x_k	0	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
f_k	1	2	1

(b)

x_k	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$
f_k	0	1	0	1

Machen Sie jeweils eine Probe.