Dr. rer. nat. Armin Rund
Institut für Mathematik und Wiss. Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

WS 16/17

Numerische Mathematik I

11. Übung

Die Aufgaben werden besprochen am 18.01.2016

1. **Interpolation**

   (a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $P(x)$ zu den Daten (x_i, f_i), $i = 0, 1, 2$, die gegeben sind durch

   $$(x_0, f_0) = (0, 1), \quad (x_1, f_1) = (1, 2), \quad (x_2, f_2) = (3, 10)$$

   und werten Sie es an der Stelle $x = 2$ aus. Verwenden Sie Lagrange-Polynome.

   (b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zum Vergleich in der Newton-Basis

   (c) Welches Phänomen tritt typischerweise auf, wenn Sie sehr viele Daten mit einem Polynom interpolieren?

2. **Tschebyscheff-Polynome**

   Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome $T_k(x)$ bzgl. der positiven Gewichtsfunktion

   $$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

   orthogonal sind, d.h. dass

   $$\int_{-1}^{1} T_k(x) T_j(x) \omega(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{für } j = k = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{für } j = k > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. **Dividierte Differenzen**

   Sei Σ^n das n-dimensionale Standardsimplex

   $$\Sigma^n := \left\{ s = (s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \, : \, \sum_{s=0}^{n} s_i = 1 \text{ und } s_i \geq 0 \right\}.$$

   Beweisen Sie: Für die n-te dividierte Differenz einer n-mal stetig differenzierbaren Funktion f gilt

   $$[t_0, \ldots, t_n] f = \int_{\Sigma^n} f^{(n)} \left(\sum_{i=0}^{n} s_i t_i \right) \, \mathrm{d}s$$