



Numerische Mathematik I

9. Übung

**Die Aufgaben werden besprochen am 14.12.2016
(zusammen mit der Programmieraufgabe zur QR-Zerlegung)**

1. Bisektionsverfahren

Gesucht ist die Nullstelle von

$$f(x) = \sin\left(\ln(x) - \frac{3}{2}x\right) - 0.7$$

auf dem Intervall $[a, b] = [3, 4]$.

- (a) Berechnen Sie die Nullstelle näherungsweise mit dem Bisektionsverfahren. Führen Sie dazu 3 Schritte des Algorithmus durch.

Algorithm 1: Bisektionsverfahren

Input: Intervall $I_0 = [a, b] \subset \mathbb{R}$, stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$\text{sign}(f(a)f(b)) = -1$, Toleranz δ

Output: Näherung für Nullstelle c

```
1  $c = \frac{a+b}{2}$ ;  
2  $n = 0$ ;  
3 while  $b - a > 2\delta$  do // Intervallschachtelung  
4    $n = n + 1$ ;  
5   if  $f(c) = 0$  then STOP; // Nullstelle exakt gefunden  
6   if  $f(a)f(c) > 0$  then // Bestimme halbiertes Intervall um Nullstelle  
7      $a = c$ ;  
8   else  
9      $b = c$   
10   $I_n = [a, b]$ ;  
11   $c = \frac{a+b}{2}$ ;
```

- (b) Nach wie vielen Schritten weicht der Intervallmittelpunkt von den Intervallgrenzen von I_j um weniger als 10^{-4} ab?

2. Skalare nichtlineare Gleichung

Gesucht ist die Nullstelle von

$$f(x) = \sin\left(\ln(x) - \frac{3}{2}x\right) - 0.7$$

auf dem Intervall $[a, b] = [3, 4]$.

- (a) Bestimmen Sie die Lösung mit dem Newton-Verfahren (2 Schritte, Startwert 3.5).
- (b) Was sind die Vorteile und Nachteile der beiden Verfahren (Newton-Verfahren, Bisektionsverfahrens)?

3. Newton-Verfahren (2D)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 - 1 \\ x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Zu lösen ist das Gleichungssystem $f(x) = 0$. Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens zum Startwert $x_0 = (1, 2)^T$ explizit durch.