Dr. rer. nat. Armin Rund
Institut für Mathematik und Wiss. Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

WS 16/17

Numerische Mathematik I

6. Übung

Die Aufgaben werden besprochen am 23.11.2016 (zusammen mit der 2. Programmieraufgabe zur rationalen Cholesky-Zerlegung)

1. **Lineare Ausgleichsrechnung**
   Durch die Meßpunkte

i	1	2	3
t_i	-1	1	2
s_i	-1.3	1.7	6

   soll eine Ausgleichsfunktion $f\left(t; x_1, x_2\right) = x_1 t + x_2 t^3,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gelegt werden.

   (a) Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem mit einer Matrix A und einem Vektor b.

   (b) Berechnen Sie die optimalen Parameter x_1, x_2 über die Gaußschen Normalengleichungen.

   (c) Lösen Sie zum Vergleich das Ausgleichsproblem in MATLAB unter Verwendung der vorhandenen Routine `qr`. Geben Sie den nötigen MATLAB-code an.

   (d) Skizzieren Sie die Messpunkte zusammen mit der Ausgleichsfunktion.

2. **QR-Zerlegung**

Gegeben sei Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$, $\operatorname{rang}(A) = n$ und zwei QR-Faktorisierungen

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2.$$

Dabei sind $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonal und R_1, R_2 obere Dreieckmatrizen aus $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass eine orthogonale Diagonalmatrix $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ existiert mit

$$Q_1 = Q_2 S^T, \qquad R_1 = S R_2.$$

(b) Sei jetzt $m = n$ und A regulär. Zeigen Sie, dass die QR-Zerlegung $A = QR$ im Falle $r_{ii} > 0 \, \forall i = 1, \ldots, n$ eindeutig ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

3. **QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen**

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie diese unter Verwendung einer Givens-Rotation auf obere Dreiecksgestalt.

(b) Geben Sie einen Algorithmus zur QR-Zerlegung einer allgemeinen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $\operatorname{rang}(A) = n$ basiert auf Givens-Rotationen an.