



Numerische Mathematik I

5. Übung

Die Aufgaben werden besprochen am 16.11.2016

1. Kondition einer Matrix

Zeigen Sie dass für invertierbare Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\kappa(A) := \|A\| \|A^{-1}\| = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|}.$$

2. Hilbert-Matrix

Man zeige: Die Hilbert-Matrix

$$H_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch positiv definit für alle $n \geq 1$.

3. Lineare Ausgleichsrechnung und Gaußsche Normalgleichungen

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ein Minimum von

$$\min \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

muss die Gaußschen Normalgleichungen

$$A^*Ax = A^*b$$

erfüllen.

(b) A^*A ist symmetrisch positiv semidefinit.

(c) $\text{rang}(A) = n \Rightarrow A^*A$ ist positiv definit

(d) Gegeben sind folgenden vier Messwerte aus einem Praktikumsversuch:

x_i	2	-2	0	1
y_i	5	0	1	3

Ziel ist eine Ausgleichsgerade der Form $y = ax + b$. Die Koeffizienten a und b sollen dabei die Fehlerfunktion

$$F(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 ([ax_i + b] - y_i)^2$$

minimieren. Übersetzen Sie die Problemstellung in obige Form mit A und b . Geben Sie die Normalgleichungen an.

4. **Programmieraufgabe: Rationale Cholesky-Zerlegung**
(Abgabe bis Mo, 21.11.2016, 23:59 Uhr)

- (a) Programmieren Sie die rationale Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ für allgemeine Dimension $n \in \mathbb{N}$ als `function` in MATLAB mit dem Syntax

```
function [...] = rchol_zerlegung_ZZ(A)
```

wobei `ZZ` Ihre Teamnummer ist.

- (b) Entwerfen und programmieren Sie eine zweite `function`

```
function [x] = rchol_solve_ZZ(...)
```

welche anschließend das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ effizient löst.

- (c) Passen Sie das gegebene Test-Skript `rchol_ZZ.m` an und benennen Sie es um. Vervollständigen Sie darin die Vergleichsrechnung mit `chol`.

- (d) Testen Sie bis zu welcher Dimension Ihre Methode die Hilbert-Matrix bearbeiten kann.

Abgabe der Programmieraufgabe:

- Abgabe per email an `armin.rund@uni-graz.at`
- Betreff: Programmieraufgabe RCHOL
- In email bitte die Namen und Matrikelnr aller beteiligten Studierenden des Teams aufführen
- Abzugeben sind die 2 Funktionen und Ihr Test-Skript mit vorgegebenen Namen unter Verwendung der Teamnummer
- Der schnellste Code erhält einen Sonderpunkt.