



Numerische Mathematik I

4. Übung

**Die Aufgaben werden besprochen am 9.11.2016
(zusammen mit der 1. Programmieraufgabe)**

1. Gleitkommaarithmetik

Sei $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ eine arithmetische Operation, eps die Maschinengenauigkeit und $\tilde{\circ}$ ihre Realisierung in Gleitkommaarithmetik. Sei $fl(x)$ die durch Rundung erhaltene Gleitkommadarstellung einer Zahl x . Dann gilt

$$x\tilde{\circ}y = fl(x \circ y) \leq (x \circ y)(1 + \text{eps}).$$

Beweisen Sie diesen Sachverhalt für die Addition.

2. Matrixnormen

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm in \mathbb{R}^n . Dann nennt man die Matrixnorm $\|\|\cdot\|\|$

$$\|\|A\|\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

die durch $\|\cdot\|$ induzierte Norm. Beweisen Sie:

- (a) Die Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ induziert die Zeilensummennorm $\|\|A\|\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
- (b) Die Betragssummennorm $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ induziert die Spaltensummennorm $\|\|A\|\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

3. Fehler und Kondition

- (a) Ist das Problem „Berechne die Wurzel einer positiven reellen Zahl“ gut konditioniert?
- (b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = (1+x)^2 - (1-x)^2$
 - i. Ist die Berechnung dieser Funktion gut konditioniert?
 - ii. Kann bei der Auswertung von $f(x)$ trotzdem ein Problem auftreten?
 - iii. Wie passt das zusammen und wie könnte man eventuellen Problemen bei der Berechnung von $f(x)$ leicht aus dem Wege gehen?