Dr. rer. nat. Armin Rund
Institut für Mathematik und Wiss. Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

WS 16/17

Numerische Mathematik I: 2. Übung

1. **Gauß-Algorithmus**

   Gegeben seien normalisierte Gleitpunktzahlen (Basis 10, Mantissenlänge $k = 4$). Gegeben sei das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

   $$A = \begin{pmatrix} -10^{-5} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie das System mit dem Gauß-Algorithmus

   (a) ohne Pivoting,

   (b) mit Spaltenpivoting.

   Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung $\vec{x} = \binom{-0.4999975...}{0.999995...}$

2. **Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivoting**

   Gegeben ist das lineare Gleichungssystem (LGS)

   $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

   Führen Sie die Gaußsche Elimination mit Spaltenpivotsuche durch, um eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R zu bestimmen, sodass $PA = LR$ gilt.

3. **Cholesky-Zerlegung**

   Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times x}$ sei symmetrisch positiv definit.

   (a) Zeigen Sie, dass

   $$|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}} \leq \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj}) \qquad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Matrix $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$ für alle i, j symmetrisch positiv definit ist.

   (b) Folgern Sie daraus, dass

   $$\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}.$$

   Interpretieren Sie das Resultat im Zusammenhang mit Pivotstrategien.