



Numerische Mathematik I

1. Übung

1. Lösen quadratischer Gleichungen

Zum Lösen einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

soll die bekannte allgemeine Lösungsformel verwendet werden:

Algorithmus

Eingabe: Koeffizienten a , b , c

(1) Berechne $x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a)$

(2) Berechne $x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a)$

Ausgabe: Lösungen x_1 , x_2

Intern wird der Algorithmus zur Berechnung von x_1 in elementare Rechenoperationen zerlegt und wie folgt ausgeführt:

$$z_1 = b^2;$$

$$z_2 = a^2c;$$

$$z_3 = 4z_2;$$

$$z_4 = z_1 - z_3;$$

$$z_5 = \sqrt{z_4};$$

$$z_6 = -b + z_5;$$

$$z_7 = 2a;$$

$$x_1 = z_6 / z_7;$$

In jedem dieser Schritte wird das Zwischenergebnis z_1 , z_2 , ... gerundet.

i) Berechnen Sie die Lösung x_1 der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{1000}, b = 100, c = 100$$

mit oben angegebenem Algorithmus und Rundung auf $k = 4$ Stellen.

Tabellieren Sie dabei für jedes Zwischenergebnis und das Endergebnis den exakten Wert ($k = 16$), den gerundeten Wert, den absoluten und den relativen Fehler. Beantworten Sie auf Basis des relativen Fehlers die Frage: In welchem elementaren Rechenschritt passiert der entscheidende Fehler?

- ii) Wiederholen Sie Aufgabe i) für die kleinere Lösung der quadratischen Gleichung $x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a)$. Vergleichen Sie die absoluten und relativen Fehler im Endergebnis mit denen in i). Würden Sie den Fehler als ähnlich drastisch einschätzen?

2. Gauß-Algorithmus

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} .$$