Einführung in die Mathematischen Methoden für LAK

Ulrich Hohenester

Institut für Physik, Theoretische Physik
Karl–Franzens–Universität Graz
Universitätsplatz 5, 8010 Graz, Austria

Phone: +43 316 380 5227
Fax: +43 316 380 9820
www: http://physik.uni-graz.at/~uxh/
email: ulrich.hohenester@uni-graz.at

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten mathematischen Bezeichnungen angeführt, die teilweise auch in diesem Skriptum verwendet werden.

$\forall$	...	für alle
$\exists$	...	es gibt
$A \Rightarrow B$	...	aus A folgt B
$A \Leftarrow B$	...	A gilt genau dann, wenn B gilt (oder umgekehrt)
$a \in A$	...	a ist Element in einer Menge A
$\{\, a \in A \,\vert\, E(a) \,\}$	...	Menge aller Elemente von A, die die Eigenschaft $E(a)$ aufweisen
$\emptyset$	...	leere Menge
$\mathbb{N}$	...	natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	...	natürliche Zahlen und Null
$\mathbb{Z}$	...	ganze Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	...	rationale Zahlen $\{\frac{p}{q} \,\vert\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\,\}$
$\mathbb{R}$	...	reelle Zahlen (sämtliche Dezimalstellen)
$\mathbb{C}$	...	komplexe Zahlen
$A \subseteq B$	...	A ist Teilmenge von B
$A \setminus B$	...	Differenzmenge $\{\, a \in A \,\vert\, a \notin B \,\}$
$A \times B$	...	Menge der geordneten Paare $\{\, (a, b) \,\vert\, a \in A, b \in B \,\}$
$[a, b]$	...	abgeschlossene Menge $\{\, x \,\vert\, x \geq a$ und $x \leq b \,\}$
$(a, b]$	...	offene Menge $\{\, x \,\vert\, x > a$ und $x \leq b \,\}$
$y = f(x)$	...	y ist eine Funktion von x
$\lim_{x \to a} f(x)$	...	Grenzwert einer Funktion $f(x)$, wenn x gegen a geht

Δt	...	Intervall in t, $\Delta t = t_2 - t_1$
$\frac{\Delta x}{\Delta t}$	...	Differenzenquotient
$\frac{dx}{dt}$	...	Differenzialquotient $\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$
$f'(x)$	...	Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x
$\dot{g}(x)$	...	Ableitung der Funktion $g(t)$ nach der Zeit t, $\dot{g}(t) = \frac{dg(t)}{dt}$
$F(x)$	...	Stammfunktion von $f(x)$, $F'(x) = f(x)$
$\int f(x)\,dx$	...	unbestimmtes Integral $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathrm{const}$
$\int_a^b f(x)\,dx$	...	bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
$\vec{a}$	...	Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$
$\vec{e}$	...	Einheitsvektor
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	...	Skalarprodukt, inneres Produkt
$\vec{a} \times \vec{b}$	...	Kreuzprodukt, äußeres Produkt

1 Funktionen

Funktionen spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Betrachten wir beispielsweise ein Teilchen, das mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 horizontal nach oben geworfen wird, und das von der Erde mit der Erdbeschleunigung g angezogen wird. Die Höhe z wird sich dann im Laufe der Zeit t bezüglich

$$z(t) = v_0\, t - \frac{g}{2}\, t^2 \tag{1.1}$$

ändern. Hierbei bedeutet $z(t)$, dass die Höhe z eine *Funktion* der Zeit t ist (man sagt auch, dass z von t *abhängt*): wir können für jeden Zeitpunkt t die Höhe berechnen, indem wir t in die Glg. (1.1) einsetzen. Dieser Zusammenhang kann anschaulich durch einen *Graphen* dargestellt werden, wie in Abb. 1 gezeigt. Die Zeit t wird auf der horizontalen Achse aufgetragen und die zugehörige Höhe $z(t)$ auf der vertikalen Achse.

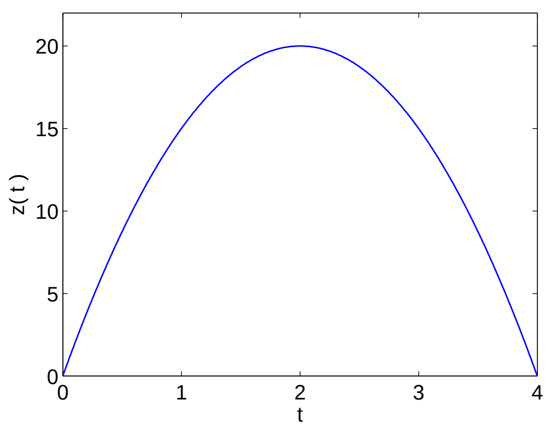


Abbildung 1: Wurfparabel. Die Höhe $z(t)$ ändert sich im Laufe der Zeit t bezüglich Glg. (1.1).

Im Laufe des Physikstudiums werden Sie eine Reihe weiterer, zum Teil viel komplizierterer Funktionen kennenlernen. Beispielsweise wird in der Quantenmechanik der Zustand eines Systems durch die Wellenfunktion $\Psi(x, y, z, t)$ beschrieben, wobei x, y und z die drei Raumrichtungen sind und t die Zeit bezeichnet. Hier ist Ψ eine Funktion, die von vier Variablen abhängt. Ähnliches gilt in der Elektrodynamik, wo die elektrische Feldstärke $\vec{E}(x, y, z, t)$, die selbst ein Vektor mit drei Komponenten ist, wiederum von Ort und Zeit abhängt.

1.1 Definition und Eigenschaft von Funktionen

In einer etwas strengeren Formulierung ist eine Funktion eine Vorschrift, die einem Element einer Menge, die man *Definitionsbereich* $\mathbb{D}$ nennt, genau ein Element einer anderen Menge, welche *Bildbereich* $\mathbb{B}$ der Funktion genannt wird, zuordnet. Die Schreibweise

$$y = f(x) \tag{1.2}$$

bedeutet dann, dass jeder Zahl $x \in \mathbb{D}$ aus dem Definitionsbereich ein Wert $y \in \mathbb{B}$ aus dem Bildbereich zugeordnet wird. Wir können dies wie folgt darstellen

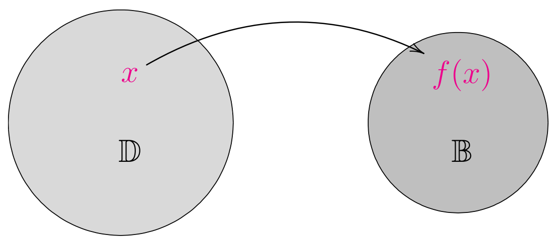


Abbildung 2: Die Funktion als Zuordnung eines Elementes x des Definitionsbereiches $\mathbb{D}$ zu einem Element $f(x)$ des Bildbereiches $\mathbb{B}$.

1.1.1 Zahlenbereiche

Zur Bezeichnung von Definitionsbereichen und Bildbereichen gibt es eine Reihe von Kurzschreibweisen. Folgende werden häufig verwendet:

$\mathbb{R}$	...	Menge der reellen Zahlen,
$\mathbb{R}^+$	...	Menge der positiven reellen Zahlen,
$\mathbb{R}^-$	...	Menge der negativen reellen Zahlen,
$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	...	$\mathbb{R}$ *ohne* die Zahl a,
$\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$	...	$\mathbb{R}$ *ohne* die Zahlen a und b,
$x \in [a, b]$	...	x aus dem Bereich $x \geq a$ und $x \leq b$,
$x \in (a, b]$	...	x aus dem Bereich $x > a$ und $x \leq b$,
$x \in [a, b)$	...	x aus dem Bereich $x \geq a$ und $x < b$,
$x \in (a, b)$	...	x aus dem Bereich $x > a$ und $x < b$.

Beispiel 1.1— Für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$$

ist der Definitionsbereich die Menge der rationalen Zahlen ohne -3 und 2, bei denen der Nenner Null wird.

Beispiel 1.2— Für die Funktion

$$f(x) = \log(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

ist der Definitionsbereich die Menge der positiven rationalen Zahlen (der Logarithmus für Null und negative Zahlen ist i.A. nicht definiert).

Beispiel 1.3— Für die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x-2}\,, \qquad x \in [2, \infty)$$

ist der Definitionsbereich die Menge der Zahlen, die größer oder gleich zwei sind.

Aufgabe 1.1— Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktionen

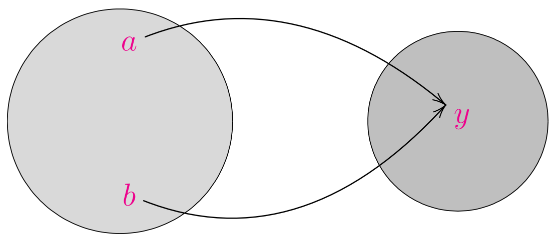
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x+3} + x\,, \\
f(x) &= \frac{1}{x-2} + \frac{x}{(x+2)(x-2)}\,, \\
f(x) &= \log(x+2)\,, \\
f(x) &= \sqrt{2-|x|}\,.
\end{aligned}$$

1.1.2 Abbildungsarten

Oft ist es günstig, Funktionen bezüglich ihrer allgemeinen Eigenschaften zu charakterisieren. Im Folgenden werden kurz die Begriffe *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv* erklärt, die eine wichtige Rolle bei der Bestimmung von Umkehrfunktionen spielen.

- Injektiv. Eine Funktion heißt injektiv, wenn aus $f(a) = f(b)$ folgt, dass $a = b$ gilt, und aus $f(a) \neq f(b)$ folgt, dass $a \neq b$. Es muss also gelten, dass ein Punkt $f(x)$ des Bildbereiches $\mathbb{B}$ von nur *einem einzigen* Punkt x des Definitionsbereiches aus erreicht werden kann.

  Im folgenden Diagramm ist eine Funktion gezeigt, die *nicht* injektiv ist:

  Hier gibt es Punkte a und b des Definitionsbereiches $\mathbb{D}$, von denen aus man zum Punkt y des Bildbereiches $\mathbb{B}$ gelangen kann. Ein Beispiel für so eine Funktion ist die Wurfparabel (1.1), die in Abb. 1 dargestellt ist: jede Flughöhe $z < 20$ wird zu jeweils zwei Zeiten erreicht, einmal beim Flug nach oben und das zweite Mal beim Flug nach unten. Die Funktion (1.1) ist also nicht injektiv.

  Durch Einschränkung des Definitionsbereiches kann erzielt werden, dass eine Funktion injektiv wird. So ist beispielsweise die Wurfparabel für Zeiten $t \in [0, 2]$ injektiv.

  Beispiel 1.4—

Funktion	Definitionsbereich	injektiv?
$f(x) = 3x$	$\mathbb{R}$	ja
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	nein
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}^+$	ja
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}^+$	nein
$f(x) = \sin(x)$	$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	ja

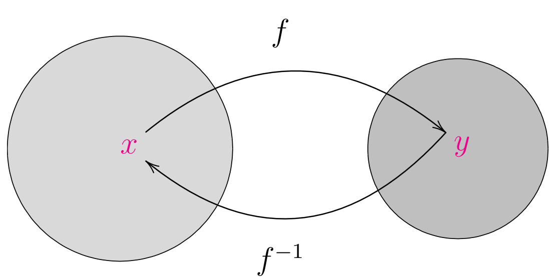
- Surjektiv. Eine Funktion heißt surjektiv, wenn zu jedem $y \in \mathbb{B}$ wenigstens ein $x \in \mathbb{D}$ existiert, sodass $f(x) = y$ gilt. Die Funktion $f(x)$ muss also so beschaffen sein, dass jeder Punkt in $\mathbb{B}$ von wenigstens einem Punkt des Definitionsbereiches $\mathbb{D}$ aus erreicht werden kann.

Die Wurfparabel (1.1) ist demnach nicht surjektiv: jede Höhe $z > 20$ wird zu keinem Zeitpunkt erreicht. Wiederum kann der Bildbereich so eingeschränkt werden, dass eine Funktion surjektiv wird.

Beispiel 1.5—

Funktion	Definitions-	Bildbereich	surjektiv?
$f(x) = 3x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ja
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nein
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	ja
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nein
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$y \in [-1, 1]$	ja

- Bijektiv. Eine Funktion, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, heißt bijektiv. Ist die Funktion $y = f(x)$ bijektiv, so existiert eine Umkehrfunktion f^{-1}, für die gilt $f^{-1}(y) = x$. [1] Die Umkehrfunktion erlaubt es festzustellen, von welchem Punkt x des Definitionsbereiches $\mathbb{D}$ aus ein Punkt y des Bildbereiches $\mathbb{B}$ erreicht wird. Es ist oft überaus praktisch, wenn eine Umkehrfunktion existiert und man diese kennt. Beispielsweise können wir für die Wurfparabel (1.1) aus der Höhe z des Teilchens zurückberechnen, wieviel Zeit seit dem Abwurf des Teilchens verstrichen ist.



Beispiel 1.6—

Funktion	Definitions-	Bildbereich	bijektiv	Umkehrfunktion
$f(x) = 3x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ja	$x = \frac{y}{3}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nein	
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	ja	$x = \sqrt{y}$

[1] i.A. gilt $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.

Aufgabe 1.2— Untersuchen Sie folgende Funktionen. Sind die Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimmen Sie für die bijektiven Funktionen die zugehörigen Umkehrfunktionen.

Funktion	Definitions-	Bildbereich	inj.	surj.	bij.
$3x+2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$			
$\sqrt{2x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$			
$\tan(x)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}$			
$10\,x+\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$			
$x^2+3\,x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$			
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$			

Aufgabe 1.3— Schränken Sie den Definitions- und Bildbereich folgender Funktionen so ein, dass sie bijektiv werden. Wie lautet die zugehörige Umkehrfunktion?

Funktion	Definitions-	Bildbereich	Umkehrfunktion
$4\,x^2$			
x^2-1			
$\cos(2\,x)$			
$\log(x)$			

Aufgabe 1.4— Was ist $f^{-1}\left(f(x)\right) =?$

1.1.3 Weitere Eigenschaften von Funktionen

Darüber hinaus gibt es noch eine Reihe von Eigenschaften, nach denen eine Funktion charakterisiert werden kann. Einige davon sollen im Folgenden vorgestellt werden.

- Gerade. Eine Funktion $f(x)$ heißt *gerade*, wenn gilt

$$f(x) = f(-x)\,. \tag{1.3}$$

  Der Graph einer solchen Funktion ändert sich nicht, wenn wir ihn an der y-Achse spiegeln. In der Abb. 3 ist ein Beispiel für eine gerade Funktion gezeigt. Weitere Beispiele sind x^2 oder $\cos(x)$.

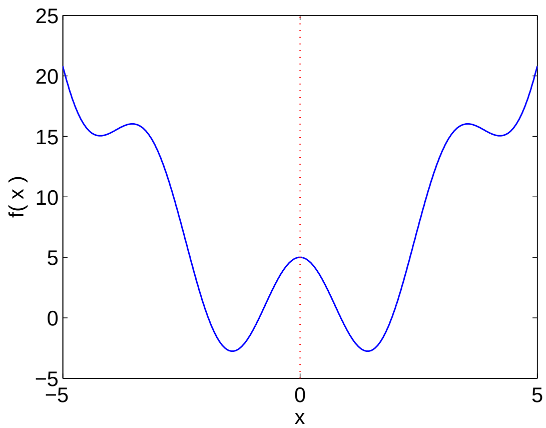


Abbildung 3: Beispiel für eine gerade Funktion $f(x) = f(-x)$, die an der y-Achse (gepunktete Linie) gespiegelt werden kann.

- Ungerade. Eine Funktion heißt *ungerade*, wenn gilt

$$f(x) = -f(-x)\,. \tag{1.4}$$

Beispiele für ungerade Funktionen sind x, x^3, $\sin(x)$.

Jede Funktion $f(x)$ kann in gerade und ungerade Anteile $f_g(x)$ und $f_u(x)$ zerlegt werden. Sei

$$f_g(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) \tag{1.5}$$

$$f_u(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big)\,, \tag{1.6}$$

so ist durch die Konstruktion gewährleistet, dass $f_g(x)$ eine gerade und $f_u(x)$ eine ungerade Funktion ist. Andererseits gilt

$$f(x) = f_g(x) + f_u(x)\,. \tag{1.7}$$

Aufgabe 1.5— Zeigen Sie, dass Glg. (1.7) gilt.

Aufgabe 1.6— Welche der folgenden Funktionen ist gerade, welche ungerade? Welche ist weder gerade noch ungerade? (a) $f(x) = 2x + \sin(x)$, (b) $f(x) = \tan(x)$, (c) $f(x) = 2 + x$, (d) $f(x) = x^2\,\cos(x)$, (e) $x^3 - x$, $x^7 + 2\,x^6$.

- Monoton wachsend. Eine Funktion heißt *monoton wachsend*, wenn gilt

$$f(x) \le f(x')\,, \quad \text{für } x < x'\,. \tag{1.8}$$

Falls für $x < x'$ sogar $f(x) < f(x')$ gilt, nennt man die Funktion *streng monoton wachsend*.

- Monoton fallend. Eine Funktion heißt *monoton fallend*, wenn gilt

$$f(x) \geq f(x')\,, \quad \text{für } x < x'\,. \tag{1.9}$$

Falls für $x < x'$ sogar $f(x) > f(x')$ gilt, nennt man die Funktion *streng monoton fallend*.

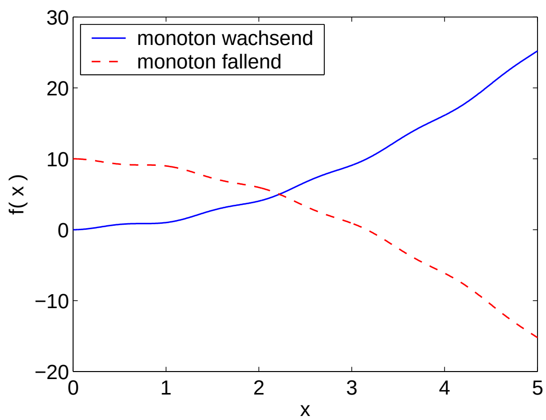


Abbildung 4: Beispiel für eine monoton wachsende (durchgezogene Linie) und fallende (gestrichelte Linie) Funktion.

Aufgabe 1.7— Wählen Sie die Definitionsbereiche $\mathbb{D}$ folgender Funktionen so, dass sie in $\mathbb{D}$ monoton wachsend sind: (a) $f(x) = \sin(x)$, (b) $f(x) = x^2$, (c) $f(x) = \tan(x)$. Welche der Funktionen sind *streng* monoton wachsend?

Aufgabe 1.8— Gegeben sei eine monoton wachsende Funktion $f(x)$ im Intervall $x \in [a, b]$. Wo hat diese Funktion ihr Minimum im Intervall $[a, b]$? Wo ihr Maximum?

- Stetig. Eine Funktion heißt *stetig*, wenn der Funktionswert $f(a)$ an der Stelle a unabhängig davon ist, wie man sich dem Punkt a annähert. Bezeichnet man die Annäherung an den Punkt mit $\lim_{x\to a}$ (sprich "der Limes, d.h. Grenzwert, für x gegen a"), so soll gelten

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,, \tag{1.10}$$

und zwar unabhängig von der Grenzwertbildung (in den Mathematischen Methoden 1 wird dieser Punkt noch genauer erläutert werden). Ein typisches Beispiel für eine nicht stetige bzw. *unstetige* Funktion ist die sogenannte Stufenfunktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.11}$$

An der Stelle $x = 0$ hat $\theta(x)$ eine *Unstetigkeitsstelle*: nähert man sich der Stelle 0 beliebig nahe von links (negative x-Werte) so erhält man den Grenzwert 0; andererseits erhält man bei Annäherung von rechts (positive x-Werte), ohne den Punkt 0 tatsächlich zu erreichen, den Grenzwert 1. Grob gesprochen gilt, dass eine Funktion dann stetig ist, wenn ihr Graph mit einem Zug gezeichnet werden kann; muss man beim Zeichnen des Graphen den Stift absetzen, wie beispielsweise bei der Stufenfunktion an der Stelle $x = 0$, so ist die Funktion unstetig.

> **Aufgabe 1.9**— Definieren Sie ähnlich wie in Glg. (1.11) eine Funktion, die -1 liefert wenn x negativ ist, 1 wenn x positiv ist, und Null für $x = 0$ (Signumfunktion).

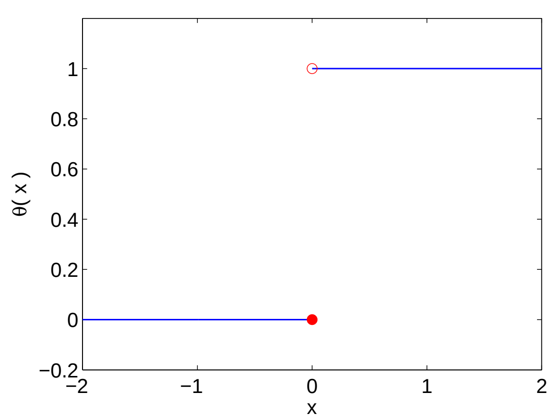


Abbildung 5: Stufenfunktion $\theta(x)$, die für $x \leq 0$ null und für $x > 0$ eins ist. Die Funktion hat an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle.

1.2 Elementare Funktionen

Welche Funktionen man "elementar" nennt, ist Konvention. Es gibt keine grundsätzlichen Unterschiede zwischen elementaren und nicht elementaren Funktionen. Letztere sind einfach weniger gebräuchlich. Im Folgenden wollen wir eine Reihe elementarer Funktionen vorstellen.

1.2.1 Lineare Funktionen

Die einfachste Form einer Funktion ist die *lineare Funktion*

$$y = kx + d\,, \tag{1.12}$$

deren Graph eine Gerade ist. Man bezeichnet k als die Steigung der Gerade. Wie man leicht aus der Abbildung 6 erkennt, läßt sich der Steigungswinkel α der Gerade aus $\tan\alpha = k$ berechnen.

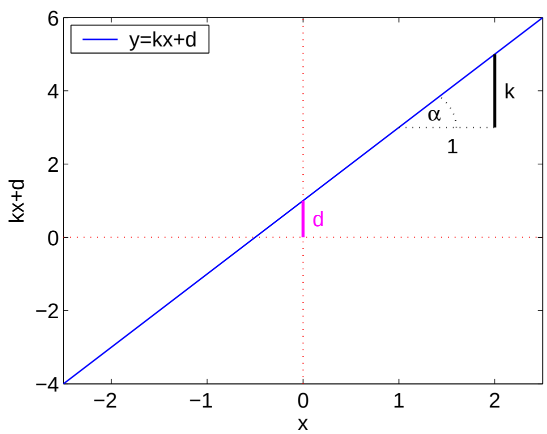


Abbildung 6: Gerade mit der Steigung k. In der Abbildung wurde $d = 1$ und $k = 2$ gewählt.

Aufgabe 1.10— Ist die lineare Funktion (1.12): (a) injektiv, (b) surjektiv, (c) bijektiv? Für $d = 0$, ist die lineare Funktion (d) gerade oder ungerade? Für welche Werte von k ist die lineare Funktion (e) streng monoton wachsend bzw. (f) streng monoton fallend? Bestimmen Sie (g) die Umkehrfunktion und (h) die Nullstelle. Nullstellen sind dadurch definiert, dass an diesen Stellen $y = 0$ gilt.

Aufgabe 1.11— Eine lineare Funktion soll durch die beiden Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) gehen. Bestimmen Sie k und d.

1.2.2 Potenzfunktionen mit ganzzahligen positiven Exponenten

Endliche Polynome sind Summen von Termen der Form x^n, wobei n eine ganze positive Zahl ist. Ein Polynom des Grades N läßt sich in der allgemeinen Form

$$P_N(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3 + \cdots + c_N\,x^N = \sum_{n=0}^{N} c_n\,x^n \tag{1.13}$$

schreiben, wobei die c_n als Koeffizienten bezeichnet werden. Beispielsweise ist die Wurfparabel (1.1) ein Polynom zweiten Grades, mit $c_0 = 0$ (kein konstanter Term), $c_1 = v_0$ und $c_2 = -g/2$. Man kann zeigen, dass bei einem Polynom $P_N(x)$ des Grades N die Zahl der Nullstellen kleiner oder gleich N ist. Anstelle von Glg. (1.13) könnte man also auch

$$P_N(x) = c_N(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_N) \tag{1.14}$$

schreiben, wobei x_1, x_2, ... die Nullstellen des Polynoms sind. Im Prinzip können die x_n auch komplexe Zahlen sein, wobei wir solche Fälle im Folgenden nicht betrachten werden.

Die einzelnen Terme, aus denen die Funktion (1.13) aufgebaut ist, sind von der Form

$$f(x) = x^n\,. \tag{1.15}$$

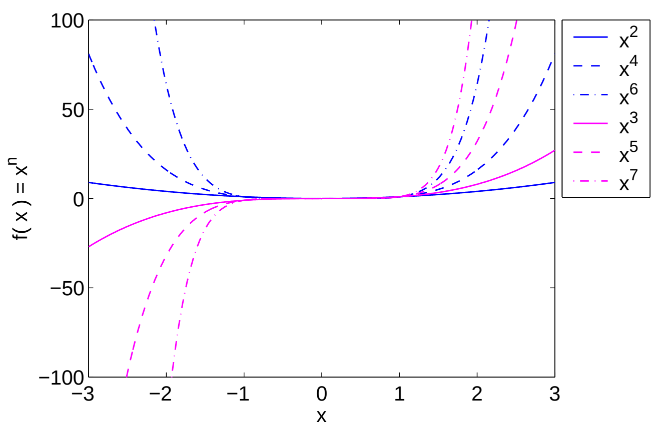


Abbildung 7: Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ für $n = 2, 3, \dots 7$.

Aufgabe 1.12— Bringen Sie die Funktion $x^2 + x - 2$ in die Form (1.14).

Aufgabe 1.13— Für gerade n, ist die Potenzfunktion (1.15): (a) injektiv, (b) surjektiv, (c) bijektiv? (d) Für welchen Definitions- und Bildbereich ist x^n bijektiv? (e) Wie sieht die Umkehrfunktion aus? Untersuchen Sie das Monotonieverhalten in (f) $\mathbb{R}^+$ und (g) $\mathbb{R}^-$. (h) Ist die Funktion gerade, ungerade oder keines von beidem? (i) Wo sind die Nullstellen von x^n?

Aufgabe 1.14— Genauso wie vorige Aufgabe, aber für ungerades n.

Aufgabe 1.15— Skizzieren Sie die Funktionen (a) $f(x) = x - 3\,x^2$ und (b) $f(x) = x + 2 - 2\,x^4$.

1.2.3 Potenzfunktionen mit negativem ganzzahligen Exponenten

Potenzfunktionen mit negativem ganzzahligen Exponenten sind von der Form

$$f(x) = \frac{1}{x^n}\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \tag{1.16}$$

mit $n = 1, 2, \ldots$ einer ganzen Zahl. Die Funktion ist überall bis auf $x = 0$ definiert. In der unmittelbaren Nähe von $x = 0$ nähert sich die Funktion immer mehr der y-Achse an: man nennt daher die Gerade $x = 0$ eine *Asymptote* der Funktion. In Abb. 8 ist die Funktion (1.16) für einige Werte von n dargestellt.

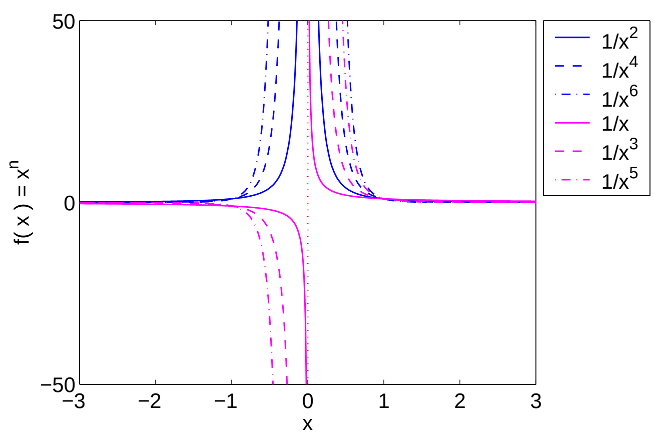


Abbildung 8: Potenzfunktionen $f(x) = 1/x^n$ für $n = 1, 2, \ldots 6$.

Aufgabe 1.16— Welche zusätzliche Asymptote besitzt die Funktion $1/x^n$?

Aufgabe 1.17— Für gerade n, ist die Funktion (1.16): (a) injektiv, (b) surjektiv, (c) bijektiv? (d) Für welchen Definitions- und Bildbereich ist $1/x^n$ bijektiv? (e) Wie sieht die Umkehrfunktion aus? Untersuchen Sie das Monotonieverhalten in (f) $\mathbb{R}^+$ und (g) $\mathbb{R}^-$. (h) Ist die Funktion gerade, ungerade oder keines von beidem?

Aufgabe 1.18— Genauso wie vorige Aufgabe, aber für ungerades n.

1.2.4 Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion ist der Quotient zweier Polynomfunktionen $P(x)$ und $Q(x)$,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,. \tag{1.17}$$

Ihr Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ mit Ausnahme jener Punkte, an denen $Q(x)$ eine Nullstelle besitzt. Beispielsweise gilt für

$$f(x) = \frac{5 - 3\,x + 4\,x^2}{(x-1)^2(x+2)}\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}\,.$$

Oft ist es günstig, den Bruch (1.17) auf eine einfachere Form zu bringen. Im Folgenden wollen wir nur den Fall untersuchen, bei dem die höchste Potenz von $P(x)$ im Zähler kleiner oder gleich der höchsten Potenz von $Q(x)$ im Nenner ist (andernfalls müsste man das folgende Schema leicht abändern).

Q(x) besitzt nur einfache Nullstellen. Sei

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_N)$$

die Zerlegung des Polynoms $Q(x)$, wobei sämtliche Nullstellen x_n voneinander verschieden sind. Der Bruch (1.17) läßt sich dann in der Form

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{x - x_1} + \frac{C_2}{x - x_2} + \dots + \frac{C_N}{x - x_N}$$

anschreiben, mit den Koeffizienten C_n die wie folgt bestimmt werden: man bringt alle Terme auf der rechten Seite der obigen Gleichung auf den gemeinsamen Nenner $Q(x)$ und wählt die Koeffizienten C_n so, dass das resultierende Polynom gleich $P(x)$ ist. Dieses Schema wird auch als *Partialbruchzerlegung* bezeichnet. Wir werden später bei der Integration von Funktionen der Form (1.17) sehen, dass so eine Zerlegung von großem Nutzen sein kann.

Beispiel 1.7— Betrachten wir die Zerlegung der Funktion

$$f(x) = \frac{2-x}{(x-1)(x+1)}\,.$$

Gemäß unserer Vorschrift setzen wir an

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{A-B+(A+B)x}{(x-1)(x+1)}\,.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert dann $A-B=2$ und $A+B=-1$, d.h. $A=\frac{1}{2}$ und $B=-\frac{3}{2}$.

Q(x) besitzt eine zweifache Nullstelle. Sei x_1 eine doppelte Nullstelle, d.h. sie kommt bei der Zerlegung (1.14) von $Q(x)$ zwei Mal vor, und $x_3, \ldots x_N$ seien die weiteren Nullstellen. In diesem Fall setzen wir an

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{x-x_1} + \frac{C_2}{(x-x_1)^2} + \frac{C_3}{x-x_3} + \cdots + \frac{C_N}{x-x_N}\,.$$

Hier enthalten in der Summe auf der rechten Seite die ersten beiden Ausdrücke die Nullstelle x_1. Die Koeffizienten C_n werden wiederum durch Koeffizientenvergleich bestimmt.

Beispiel 1.8— Zerlegt werden soll der Bruch

$$R(x) = \frac{5-3\,x+4\,x^2}{(x-1)^2(x+2)}\,.$$

Wir setzen an

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}\,. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dann nach kurzer Zwischenrechnung $A=1$, $B=2$ und $C=3$.

Q(x) besitzt mehrfache Nullstelle. Das Verfahren läßt sich einfach auf mehrfache Nullstellen erweitern. Im Folgenden wollen wir nicht näher darauf eingehen.

Aufgabe 1.19— Zerlegen Sie folgende Ausdrücke in die entsprechenden Partialbrüche:

(a) $\dfrac{1}{x^2-4}$ (b) $\dfrac{x+1}{x(x+3)(x-2)}$ (c) $\dfrac{x}{(x-2)^2}$

(e) $\dfrac{x}{x^2+2\,x+1}$ (f) $\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)^2}$ (g) $\dfrac{x}{(x-1)^2}$

Aufgabe 1.20— Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} - 4$ im Intervall $[-5,5]$ und geben Sie den Definitionsbereich der Funktion an.

Aufgabe 1.21— Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - 10$ im Intervall $[-5,5]$ und geben Sie den Definitionsbereich der Funktion an. Bestimmen Sie außerdem die Asymptoten.

1.2.5 Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

Eine Potenzfunktion mit rationalem Exponenten läßt sich in der Form

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}\,, \quad n = 1,2,\ldots\,, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{1.18}$$

anschreiben. Man sagt, dass $\sqrt[n]{x}$ die n-te Wurzel von x ist. Die Umkehrfunktion ist entsprechend die zuvor eingeführte Potenzfunktion

$$f^{-1}(y) = y^n\,. \tag{1.19}$$

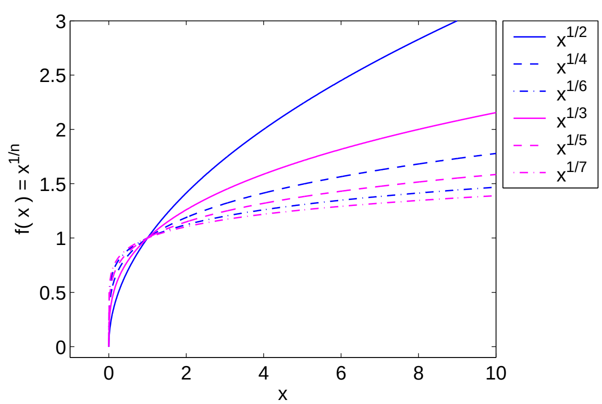


Abbildung 9: Wurzelfunktion $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ für $n = 2, 3, \ldots 7$.

Aufgabe 1.22— Für welchen Definitions- und Bildbereich ist $x = y^n$ die Umkehrfunktion zu $y = \sqrt[n]{x}$?

1.2.6 Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x\,, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.20}$$

spielt in der Physik eine wichtige Rolle. Hier ist $e = 2.718281828\ldots$ die sogenannte Eulersche Zahl. Die Exponentialfunktion ist die einzige Funktion, deren Ableitung

$$f'(x) = e^x \tag{1.21}$$

gleich der Funktion selbst ist. In der Physik gibt es eine Reihe von Phänomenen (Wachstum, Radioaktivität, Zerfall), bei denen die Änderung einer Größe proportional zur Größe selbst ist, und die somit durch die Exponentialfunktion beschrieben werden können.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist der Logarithmus

$$f(x) = \ln(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^+\,. \tag{1.22}$$

Es gilt offensichtlicherweise, dass $e^{\ln(x)} = x$ ist.

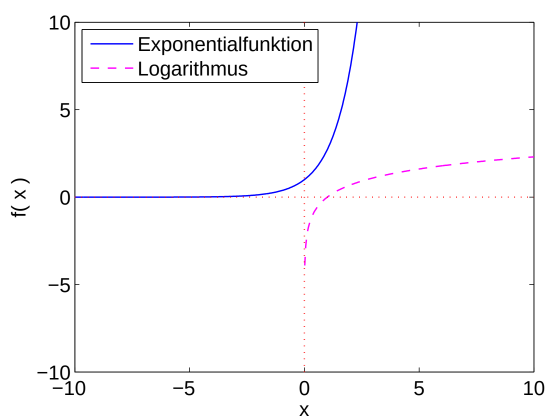


Abbildung 10: Exponentialfunktion und Logarithmus.

Die Exponentialfunktion wächst für große Werte von x rascher an als jede Potenzfunktion x^n. Entsprechend wächst der Logarithmus langsamer an, als jede Funktion $x^{\frac{1}{n}}$.

Aufgabe 1.23— Untersuchen Sie die Exponentialfunktion (a) bezüglich ihres Monotonieverhaltens. (b) Ist die Funktionen gerade, ungerade, oder weder noch? (c) Wie sehen ihre Asymptoten aus (falls vorhanden)?

Aufgabe 1.24— Wie vorige Aufgabe, aber für Logarithmus. Wo besitzt der Logarithmus eine Nullstelle, wo die Exponentialfunktion?

Es gibt eine Reihe von Rechenregeln für die Exponentialfunktion und den Logarithmus, von denen die wichtigsten lauten:

$$
\begin{array}{ll}
e^a\, e^b = e^{a+b} & \qquad \ln(a) + \ln(b) = \ln(a\, b) \\
\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b} & \qquad \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \\
(e^a)^b = e^{a\, b} & \qquad \ln\left(a^b\right) = b\, \ln(a)
\end{array}
$$

Oft ist es nützlich, a^b durch Logarithmen und Exponentialfunktionen auszudrücken. Mit $a = e^{\ln a}$ und unter Zuhilfenahme der obigen Rechenregeln erhalten wir dann

$$a^b = \left(e^{\ln(a)}\right)^b = e^{b\, \ln(a)}\,. \qquad (1.23)$$

Aufgabe 1.25— Stellen Sie folgende Ausdrücke als Logarithmus eines einzigen Terms dar:

(a) $\ln 2 + \ln a + \frac{1}{2} \ln b$

(b) $\ln(1-x) + \ln(1+x) - 2\ln x$

(c) $\frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x-2)$

(d) $3\ln x - \frac{1}{3}(\ln(x+1) + \ln(x-1))$

(e) $5\ln(x+7) - 4\ln(x-3)$

(f) $\frac{1}{3}(4\ln x + 2\ln(x-y)) - \ln x$

Aufgabe 1.26— Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\ln(8x) + \ln(3x) = \ln 96$

(b) $e^1\, x^x = e^{2x+1}$

1.2.7 Trigonometrische Funktionen

Zuletzt wollen wir noch die trigonometrischen Funktionen oder Winkelfunktionen untersuchen. Sie treten in der Physik oft im Zusammenhang mit periodischen Bewegungen auf, z.B. bei der Beschreibung der Pendelbewegung. Betrachten wir den Kreis mit Radius $r = 1$ (Einheitskreis), der in Abb. 11 gezeigt ist. Wenn wir uns vom Punkt

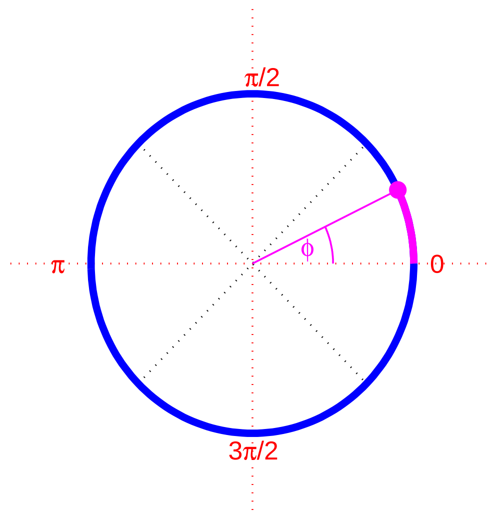


Abbildung 11: Einheitskreis.

$(1,0)$ auf der x-Achse beginnend auf dem Kreis gegen den Uhrzeigersinn bewegen, so ändert sich die Strecke, die wir dabei durchlaufen, von 0 [Punkt $(1,0)$] nach $\pi/2$ [Punkt $(0,1)$], π [Punkt $(-1,0)$], $3\pi/2$ [Punkt $(0,-1)$], bis wir schließlich bei 2π wieder zurück zum Punkt $(1,0)$ gelangen. Ein Punkt auf dem Kreis kann durch den Winkel ϕ charakterisiert werden, wobei ϕ dem auf dem Bogen des Einheitskreises zurückgelegten Weg entspricht (Radiant). Eine alternative Bezeichung ist das *Grad*, wobei ein voller Kreisumlauf $360°$ entspricht. Einige Punkte auf dem Einheitskreis und die zugehörigen Winkel sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Punkt auf Einheitskreis	Winkel in Radiant	Winkel in Grad
$(1, 0)$	0	$0°$
$(1, 1)/\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$45°$
$(0, 1)$	$\frac{\pi}{2}$	$90°$
$(-1, 1)/\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$135°$
$(-1, 0)$	π	$180°$
$(-1, -1)/\sqrt{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$225°$
$(0, -1)$	$\frac{3\pi}{2}$	$270°$
$(1, -1)/\sqrt{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$315°$
$(1, 0)$	2π	$360°$

Aufgabe 1.27— Wie rechnet man einen Winkel ϕ von Radiant nach Grad um? Wie von Grad nach Radiant?

Im Folgenden wollen wir wann immer möglich die Winkelangabe in Radiant und nicht Grad machen. Die trigonometrischen Funktionen sind nun über die in der folgenden Abbildung gezeigten Zusammenhänge definiert:

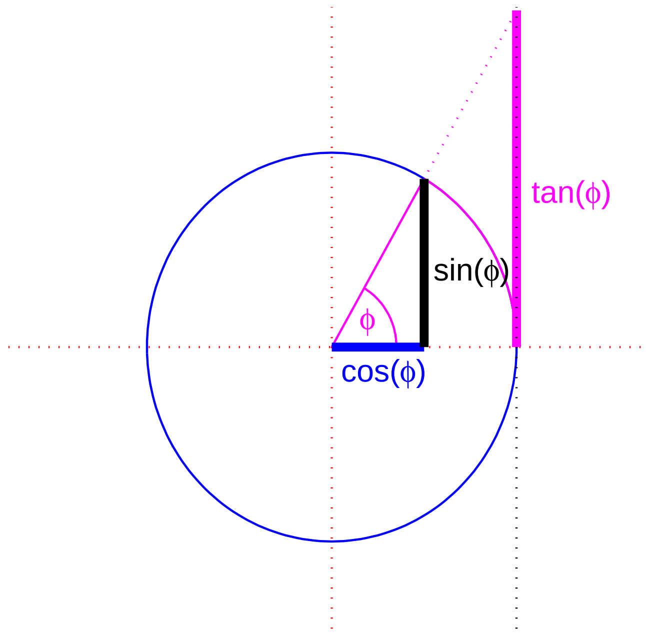


Abbildung 12: Definition des Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis.

Sei (x, y) der Punkt am Einheitskreis, der durch den Winkel ϕ charakterisiert ist: x entspricht dann dem Cosinus $\cos(\phi)$ und y dem Sinus $\sin(\phi)$. Der Tangens $\tan(\phi)$ entspricht der Strecke auf der Gerade $x = 1$, die man zurücklegen muss, um zum Schnittpunkt mit der Gerade zu gelangen, die durch die Punkte $(0, 0)$ und (x, y) läuft. Man kann zeigen, dass gilt

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}, \quad \cot(\phi) = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}, \tag{1.24}$$

wobei $\cot(\phi)$ den Kotangens bezeichnet. Alle Winkelfunktionen sind auch für Winkel definiert, die nicht aus dem Intervall $[0, 2\pi)$ stammen: hierbei muss man von ϕ sooft 2π abziehen bzw. sooft 2π zu ϕ addieren, bis der daraus resultierende Winkel in das Intervall $[0, 2\pi)$ fällt. Es gilt, dass der Sinus und Cosinus *periodisch* in 2π sind, und dass der Tangens und Cotanges periodisch in π sind. Es gibt eine Reihe von Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen, die in den meisten Formelbüchern aufgelistet sind. Beispielsweise gilt (n bezeichnet hier eine ganze Zahl):

$$
\begin{aligned}
&\sin(-x) = -\sin(x) && \cos(-x) = \cos(x)\\
&\sin(x+2n\pi) = \sin(x) && \cos(x+2n\pi) = \cos(x)\\
&\sin(x+\pi) = -\sin(x) && \cos(x+\pi) = -\cos(x)\\
&\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) = \cos(x) && \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(x)\\
&\tan(-x) = -\tan(x) && \cot(-x) = -\cot(x)\\
&\tan(x+n\pi) = \tan(x) && \cot(x+n\pi) = \cot(x)
\end{aligned}
$$

Wir verweisen an dieser Stelle noch kurz auf die Umkehrfunktionen $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ und $\arctan(x)$, die Arcussinus, Arcuscosinus und Arcustangens genannt werden (arcus bedeutet auf lateinisch Bogen).

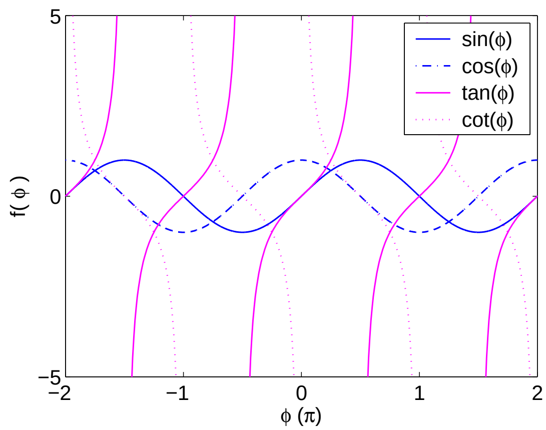


Abbildung 13: Die trigonometrische Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens.

Aufgabe 1.28— Zeigen Sie mit Hilfe von Abb. 12, dass $\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi) = 1$ gilt.

Aufgabe 1.29— Berechnen Sie *ohne Taschenrechner* folgende Ausdrücke: (a) $\sin\frac{\pi}{4}$, (b) $\cos\frac{\pi}{4}$, (c) $\sin\frac{5\pi}{4}$, (d) $\cos\frac{5\pi}{4}$.

Aufgabe 1.30— Ist der (a) Sinus, (b) Cosinus, (c) Tangens eine gerade oder ungerade Funktion, oder keines von beidem?

Aufgabe 1.31— Führen Sie die gegebenen Funktionswerte unter Anwendung der oben angeführten Formeln auf Funktionswerte des Arguments ϕ zurück:

(a) $\sin(\frac{\pi}{2}+\phi)$	(b) $\cos(\pi+\phi)$	(c) $\sin(\frac{3\pi}{2}+\phi)$
(d) $\cos(-2\pi-\phi)$	(e) $\sin(\phi-\pi)$	(f) $\cos(\phi-\frac{3\pi}{2})$

2 Differentialrechnung

In vielen Fällen ist man nicht an der Funktion selbst sondern an der Änderung der Funktion interessiert. Beispielsweise können wir im Fall der Wurfparabel fragen, welche Geschwindigkeit v das Teilchen nach einer gewissen Zeit besitzt. Die Geschwindigkeit ist die Änderung des Ortes Δz in einem Zeitintervall Δt, d.h.

$$v(t) = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\,. \tag{2.1}$$

Im Prinzip müssen wir in Glg. (2.1) aufpassen, da die Geschwindigkeit davon abhängt, wie groß wir unser Zeitintervall Δt wählen. In den fortführenden Vorlesungen wird gezeigt werden, dass für genügend kleine Δt die Geschwindigkeit $v(t)$ einen *Grenzwert* erreicht, der von der Größe von Δt unabhängig ist. Das ist auch in der Abb. 14 gezeigt, wo $v(t)$ aus der Glg. (1.1) für verschiedene Werte von Δt gezeigt ist: mit abnehmendem Δt nähert sich die aus Glg. (2.1) berechnete Geschwindigkeit immer mehr dem exakten Wert an. Wir werden für den Grenzübergang den Ausdruck

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt} \tag{2.2}$$

verwenden, und diesen die Ableitung von $z(t)$ nach t nennen. Der Ausdruck $\frac{\Delta z(t)}{\Delta t}$ von Glg. (2.1) wird als Differenzenquotient bezeichnet, $\frac{dz(t)}{dt}$ als Differenzialquotient.

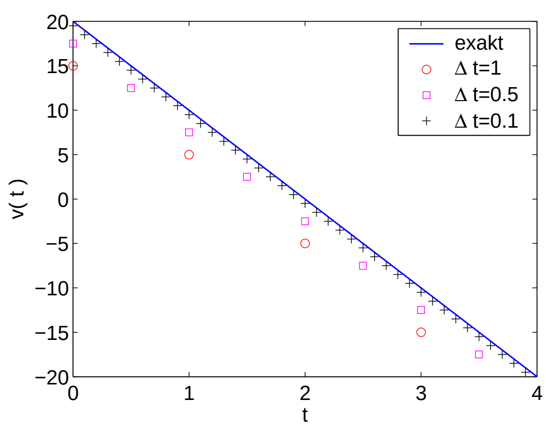


Abbildung 14: Geschwindigkeit, die aus der Wurfparabel (1.1) unter Zuhilfenahme des Differenzenquotienten (2.1) für verschiedene Zeitintervalle Δt berechnet wurde.

In der Physik sind viele Gesetze in Form von Ableitungen gegeben. So lauten beispielsweise die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dz(t)}{dt} = v(t)\,, \quad m\,\frac{dv(t)}{dt} = F\,. \tag{2.3}$$

Die erste Gleichung definiert die Geschwindigkeit als zeitliche Änderung des Ortes. Die zweite Gleichung besagt, dass die Änderung des Impulses mv durch die am Teilchen angreifenden Kraft F bestimmt ist. Auch in der Elektrodynamik und in der Quantenmechanik werden Sie lernen, dass die grundlegenden Gleichungen in der Form von Ableitungen gegeben sind.

2.1 Ableitung elementarer Funktionen

Im Folgenden wollen wir kurz die wichtigsten Differentiationsregeln vorstellen. Betrachten wir eine konstante Funktion $y = c$, wobei c eine beliebige Konstante ist. Die Funktion hängt nicht von x ab, und demzufolge ist ihre Änderung bei Änderung von x gleich Null. Die Ableitung konstanter Beiträge ist demzufolge Null,

$$f(x) = c\,, \quad f'(x) = 0\,, \tag{2.4}$$

wobei wir die Kurzschreibweise $f'(x) = \frac{df}{dx}$ eingeführt haben. Betrachten wir als nächstes die Gerade $f(x) = kx + d$. Nach unser Vorschrift (2.1) erhalten wir

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Big(k(x+\Delta x)+d\Big) - \Big(kx+d\Big)}{\Delta x} = k\,. \tag{2.5}$$

Die Ableitung der linearen Form (1.12) ist konstant und gleich der Steigung der Gerade. Da dieser Ausdruck kein Δt enthält, ist laut Glg. (2.2) der Differenzenquotient gleich dem Differenzialquotient, und wir erhalten

$$f(x) = kx + d\,, \quad f'(x) = k\,. \tag{2.6}$$

Bisher waren die Beispiele einfach. Wir wollen die Vorgehensweise bei komplizierteren Funktion anhand von $f(x) = x^2$ skizzieren. Setzen wir wie gewohnt den Differenzenquotienten an,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x\,,$$

wobei wir die quadratische Form im Zähler aufgelöst haben. Der entscheidende Punkt ist nun der Grenzübergang $\lim_{\Delta x\to 0}$, von dem wir zuvor gesprochen haben. Wenn wir diesen machen, so verschwindet der zweite Term in der obigen Gleichung, und wir erhalten

$$f(x) = x^2\,, \quad f'(x) = 2\,x\,. \tag{2.7}$$

> **Aufgabe 2.1**— Leiten Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten (2.1) und der Grenzwertbildung $\Delta x \to 0$ die Ableitung der Funktion x^3 her.

Im Prinzip kann man bei den weiteren elementaren Funktionen aus dem vorigen Kapitel genauso vorgehen, wir wollen hier nur die wichtigsten Ergebnisse präsentieren.

Um die Ableitung einer Funktion zu bilden, muss folgendes gelten.

- Definitionsbereich. Die Stelle x, an der die Funktion abgeleitet wird, muss zum Definitionsbereich gehören, d.h. $x \in \mathbb{D}$.
- Funktion stetig. Die Funktion muss an der Stelle x stetig sein. Beispielsweise kann die Stufenfunktion (1.11) an der Stelle $x = 0$ nicht abgeleitet werden.
- Funktion glatt. Die Funktion muss an der Stelle x genügend glatt sein, d.h. sie darf keinen Knick haben. Diese Bedingung ist so etwas wie eine Stetigkeitsbedingung für die Ableitung: $f'(x)$ darf nicht davon abhängen, wie man Δx gegen Null gehen lässt.

Gelten die obigen Bedingungen, so kann eine Funktion abgeleitet werden. Die Ableitungen der elementaren Funktionen lauten:

Funktion	abgeleitete Funktion	Bemerkung
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	konstante Funktion
$f(x) = kx$	$f'(x) = k$	lineare Form
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n\, x^{n-1}$	Potenzfunktion
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	rationale Funktion
$f(x) = x^c\,, c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = c\, x^{c-1}$	
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	Exponentialfunktion
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	Logarithmus
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	Sinus
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	Cosinus
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	Tangens

2.2 Differentiationsregeln

Meist müssen wir Ausdrücke ableiten, die aus elementaren Funktionen zusammengesetzt sind. Um solche Ableitungen durchzuführen, gibt es eine Reihe von Differentiationsregeln. Im Folgenden soll gelten, dass $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ beliebige Funktionen sind, und c eine Konstante ist. Es läßt sich dann zeigen, dass folgende Regeln gelten

Funktion	abgeleitete Funktion	Bemerkung
$g(x) = c\,f(x)$	$g'(x) = c\,f'(x)$	
$h(x) = f(x) + g(x)$	$h'(x) = f'(x) + g'(x)$	Summenregel
$h(x) = f(x)g(x)$	$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Produktregel
$h(x) = f(g(x))$	$h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$	Kettenregel

Im Prinzip kann jede Funktion abgeleitet werden, indem man die obigen Regeln sorgsam anwendet. Wir wollen einige Beispiele untersuchen:

Beispiel 2.1— Gegeben sei der Ausdruck

$$f(x) = \sin(x) + 2\,x^{12}\,.$$

Mit Hilfe der Summenregel erhalten wir

$$f'(x) = \Big(\sin(x)\Big)' + \Big(2\,x^{12}\Big)' = \cos(x) + 2\Big(x^{12}\Big)' = \cos(x) + 24\,x^{11}\,.$$

Beispiel 2.2— Gegeben sei der Ausdruck

$$f(x) = \sin(x^2)\,.$$

Wir benutzen die Kettenregel und leiten erst die äußere Funktion $\cos(\,.\,)$ und dann die innere Funktion x^2 ab,

$$f'(x) = \cos(x^2)\,\Big(x^2\Big)' = \cos(x^2)\,2x\,.$$

Beispiel 2.3— Gegeben sei der Ausdruck

$$f(x) = \cos(e^{x^2} + 3\,x)\,.$$

Wir beginnen mit der äußeren Funktion $\cos(\,.\,)$ und leiten erst dann die innere Funktion $e^{x^2} + 3\,x$ ab. Bei der Ableitung der Exponentialfunktion leiten wir wiederum zuerst die Exponentialfunktion ab, und bilden danach die Ableitung des Exponenten x^2 (wenn es Ihnen leichter fällt, können Sie anstelle von e^x auch $\exp(x)$ schreiben). Es folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(e^{x^2} + 3\,x)\left(e^{x^2} + 3\,x\right)' \\ &= -\sin(e^{x^2} + 3\,x)\left(e^{x^2}(x^2)' + 3\right) \\ &= -\sin(e^{x^2} + 3\,x)\left(e^{x^2} 2x + 3\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2— Oft führt man noch zusätzlich die *Quotientenregel*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,, \quad h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

ein. Leiten Sie die Quotientenregel mit Hilfe der Produktregel ab, indem Sie $h(x) = f(x)\left(g(x)\right)^{-1}$ verwenden.

Aufgabe 2.3— Benutzen Sie die Quotientenregel zur Ableitung der Funktion

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,.$$

Aufgabe 2.4— Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen

(a) $\cos(x) + x^2 + 3\,x^4 + \frac{5}{x^2}$

(b) $2\sqrt{x} + 3\,x^3$

(c) $\cos\big(\cos(e^x)\big)$

(d) $\sin\big(\sin(e^{\sin(x)})\big)$

(e) $\sqrt{x^2 + 6\,x + 3}$

(f) $\ln\left(x^2 + \cos(3x)\right)$

(g) $\frac{\cos(3x^2 + x)}{\sin(x^2)}$

(h) $\frac{e^{\cos(x)}}{\tan(3x)}$

Aufgabe 2.5— Bestimmen Sie die Ableitung von

$$h(x) = \big(f(x)\big)^{g(x)}\,.$$

2.3 Höhere Ableitungen

Eine Funktion, die bereits einmal abgeleitet wurde, ist eine Funktion $f'(x)$ von x, die selbst nun wiederum nach x abgeleitet werden kann. Voraussetzung ist wie zuvor, dass $f'(x)$ an der Stelle x stetig und genügend glatt sein muss. Die zweite Ableitung lässt sich als

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \tag{2.8}$$

anschreiben. Es gibt auch noch höhere Ableitungen, wie z.B. die dritte Ableitung $f'''(x)$, die in manchen Fällen benötigt werden.

Die erste und zweite Ableitung können geometrisch wie folgt interpretiert werden (siehe Abb. 15). Die erste Ableitung gibt die Steigung $k = f'(x)$ der Gerade, die die Kurve an der Stelle x tangiert. Diese Gerade wird auch als Tangente bezeichnet. Die zweite Ableitung bestimmt den Krümmungsradius des Kreises, der sich an der Stelle x an die Kurve anschmiegt. Es gilt, dass der Krümmungsradius umso größer ist, je kleiner $f''(x)$ ist, d.h. der Krümmungsradius und die zweite Ableitung sind zueinander *umgekehrt proportional*. Wir werden die zweite Ableitung und deren geometrische Interpretation in der folgenden Kurvendiskussion benötigen.

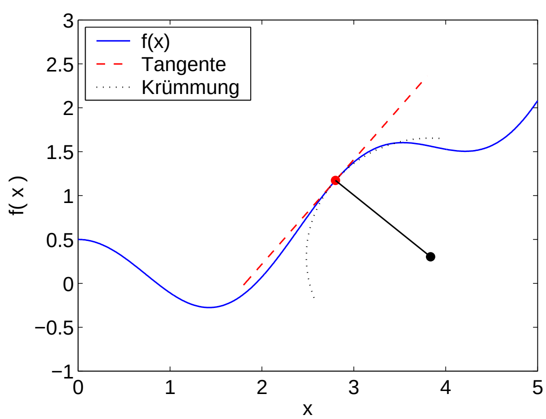


Abbildung 15: Geometrische Interpretation der ersten und zweiten Ableitung einer Funktion. Die erste Ableitung an der Stelle x gibt die Steigung der Tangente an die Kurve, die zweite Ableitung bestimmt den Krümmungsradius R (eine kleine Ableitung $f''(x)$ bedeutet einen großen Radius R und umgekehrt).

2.4 Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion ist die Zusammenfassung aller bisher besprochener Eigenschaften einer Funktion. Üblicherweise beinhaltet sie folgende Punkte.

- Definitionsmenge. Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ bestimmt, für welche Werte von x die Funktion definiert ist. Beispielsweise hat die Funktion $\frac{1}{x}$ die Definitionsmenge

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Symmetrie (falls gefordert). Manchmal ist es nützlich zu untersuchen, ob eine Funktion gerade oder ungerade ist.

- Nullstellen. Die Nullstellen sind jene Punkte, an denen die Funktion die x-Achse schneidet, d.h., an denen $f(x) = 0$ gilt. Beispielsweise hat die Funktion $x^2 - 1$ die Nullstellen $(1, 0)$ und $(-1, 0)$

- Asymptoten. Die Asymptoten sind jene Geraden, an die sich die Funktion für bestimmte x-Werte oder für große x-Werte annähert. Beispielsweise besitzt die Funktion $\frac{1}{x}$ die Asymptoten $x = 0$ (für $|x| \to 0$) und $y = 0$ (für $x \to \pm\infty$).

- Extremwerte. Die Extremwerte einer Funktion sind jene Punkte, an denen die Tangente an die Kurve die Steigung Null besitzt, d.h., an denen $f'(x) = 0$ gilt. Beispielsweise besitzt die Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ die erste Ableitung $f'(x) = 2x - 2$, die für $x = 1$ Null ist. Die Funktion besitzt daher an der Stelle $(1, -1)$ einen Extrempunkt.

  Die Art des Extremwertes bestimmt man, indem man die zweite Ableitung an der Stelle des Extremwertes berechnet. Es gilt

  $$\begin{array}{lll} f''(x) < 0 & \ldots & \text{Maximum,} \\ f''(x) > 0 & \ldots & \text{Minimum,} \\ f''(x) = 0 & \ldots & \text{Sattelpunkt.} \end{array}$$

  Diese Zuordnung basiert auf der zuvor besprochenen geometrischen Interpretation der zweiten Ableitung als Krümmung der Kurve (eine positive Krümmung entspricht einer konkaven Kurve, eine negative einer konvexen). Ein Sattelpunkt ist ein Punkt, den man im Prinzip noch genauer untersuchen sollte. Im Folgenden wollen wir Sattelpunkte als solche anführen, ohne sie genauer zu untersuchen. In unserem obigen Beispiel der Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ ist die zweite Ableitung $f''(x) = 2$, d.h. bei dem Extremwert handelt es sich um ein Minimum.

- Wendepunkte. Die Wendenpunkte sind jene Punkte, an denen die zweite Ableitung gleich Null ist, d.h. $f''(x) = 0$. An diesen Stelle schneidet die Tangente die Kurve. Das sind jene Punkte, an denen $f'(x)$ einen Extremwert besitzt.

- Graph. Der Graph einer Funktion ist die grafische Darstellung des Funktionsverlaufes. Man erstellt ihn am besten, indem man zuerst die Nullstellen, Extremwert, Wendepunkte und Asymptoten einzeichnet und danach, falls nötig, noch ein paar zusätzliche Punkte berechnet.

Beispiel 2.4— Diskutiert werden soll die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \,.$$

Die erste Ableitung lautet unter Benutzung der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2} \,,$$

die zweite Ableitung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{6(x^2-1)^2 - 6x\,2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{6(x^2-1)\Big((x^2-1) - 4x^2\Big)}{(x^2-1)^4} \\ &= -\frac{6(x^2-1)(3x^2+1)}{(x^2-1)^4} \,. \end{aligned}$$

Nun beginnen wir unsere Kurvendiskussion.

- Definitionsmenge. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Symmetrie. $f(x) = f(-x)$, die Funktion ist gerade.
- Nullstellen. NS $(-2, 0)$, $(2, 0)$.
- Asymptoten. $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$.
- Extremwerte. Die erste Ableitung ist an der Stelle $x = 0$ gleich Null. Die zweite Ableitung an dieser Stelle ist $-6(-1)(1) = 6$, es handelt sich also um ein Minimum. Minimum $(0, 4)$.
- Wendepunkte. Die zweite Ableitung ist dann Null, wenn entweder $x^2 - 1$ oder $3x^2 + 1$ gleich Null ist. Der zweite Ausdruck kann für reelle Zahlen nie Null werden. Der erste Ausdruck ist für $x = \pm 1$ Null. Diese Werte gehören nicht zum Definitionsbereich, es gibt also keine Wendepunkte.
- Graph. Schließlich erstellen wir den Graphen der Funktion, indem wir zuerst die Asymptoten, Nullstellen und Extremwerte einzeichnen. Danach skizzieren wir den ungefähren Verlauf des Graphen. Eine exakte Berechnung liefert die Abbildung 16.

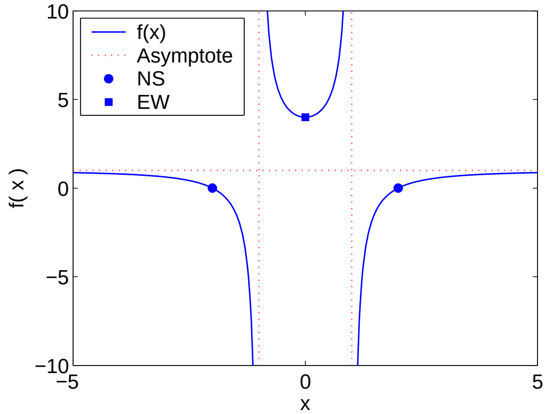


Abbildung 16: Graph der Funktion $f(x) = (x^2 - 4)/(x^2 - 1)$.

Bei Kurvendiskussionen ist es wichtig, dass man die Asymptoten, Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte nicht nur ausrechnet sondern auch als solche kennzeichnet (z.B. unter Verwendung der Abkürzungen NS, EW und WP). Versuchen Sie, dies in den folgenden Aufgaben immer einzuhalten.

Aufgabe 2.6— Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + x^2 - 2x$$

den Definitionsbereich, die Nullstellen, die Extremwerte, und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 2.7— Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

den Definitionsbereich, die Asymptoten, die Nullstellen und die Extremwerte, und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 2.8— Bestimmen Sie die Nullstellen und Extremwerte der Funktion $f(x) = e^x \sin(x)$ im Bereich $[-2\pi, 2\pi]$.

3 Integralrechnung

Sei die Funktion $f(x)$ gegeben, von der wir wissen, dass sie die Ableitung einer anderen Funktion $F(x)$ ist. Wie können wir aus der Kenntnis der Ableitung $f(x)$ wieder die ursprüngliche Funktion $F(x)$ erhalten? Mit dieser Fragestellung beschäftigt sich die Integralrechnung. Wir schreiben

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,. \tag{3.1}$$

Hier bedeutet $\int f(x)\,dx$ die Integration der Funktion $f(x)$, $F(x)$ ist die sogenannte Stammfunktion, und C eine Konstante. Diese Konstante ist nötig, da beim Ableiten der Stammfunktion

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x) \tag{3.2}$$

konstante Beiträge C verloren gehen, weil $(C)' = 0$. In gewisser Weise ist die Integration die Umkehrfunktion zur Differentiation.

Die Integration in Glg. (3.1) wird auch als *unbestimmte Integration* bezeichnet. Im Gegensatz hierzu gibt es auch die *bestimmte Integration*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,, \tag{3.3}$$

wobei a und b die Integrationskonstanten sind. Die geometrische Interpretation der Integration ist die Fläche, die von der Funktion $f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ eingeschlossen wird.

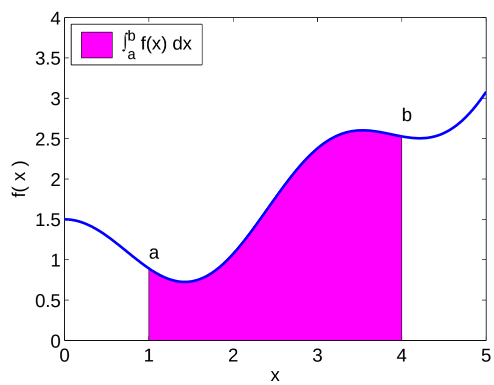


Abbildung 17: Geometrische Interpretation des bestimmten Integrals, das der Fläche entspricht, die von der Funktion $f(x)$ (durchgezogene Linie) und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ eingeschlossen wird.

Die Integration spielt in der Physik eine wichtige Rolle. Viele physikalische Gesetze sind in der Form von Differentialgleichungen angegeben (Newtonsche Mechanik, Elektrodynamik, ...). Die zugehörigen Lösungen erhält man demnach durch Integration dieser Gleichungen. Wann immer möglich ist es günstig, wenn man die Stammfunktion explizit bestimmen kann.

Im Gegensatz zur Differentiation, bei der sich jede Funktion unter Verwendung der im vorigen Kapitel angeführten Regeln ableiten läßt, können nicht alle Funktionen integriert werden. Oft können sogar nur relativ wenige Funktionen in geschlossener Form, d.h. unter Angabe der Stammfunktion $F(x)$, integriert werden. Auch gibt es keine klaren Regeln, wie man ein Integral berechnen soll. Im Folgenden wollen wir einige Regeln präsentieren, die man beim Lösen von Integralen benutzen kann. Im Laufe Ihres Studiums werden Sie noch weitere kennenlernen.

3.1 Integration elementarer Funktionen

Die Integration der elementaren Funktionen ist relativ einfach. Nachdem wir wissen, wie die abgeleiteten Funktionen aussehen, müssen wir uns einfach die entsprechenden Stammfunktionen suchen. Wir erhalten:

Funktion	Stammfunktion	Bemerkung
$f(x) = c$	$F(x) = cx$	konstante Funktion
$f(x) = kx$	$F(x) = \frac{1}{2}kx^2$	lineare Form
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	Potenzfunktion
$f(x) = x^c$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{x^{c+1}}{c+1}$	
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	rationale Funktion
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	Exponentialfunktion
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	Sinus
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	Cosinus

Aufgabe 3.1— Überprüfen Sie die obige Tabelle, indem Sie jeweils die Stammfunktion ableiten.

3.2 Integrationsregeln

Im Folgenden wollen wir die wichtigsten Integrationsregeln vorgestellt. Einige von ihnen folgen direkt aus den Differentiationsregeln.

- Multiplikation mit Konstante.

  Es gilt offensichtlicherweise

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx\,, \tag{3.4}$$

  wobei c eine Konstante ist.

- Integration von $f'(x)$.

  Für die Integration einer abgeleiteten Funktion gilt, wie eingangs besprochen,

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C\,. \tag{3.5}$$

- Summenregel.

  Die Integration einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der integrierten Funktionen,

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,. \tag{3.6}$$

- Partielle Integration.

  Aus der Produktregel der Differentiation folgt, dass

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx\,, \tag{3.7}$$

  wobei $G(x)$ die Stammfunktion von $g(x)$ ist.

  Beispiel 3.1— Integriert werden soll $\int x\,e^x\,dx$. Wir setzen $f(x) = x$ und $g(x) = e^x$, wobei $f'(x) = 1$ und $G(x) = e^x$ gilt. Unter Anwendung der partiellen Integration erhalten wir

$$\int x\,e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C\,.$$

  Beispiel 3.2— Integriert werden soll $\int \ln(x)dx$. Wir setzen $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = 1$, wobei $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $G(x) = x$ gilt. Unter Anwendung der partiellen Integration erhalten wir

$$\int \ln(x) = x\,\ln(x) - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\,\ln(x) - x + C\,.$$

Beispiel 3.3— Integriert werden soll $\int \cos^2(x)dx$. Wir setzen $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \cos(x)$, wobei $f'(x) = -\sin(x)$ und $G(x) = \sin(x)$ gilt. Anwenden der Produktregel liefert dann

$$\int \cos^2(x)dx = \cos(x)\sin(x) + \int \sin(x)\sin(x)dx\,.$$

Nun benutzen wir $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, und erhalten

$$\int \cos^2(x)dx = \sin(x)\cos(x) + \int dx - \int \cos^2(x)dx\,,$$

mit $\int dx = x$. Wir formen die Gleichung nun so um, dass wir den Ausdruck $\int \cos^2(x)dx$ von der rechten auf die linke Seite bringen, und erhalten schließlich das bekannte Endergebnis

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\Big(x + \sin(x)\cos(x)\Big) + C\,.$$

- **Substitutionsregel.**

Die Integration einer elementaren Funktion, deren Argument eine Funktion $g(x)$ ist, kann dann durchgeführt werden, wenn das Integral von der Form

$$\int f\Big(g(x)\Big)g'(x)dx = F\Big(g(x)\Big) + C\,, \tag{3.8}$$

ist. Diese Regel folgt direkt aus der Kettenregel. Im Prinzip muss die Funktion $g(x)$ noch einige Eigenschaften erfüllen, auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen.

Beispiel 3.4— Integriert werden soll $\int \sin(2x)dx$. Wir setzen $g(x) = 2x$, wobei $g'(x) = 2$ gilt. Nun erweitern wir das Integral mit $2\,\frac{1}{2} = 1$ und erhalten

$$\int \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)2\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C\,.$$

Beispiel 3.5— Integriert werden soll $\int \cos(x^2)xdx$. Wir setzen $g(x) = x^2$, wobei $g'(x) = 2x$ gilt. Nun erweitern wir das Integral noch mit $2\,\frac{1}{2} = 1$ und erhalten

$$\int \cos(x^2)x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)2x\,dx = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C\,.$$

■ Partialbruchzerlegung.

Rationale Funktionen lassen sich integrieren, wenn sie zuerst in ihre Partialbrüche zerlegt werden und diese danach gliedweise integriert werden. Wir benutzen hierbei, dass

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a}\begin{cases} \ln(ax+b) & \text{für } n=1, \\ -\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} & \text{für } n \neq 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

gilt.

Beispiel 3.6— Integriert werden soll $\int \frac{5-3x+4x^2}{(x-1)^2(x+2)}$. Die entsprechende Partialbruchzerlegung wurde in Bsp. 1.8 durchgeführt. Wir erhalten

$$\int \Big(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x+2}\Big)dx = \ln(1-x)-\frac{2}{x-1}+3\,\ln(x+2)+C\,.$$

Aufgabe 3.2— Berechnen Sie folgende unbestimmten Integrale

(a) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$
(b) $\int (2x^2-5x+3)\,dx$
(c) $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$
(d) $\int \frac{x+2}{x+1}\,dx$
(e) $\int \cos(3x)\,dx$
(f) $\int (5\cos(3x-1)+\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$
(g) $\int (x+\frac{1}{x}+4\sqrt{x+1}\,dx$
(h) $\int 4e^{2x}\,dx$

Aufgabe 3.3— Berechnen Sie folgende unbestimmten Integrale mit Hilfe der partiellen Integration

(a) $\int x\sin(x)\,dx$
(b) $\int xe^x\,dx$
(c) $\int x^2\ln(x)\,dx$
(d) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$
(e) $\int \sin^2(x)\,dx$
(f) $\int x^2e^{2x}\,dx$

Aufgabe 3.4— Integrieren Sie die rationalen Funktionen aus Aufgabe 1.19 unter Benutzung der dort durchgeführten Partialbruchzerlegung.

4 Vektorrechnung

Physikalische Vorgänge müssen oft in drei Raumdimensionen beschrieben werden. Beispielsweise gilt für die Bewegung der Planetenbahnen, dass die Position eines Planeten zu einem bestimmten Zeitpunkt durch drei Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ angegeben wird, wobei wir annehmen wollen, dass der Koordinatenursprung $x = y = z = 0$ im Zentrum der Sonne liegt. Im Gegensatz zu der Wurfparabel (1.1), bei der eine einzige Größe $z(t)$ ausreichte, um die Position des Teilchens festzulegen, müssen wir bei der Beschreibung der Planetenbahnen die Position der Planeten durch Angabe von drei Größen charakterisieren. Eine elegantere Möglichkeit zur Beschreibung ist durch den *Vektor*

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

gegeben. Hier verwenden wir anstelle von x, y und z nur eine einzige Größe $\vec{r}$. Besonders in der englischsprachigen Literatur ist es üblich, anstelle der Schreibweise $\vec{r}$, bei der ein Pfeil über den Variablennamen gesetzt wird, die Schreibweise $\boldsymbol{r}$ oder $\underline{r}$ zu verwenden. Auch die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist ein Vektor in drei Dimensionen, der in Analogie zu Glg. (2.1) definiert werden kann.

Zur Beschreibung von Vektoren werden üblicherweise eine Reihe von Begriffen verwendet, die im Folgenden kurz erläutert werden sollen.

- Vektoren. Vektoren sind Größen, die eine bestimmte Länge und Richtung besitzen. Graphisch stellen wir Vektoren durch Pfeile dar, deren Länge den Betrag und deren Lage die Richtung darstellen. Zahlenmäßig beschreiben wir Vektoren in zwei Dimensionen (Ebene) durch Zahlenduppel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und in drei Dimensionen (Raum) durch Zahlentrippel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Für einen beliebigen Vektor $\vec{a}$ werden wir oft die Schreibweise (a_1, a_2) in zwei und (a_1, a_2, a_3) in drei Dimensionen benutzen.

- Länge. Die Länge eines Vektors $\vec{a}$, der auch oft als der *Betrag* des Vektors bezeichnet wird, ist durch $a = |\vec{a}|$ gekennzeichnet und ist definiert durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \tag{4.2}$$

- Einheitsvektor. Ein Einheitsvektor $\vec{e}$ ist ein Vektor der Länge Eins, d.h. $|\vec{e}| = 1$.

- Vektorrichtung. Den Einheitsvektor $\vec{e}$, der die Richtung eines Vektors beschreibt, erhält man, indem man jede Komponente a_i durch den Betrag a des Vektors dividiert, d.h. $e_i = \frac{a_i}{a}$.

- Nullvektor. Der Nullvektor $\vec{0}$ ist gegeben durch

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \qquad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \tag{4.3}$$

- Koordinatensystem. Ein Koordinaten- oder Bezugssystem ist durch Angabe des Ursprungs $\vec{0}$ sowie der Richtungen der zwei (Ebene) bzw. drei (Raum) Raumachsen bestimmt. Beispielsweise können wir in einem Zimmer eine Ecke als Nullpunkt $\vec{0}$ definieren und die drei Raumachsen in Richtung der von der Ecke ausgehenden Kanten des Zimmers legen.

- Ortsvektor. Der Ortsvektor ist ein Vektor, der vom Ursprung $\vec{0}$ des Bezugssystems zu einem bestimmten Punkt im Raum zeigt. Er bezeichnet damit den Ort des Punktes im Raum. Beispielsweise ist der Ort $\vec{r}$ in Glg. (4.1) ein Ortsvektor, während die Geschwindigkeit ein beliebiger Vektor ist, der nur durch seine Länge und Richtung definiert ist.

Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für Vektoren in zwei Dimensionen.

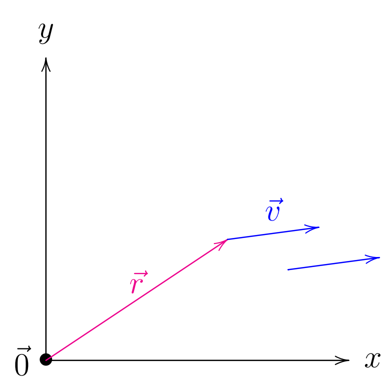


Abbildung 18: Beispiel für Vektoren. $\vec{r}$ bezeichnet einen Ortsvektor, der vom Ursprung zu dem Punkt zeigt. Der Ortsvektor ist fixiert und kann nicht verschoben werden. $\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit. Der Vektor $\vec{v}$ ist nicht fixiert und kann parallel verschoben werden.

4.1 Rechenregeln für Vektoren

Es gibt eine Reihe von Rechenregeln für Vektoren, die wir im Folgenden kurz anführen wollen. Der Einfachheit halber werden wir, bis auf eine Ausnahme (Normalvektor), nur Vektoren in drei Dimensionen untersuchen. Die Einschränkung für Vektoren in der Ebene ist offensichtlich.

- Addition. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man die jeweiligen Komponenten addiert,

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_1 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

- Subtraktion. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden subtrahiert, indem man die jeweiligen Komponenten subtrahiert,

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_1 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

- Multiplikation mit Zahl. Ein Vektor $\vec{a}$ wird mit einer Zahl c multipliziert, indem man die jeweiligen Komponenten mit c multipliziert,

$$c\,\vec{a}=c\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c\,a_1 \\ c\,a_2 \\ c\,a_3 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Beispiel 4.1— Bestimmt werden soll der Einheitsvektor der Richtung von $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Betrag des Vektors ist $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1}=3$. Der Einheitsvektor ist gegeben durch $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, d.h. $\vec{e}=\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Beispiel 4.2— Ein Teilchen, das sich zum Zeitpunkt 0 am Ort $\vec{r}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ befindet, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wo befindet es sich zum Zeitpunkt 2. Der neue Ort $\vec{r}'$ läßt sich gemäß $\vec{r}'=\vec{r}+t\,\vec{v}$ berechnen, d.h. $\vec{r}'=\begin{pmatrix} 1+2\cdot 2 \\ 1+2\cdot 0 \\ 0+2\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

■ Skalarprodukt. Das Skalarprodukt ordnet zwei Vektoren eine Zahl zu. In zwei bzw. drei Dimensionen ist es definiert als

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 \\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3\,, \qquad (4.7)\end{aligned}$$

mit α dem Winkel, der von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird. Geometrisch kann man das Skalarprodukt als Projektion des einen Vektors auf den anderen interpretieren. Das Skalarprodukt ist kommutativ und distributiv, d.h. es gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad (4.8)$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}\,. \qquad (4.9)$$

Das Skalarprodukt kann verwendet werden um festzustellen, ob zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen. In diesem Fall gilt $\cos 90^\circ = 0$ und es folgt $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

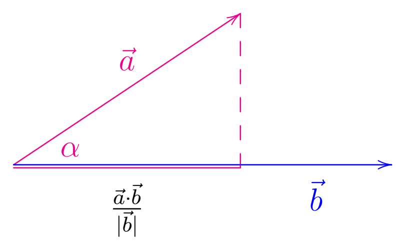


Abbildung 19: Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Geometrisch entspricht es der Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$ (oder umgekehrt).

■ Normalvektor in der Ebene.

Weiter unten werden wir einen Vektor in der Ebene benötigen, der normal (senkrecht) auf einen beliebigen Vektor $\vec{a}$ stehen soll. Offensichtlich erfüllt dies der Vektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}, \qquad (4.10)$$

da $\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$ gilt, d.h. $\vec{a}$ und $\vec{n}$ stehen senkrecht aufeinander.

- **Vektorprodukt.** Im Dreidimensionalen gibt es zusätzlich zum Skalarprodukt noch das Vektorprodukt, das definiert ist durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch $\vec{b}$, und seine Länge ist gleich $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\alpha$. Geometrisch entspricht diese Länge der Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ aber dafür distributiv. Es gilt

$$\begin{aligned} &\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \\ &\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Aufgabe 4.1— Zeigen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes, dass $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Zeigen Sie, dass die Rechenregeln (4.12) gelten und dass $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ gilt.

Aufgabe 4.2— Bestimmen Sie die Winkel α, β, γ, die der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ mit den Koordinatenachsen bildet.

Aufgabe 4.3— Zeigen Sie, dass die Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Zeigen Sie zuerst, dass die drei Vektoren ein Dreieck bilden und dann, dass dieses Dreieck rechtwinkelig ist.

4.2 Geradengleichung

Eine Gerade kann durch einen Punkt $\vec{P}$ der Gerade und den Richtungsvektor $\vec{a}$ festgelegt werden. Alle Punkte der Gerade können dann mit Hilfe des Parameters λ gemäß

$$\vec{x} = \vec{P} + \lambda\,\vec{a}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

bestimmt werden. Die Form (4.13) wird auch als Parameterform bezeichnet. Sie ist in zwei und drei Dimensionen gültig.

Aufgabe 4.4— Stellen Sie eine Gerade auf, die durch den Punkt $P = (1, 3, 2)$ geht und: (a) parallel zur x-Achse ist, (b) normal auf die xy-Ebene steht, (c) durch den Punkt $Q = (-2, 4, 1)$ geht.

In zwei Dimensionen können wir eine weitere Form für die Geradengleichung finden. Gleichung (4.13) ist von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} .$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit dem Normalvektor von $\vec{a}$, so erhalten wir

$$a_2\, x - a_1\, y = a_2\, P_1 - a_1\, P_2\,. \tag{4.14}$$

Diese Gleichung ist von der früher verwendenten Form (1.12). Da in ihr der Parameter λ nicht mehr vorkommt, wird sie als *parameterfreie Form* bezeichnet.

Aufgabe 4.5— Vergleich Sie die Gleichungen (4.14) und (1.12). Drücken Sie k und d durch a_1, a_2, P_1, P_2 aus.

Aufgabe 4.6— Ermitteln Sie die parameterfreie Form der Geradengleichung für (a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, (b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.3 Ebenengleichung

Eine Ebene in drei Dimensionen kann durch einen Punkt $\vec{P}$ und zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die nicht parallel sein dürfen, aufgespannt werden. Mit Hilfe der beiden Parameter λ und μ kann jeder Punkt der Ebene durch

$$\vec{x} = \vec{P} + \lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{b} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{4.15}$$

angeschrieben werden. Diese Form wird als *Parameterform der Ebene* bezeichnet. Um zu einer parameterfreien Form zu gelangen, multiplizieren wir beide Seiten mit dem Normalvektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, und erhalten

$$n_1\, x + n_2\, y + n_3\, z = \vec{n} \cdot \vec{P}\,. \tag{4.16}$$

Aufgabe 4.7— Bestimmen Sie die Parameterform der Ebene, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ geht. Wie sieht die parameterfreie Form aus?

5 Tests der letzten Jahre

Auf den folgenden Seiten finden Sie zum Üben die gesammelten Tests der letzten Jahre.

Test 2014

1. (20 P) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)(x-1)}$$

(a) Definitionsmenge,

(b) Asymptoten (Beachten Sie: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$),

(c) Nullstellen,

(d) Extremstellen,

(e) Art der Extemstelle (Maximum, Minimum, Sattelpunkt);

(f) skizzieren Sie die Funktion.

2. (10 P) Berechnen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen:

(a) $\quad f(x) = \sqrt{\sin\left(x^2+2\right)}\,, \qquad f'(x) = \ ?$

(b) $\quad f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}\,, \qquad f'(x) = \ ?$

3. (10 P) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie sie in die Form $\ln(\dots)$ und $\exp(\dots)$ bringen:

(a) $\quad a\ln x + a\ln(x+1) \ = \ ?$

(b) $\quad \left(e^{3x}\right)^x \, e^{-5x} \ = \ ?$

4. (10 P) Berechnen Sie die folgenden zwei Integrale:

(b) $\quad \displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx \ = \ ?$

(a) $\quad \displaystyle\int x^2 \sin(x)\,dx \ = \ ?$

5. (10 P) Eine Ebene verläuft durch folgende drei Punkte:

$$P_1 = (2,3,0)\,, \quad P_2 = (-1,0,2)\,, \quad P_3 = (1,1,2)\,.$$

Geben Sie:

(a) die Parameterform der Ebene, sowie

(b) die parameterfreie Form der Ebene an.

Test 2016

1. (20 P) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$$

a) Definitionsmenge,

b) Funktion gerade oder ungerade,

c) Asymptoten (Beachten Sie: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$),

d) Nullstellen,

e) Extremstellen,

f) Skizzieren Sie die Funktion.

2. (10 P) Berechnen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2 + x)}$,

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos(x^2)}$.

3. (6 P) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie sie in die Form ln(...) und exp(...) bringen:

a) $a \ln x + a \ln(x-1)$,

b) $(e^x)^{2x} e^{-2x}$.

4. (14 P) Berechnen Sie die folgenden zwei Integrale:

a) $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)(x+3)} \, dx$.

5. (10 P) Eine Ebene verläuft durch die folgenden drei Punkte: $P_1 = (1, 2, -1)$, $P_2 = (0, 1, 3)$, $P_3 = (2, -2, 1)$. Geben Sie:

a) die Parameterform der Ebene, sowie

b) die parameterfreie Form der Ebene an.

Test 2017

1. (20 P) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$$

a) Definitionsmenge,

b) Funktion gerade oder ungerade,

c) Asymptoten (Beachten Sie: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$),

d) Nullstellen,

e) Extremstellen,

f) Skizzieren Sie die Funktion (bestimmen Sie ein paar zusätzliche Werte).

2. (10 P) Berechnen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt{\cos(x^2+2)}$,

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

3. (6 P) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie sie in die Form ln(...) und exp(...) bringen:

a) $a\ln(x+1) - a\ln(x-1)$,

b) $(e^{x^2})^x e^{2x^2}$.

4. (14 P) Berechnen Sie die folgenden zwei Integrale:

a) $\displaystyle\int x^3 e^x \, dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x+4)} \, dx$.

5. (10 P) Eine Ebene verläuft durch die folgenden drei Punkte: $P_1 = (1,0,-1)$, $P_2 = (1,1,3)$, $P_3 = (3,-2,1)$. Geben Sie:

a) die Parameterform der Ebene, sowie

b) die parameterfreie Form der Ebene an.