

# Vektoranalysis – PHY.E10

Vorlesungsskriptum SS 2019

**Assoz.-Prof. Dr. Peter Puschnig**

Institut für Physik, Fachbereich Theoretische Physik

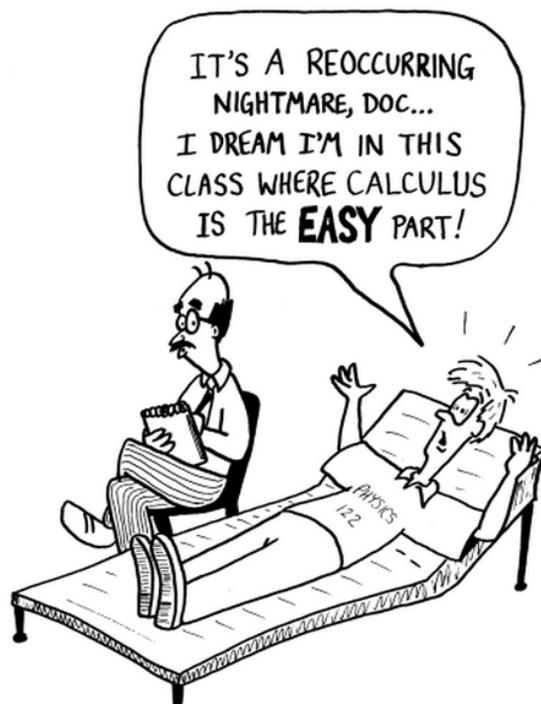
Karl-Franzens-Universität Graz

Universitätsplatz 5, A-8010 Graz

peter.puschnig@uni-graz.at

<http://physik.uni-graz.at/~pep>

Graz, 12. Juni 2019





## Über dieses Skriptum

Dieses Vorlesungsskriptum lehnt sich in seiner Vorgehensweise weitgehend an das Buch "Mathematische Methoden in der Physik" (Kapitel 7–10 und 19) von Christian B. Lang und Norbert Pucker an (siehe auch <http://physik.uni-graz.at/~cbl/mm>). Eine weitere Grundlage bilden auch die Vorlesungsskripten von Prof. Walter Papousek "Vektor-Tensorrechnung 1" und "Vektor-Tensorrechnung 2" herausgegeben vom Skriptenreferat der Hochschülerschaft der TU Graz sowie handschriftliche Unterlagen von Prof. Wolfgang Schweiger.

## Zum Inhalt der Vorlesung

Die Vektoranalysis beschäftigt sich mit Funktionen, deren Funktionswerte Vektoren sind. Denken Sie etwa an die Bewegung eines Teilchens im Raum. Die Bahn des Teilchens wird dann durch einen Vektor  $\vec{r}$  beschrieben der von der Zeit  $t$  abhängt,  $\vec{r}(t)$ , mathematisch also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{r} : t &\mapsto \vec{r}(t) \end{aligned}$$

In der Physik interessieren wir uns dafür welche Strecke das Teilchen zurückgelegt hat, welche Geschwindigkeit und Beschleunigung es an einem bestimmten Ort oder zu einer bestimmten Zeit hat. Wie wir diese Größen berechnen, nämlich durch Aufintegrieren von Wegelementen bzw. durch Ableiten der vektorwertigen Funktion (Bahnkurve) werden wir im ersten Kapitel (1) lernen. Wir werden auch den Begriff eines Tensors  $n$ -ter Stufe kennenlernen. Tensoren 0. Stufe identifizieren wir mit Skalaren, Tensoren 1. Stufe sind die bereits wohlbekannten Vektoren, Tensoren 2. Stufe sind dann  $3 \times 3$  Matrizen, die beim Übergang in ein anderes Koordinatensystem ein bestimmtes Transformationsverhalten zeigen. Physikalische Beispiele für Tensoren 2. Stufe wären etwa der Trägheitstensor oder der elektrische Leitfähigkeitstensor in einem Kristall. Tensoren  $n$ -ter Stufe sind dann entsprechend Größen, die durch je  $3^n$  Zahlen in einem Koordinatensystem gegeben sind, beispielsweise ist der Elastizitätstensor ein Tensor 4. Stufe.

Ein zentrales Kapitel dieser Vorlesung (2) beschäftigt sich mit den *Integralsätzen* von Gauß, Stokes und Green. Diese treten in der Physik sehr oft auf und verknüpfen etwa Integrale über ein *Volumen* mit dem Integral über die *Oberfläche* dieses Volumens, oder ein Integral über eine *Fläche* mit dem Integral über den *geschlossenen Weg* um diese Fläche. Eine wichtige Konsequenz solcher Integralsätze ist etwa die, dass in der Elektrostatik der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche proportional der eingeschlossenen Ladung ist.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA \quad (\text{Gauß'scher Satz})$$

Aber auch in anderen Bereichen der Physik resultieren aus solchen Integralsätzen wichtige *Erhaltungssätze*. Zum Beispiel die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik, die besagt, dass der Fluss in bzw. aus einem gegebenen Volumen gleich ist abzüglich (zuzüglich) etwaiger Quellen oder Senken in dem betrachteten Volumen.

Der Satz von Stokes

$$\int_F \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} \, dA = \oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{r} \quad (\text{Satz von Stokes}).$$

verknüpft das Integral eines Vektorfeldes  $\vec{B}$  über die Fläche  $F$  mit dem Linienintegral über den Rand  $\partial F$  der Fläche. In der Elektrodynamik (Ampere'sches Gesetz) setzt dieser Integralsatz das Kurvenintegral des magnetischen Feldes um eine geschlossene Kurve in Verbindung mit dem Strom, der durch die von dieser Kurve eingeschlossene Fläche fließt.

Bevor wir allerdings diese wichtigen Integralsätze mathematisch formulieren können, sind noch einige Vorarbeiten notwendig. Zum einen lernen wir die Darstellung von *Flächen* im Raum kennen, die wir als zwei-parametrische Abbildung der Form

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{f} : (u, v) &\mapsto \vec{f}(u, v) \end{aligned}$$

eingeführen. Insbesondere behandeln wir die Darstellung von Flächenelementen, was uns die Berechnung von Integralen über Oberflächen ermöglichen wird. Zum anderen führen wir wichtige *Vektoroperatoren* ein, wie den Gradienten, die Divergenz oder die Rotation. Damit können wir dann definieren, was wir unter einem konservativen Kraftfeld verstehen, und den Satz von Poincare formulieren: Die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet genau dann, wenn es lokal ein Gradientenfeld ist, und die Divergenz eines Vektorfeldes verschwindet genau dann, wenn es lokal die Rotation eines anderen Feldes ist. Diese Aussagen sind überaus wichtig zum Verständnis vieler physikalischer Phänomene etwa in der Elektrodynamik.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns ausführlich mit der Verwendung von *krummlinigen Koordinatensystemen*, also etwa Zylinder- und Kugelkoordinaten. Bei Verwendung solcher, an die Symmetrie einer physikalischen Fragestellung angepasster, Koordinaten werden wir uns überlegen, wie die Linien-, Flächen- und Volumenelemente in krummlinigen Koordinatensystemen aussehen bzw. die Darstellung von Vektoroperation wie Gradient, Divergenz und Rotation in orthogonalen krummlinigen Koordinatensystemen kennenlernen. Nach der Behandlung der Rechenregeln für algebraische bzw. Differenzialoperation für Tensoren beschließen wir dieses Kapitel mit den Begriffen ko- bzw. kontravariante Darstellung von Vektoren, Begriffe die etwa in der mathematischen Beschreibung der (allgemeinen) Relativitätstheorie sehr wichtig sind.

Das letzte Kapitel dieses Skriptums (Kapitel 4) ist nicht direkt dem Themengebiet der Vektoranalysis zuzuordnen. Hier soll ein erster Einblick in die Funktionentheorie gegeben werden, also der Theorie differenzierbarer komplexwertiger Funktionen mit einer komplexen Variablen. Insbesondere lernen wir den Cauchy'schen Integralsatz kennen, der Aussagen über Kurvenintegrale in der komplexen Ebene macht. Ausgehend von diesem Satz gewinnen wir die Cauchy'sche Integralformel sowie den Residuensatz, die für die praktische Berechnung von Integrale von großer Bedeutung sind.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen der Vektoranalysis</b>	<b>1</b>
1.1 Skalare, Vektoren, Tensoren	1
1.1.1 Schreibweisen und Definitionen	1
1.1.2 Rechnen mit Vektoren	3
1.1.3 Das Skalarprodukt	4
1.1.4 Darstellung von Vektoren	6
1.1.5 Orthogonale Transformationen	8
1.1.6 Endgültige Definition eines Vektors	11
1.1.7 Definition von Tensoren 2. und höherer Stufe	12
1.1.8 Das Vektorprodukt	14
1.1.9 Tensoroperationen	20
1.1.10 Tensoren zweiter Stufe	22
1.2 Raumkurven	33
1.2.1 Veränderliche Vektoren	33
1.2.2 Parametrisierung von Raumkurven	35
1.2.3 Bogenelement	36
1.2.4 Tangentenvektor, Krümmung, Torsion	37
1.2.5 Linienintegrale	41
1.3 Flächen im Raum	46
1.3.1 Parameterdarstellung einer Fläche	46
1.3.2 Tangentialebene, Normalenvektor und Flächenelement	47
1.3.3 Flächenintegrale	52
<b>2 Integralsätze</b>	<b>55</b>
2.1 Differenzialoperatoren	55
2.1.1 Der Nabla-Operator	55
2.1.2 Gradient	57
2.1.3 Divergenz	59
2.1.4 Rotation	61

2.1.5	Zusammengesetzte Differentialoperatoren . . . . .	62
2.1.6	Satz von Poincaré . . . . .	64
2.2	Der Satz von Gauß . . . . .	67
2.2.1	Beweis des Gauß'schen Integralsatzes . . . . .	69
2.2.2	Weitere Anwendungen des Gauß'schen Integralsatzes . . . . .	70
2.2.3	Modifikationen des Gauß'schen Satzes . . . . .	72
2.3	Der Satz von Stokes . . . . .	74
2.3.1	Beweisführung zum Satz von Stokes . . . . .	76
2.3.2	Anwendungen des Stokes'schen Satzes . . . . .	78
2.3.3	Der Integralsatz von Green in der Ebene . . . . .	80
<b>3</b>	<b>Krummlinige Koordinatensysteme</b> . . . . .	<b>83</b>
3.1	Gebräuchliche Koordinatensysteme . . . . .	83
3.1.1	Zylinderkoordinaten . . . . .	83
3.1.2	Kugelkoordinaten . . . . .	86
3.2	Allgemeine orthogonale Koordinatensysteme . . . . .	90
3.2.1	Kartesische und krummlinige Koordinaten . . . . .	90
3.2.2	Tangentenvektoren und Normalenvektoren . . . . .	91
3.2.3	Der metrische Tensor . . . . .	92
3.2.4	Kartesische und krummlinige Koordinaten . . . . .	96
3.2.5	Linienelemente, Flächenelemente, Volumenelement . . . . .	98
3.2.6	Differenzialoperatoren . . . . .	101
3.2.7	Differenzialoperatoren in Zylinderkoordinaten . . . . .	106
3.2.8	Differenzialoperatoren in Kugelkoordinaten . . . . .	108
<b>4</b>	<b>Funktionentheorie</b> . . . . .	<b>113</b>
4.1	Analytische Funktionen . . . . .	115
4.1.1	Stetigkeit von komplexen Funktionen . . . . .	115
4.1.2	Differenzierbarkeit von komplexen Funktionen . . . . .	116
4.2	Komplexe Integration . . . . .	119
4.2.1	Linienintegral . . . . .	119
4.2.2	Integralsatz von Cauchy . . . . .	120
4.2.3	Integralformel von Cauchy . . . . .	123
4.2.4	Residuensatz . . . . .	125

# CDF Demonstrationen

1	Krümmung und Torsion . . . . .	41
2	Linienintegral . . . . .	46
3	Der Satz von Gauß . . . . .	74
4	Der Satz von Stokes . . . . .	82
5	Zylinderkoordinaten . . . . .	86
6	Kugelkoordinaten . . . . .	89
7	Parabolische Zylinderkoordinaten . . . . .	89
8	Verschiedene krummlinige Koordinaten . . . . .	90
9	Darstellung komplexer Funktionen . . . . .	114
10	Integration von $z^n$ um den Ursprung . . . . .	121
11	Integration in der komplexen Ebene . . . . .	122
12	Illustration des Residuensatzes . . . . .	127
13	Die Riemann'sche Zahlenkugel . . . . .	128



# Kapitel 1

## Grundlagen der Vektoranalysis

### 1.1 Skalare, Vektoren, Tensoren

Tensoren sind Größen, mit deren Hilfe man Skalare, Vektoren und weitere Größen analoger Struktur in ein einheitliches Schema zur Beschreibung mathematischer und physikalischer Zusammenhänge einordnen kann. In diesem Kapitel werden wir Tensoren verschiedener Stufe als mathematische Größen einführen, die über ihr Transformationsverhalten beim Übergang von einem orthogonalen Koordinatensystem zu einem anderen, gedrehten Koordinatensystem definiert werden.

#### 1.1.1 Schreibweisen und Definitionen

**Definition.** (vorläufige Definition) Unter einem *Vektor* verstehen wir eine orientierte Strecke, also eine Strecke zwischen zwei Punkten  $P, Q \in \mathbb{R}^3$ , auf der eine Orientierung (Durchlaufsin) festgelegt ist.

Diese Definition ist deshalb nur vorläufig, weil wir an späterer Stelle präzisieren wollen, dass die Koordinaten von Vektoren einem bestimmten Transformationsverhalten folgen, wenn diese von einem Koordinatensystem in ein anderes transformiert werden. Wir werden dann auch die Bezeichnung *Tensor 1. Stufe* als Synonym für Vektoren einführen. Dementsprechend bezeichnen wir *Skalare*, also Größen, die in jedem Koordinatensystem die gleiche Darstellung haben, als *Tensoren 0. Stufe*. Des Weiteren werden wir dann *Tensoren n-ter Stufe* als Größen einführen, deren Transformationsverhalten bestimmten Gesetzen folgt. Beispiele für *Skalare* in der Physik sind etwa die potentielle Energie oder die Temperatur. Vektorielle Größen (Tensoren 1. Stufe) sind zum Beispiel die Geschwindigkeit, die Kraft, oder der magnetische Feldvektor. Typische Beispiele für Tensoren 2. Stufe, also Größen die

durch  $3^2 = 9$  Zahlen in einer  $3 \times 3$ -Matrix ausgedrückt werden, sind etwa der Trägheitstensor, oder der elektrische Leitfähigkeitstensor in einem Kristall. Es gibt durchaus auch physikalische Größen, die durch Tensoren höherer Stufe beschrieben werden müssen, z.B. der Elastizitätstensor, ein Tensor 4. Stufe mit  $3^4 = 81$  Einträgen, der in einer Verallgemeinerung des Hook'schen Gesetzes für Kristalle die Verknüpfung zwischen den Spannungs- und Dehnungstensoren herstellt.

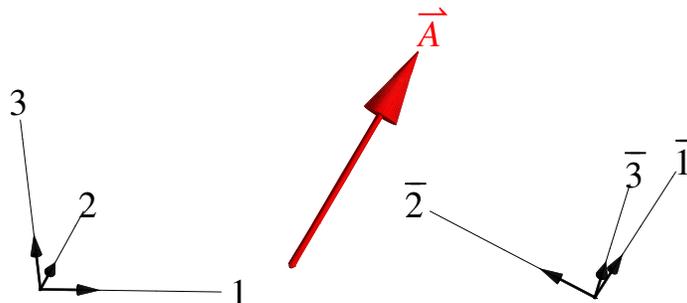
**Namen und Darstellung von Vektoren.** Als *symbolischen Namen* für Vektoren verwenden wir in diesem Skriptum Buchstaben mit einem darüberliegenden Pfeil, z.B.  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  oder  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  usw. Hierbei ist zu beachten, dass in vielen Büchern, wie auch in dem Buch "Mathematische Methoden in der Physik" von Lang und Pucker, die Namen von Vektoren durch fettgedruckte Buchstaben gekennzeichnet werden, also  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  oder  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Wenn wir konkret die Koordinaten eines Vektors angeben, also die *Darstellung eines Vektors* in einem bestimmten Koordinatensystem, dann verwenden wird denselben Buchstaben, allerdings mit einem *Index*, der die Werte 1, 2, oder 3 annehmen kann:

$$\left\{ \vec{A} \right\}_k = A_k, \quad k = 1, 2, 3$$

Die geschwungene Klammer mit dem Index auf der linken Seite soll ausdrücken, dass wir von dem symbolischen Ausdruck  $\vec{A}$  in die Koordinatendarstellung übergehen. Es ist zu beachten, dass derselbe Vektor *verschiedene Darstellungen* in unterschiedlichen Koordinatensystemen haben kann. Das drücken wir dann wie folgt aus (vgl. Abbildung):

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{A} \right\}_k &= A_k, \quad k = 1, 2, 3 \\ \left\{ \vec{A} \right\}_{\bar{k}} &= \bar{A}_k, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Die drei Zahlen  $A_1, A_2, A_3$  (=Koordinaten) im "ungestrichenen" Koordinatensystem mit den Achsen 1, 2, 3 unterscheiden sich von den Koordinaten  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$  im "gestrichenen" Koordinatensystem mit den Achsen  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ .



**Betrag und Norm von Vektoren.** Die *Länge* oder den *Betrag eines Vektors*  $\vec{A}$  bezeichnen wir mit  $|\vec{A}|$  oder einfach  $A$  und es gilt:

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad (1.1)$$

$$= \sqrt{\overline{A_1^2} + \overline{A_2^2} + \overline{A_3^2}}. \quad (1.2)$$

Wir sehen, dass die Länge (Betrag) eines Vektors ein Skalar ist, das heißt nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt.

**Einstein'sche Summenkonvention.** Das häufige Auftreten von bestimmten Summationen in der Vektor-Tensorrechnung hat zur Aufstellung des so genannten Summationsübereinkommens geführt. Diese Konvention macht das Schreiben von Summenzeichen überflüssig. Es besteht in der Festsetzung, dass *über jeden Index, der in einem Produkt zweimal vorkommt, von 1 bis 3 zu summieren ist*. Als Beispiel geben wir nochmals das Betragsquadrat eines Vektors nach dieser Konvention an:

$$|\vec{A}|^2 = A_i A_i = \sum_{i=1}^3 A_i A_i = A_1 A_1 + A_2 A_2 + A_3 A_3.$$

Es ist zu beachten, dass die Wahl des Summationsindex beliebig ist, also folgende Ausdrücke identisch sind:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_i A_i} = \sqrt{A_j A_j} = \sqrt{A_k A_k}.$$

Nicht zulässig wäre jedoch, obigen Ausdruck in folgender Weise zu schreiben:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_i^2}, \quad (\text{falsch!}),$$

weil der Summationsindex  $i$  nur einmal auftaucht, und somit nicht klar ist, worüber zu summieren ist.

### 1.1.2 Rechnen mit Vektoren

Hier fassen wir einfache Rechenregeln für das Addieren und Subtrahieren von Vektoren sowie die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren zusammen. Es ist zu beachten, dass für die konkrete Rechnung von der symbolischen Schreibweise, z.B.  $\vec{A} + \vec{B}$ , immer auf die Darstellung des Vektors in einem

Koordinatensystem übergegangen wird, also:

$$\left\{ \vec{A} + \vec{B} \right\}_k = A_k + B_k \quad (1.3)$$

$$\left\{ \vec{A} - \vec{B} \right\}_k = A_k - B_k. \quad (1.4)$$

Weiters lässt sich leicht zeigen, dass die Vektoraddition kommutativ und assoziativ ist:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (1.5)$$

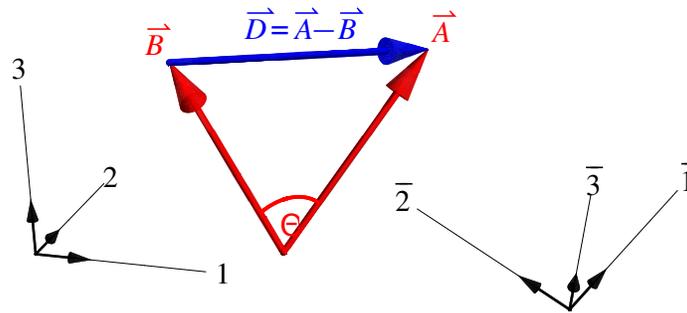
$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}). \quad (1.6)$$

Unter dem Produkt eines Vektors  $\vec{A}$  mit einem Skalar  $\lambda$ , symbolisch schreiben wir  $\lambda\vec{A}$ , verstehen wir jenen Vektor, dessen Koordinaten sich durch die Multiplikation der entsprechenden Koordinaten von  $\vec{A}$  mit  $\lambda$  ergeben:

$$\left\{ \lambda\vec{A} \right\}_k = \lambda A_k. \quad (1.7)$$

### 1.1.3 Das Skalarprodukt

Wir suchen zunächst den Winkel  $\theta$  zwischen zwei Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  und verwenden dazu das aus den Vektoren  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ , und  $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$  gebildete Dreieck (siehe Abbildung).



Aus dem Cosinussatz folgt:

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta.$$

Andererseits folgt aus der Bildung des Betragsquadrats von  $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$  in einem Koordinatensystem 1,2,3:

$$\begin{aligned} D^2 &= D_i D_i = (A_i - B_i)(A_i - B_i) \\ &= A_i A_i + B_i B_i - 2A_i B_i \\ &= A^2 + B^2 - 2A_i B_i. \end{aligned}$$

Der Vergleich der obigen beiden Gleichungen zeigt, dass gilt

$$A_i B_i = AB \cos \theta, \quad (\text{Summenkonvention!})$$

In symbolischer Schreibweise führen wir für das sogenannte *skalare Produkt* folgende Schreibweise ein:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta, \quad (1.8)$$

wobei der "." auch manchmal weggelassen wird, also z.B.  $\vec{A}\vec{B} = AB \cos \theta$ . Das skalare Produkt zweier Vektoren  $\vec{A}\vec{B}$  ist, wie der Name schon nahelegt, ein Skalar, d.h. invariant in Bezug auf Änderung des Koordinatensystems. Diese Tatsache sieht man einerseits daran, dass die rechte Seite von Gl. 1.8 das Produkt der Längen  $A$  und  $B$  der Vektoren und des Cosinus des eingeschlossenen Winkel  $\theta$  ist. Alle diese Größen sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Die skalare Eigenschaft von  $\vec{A}\vec{B}$  wird auch ersichtlich, wenn wir die obige Rechnung in einem anderen Koordinatensystem mit den Achsen  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$  ausführen:

$$\begin{aligned} D^2 &= \bar{D}_i \bar{D}_i = (\bar{A}_i - \bar{B}_i)(\bar{A}_i - \bar{B}_i) \\ &= \bar{A}_i \bar{A}_i + \bar{B}_i \bar{B}_i - 2\bar{A}_i \bar{B}_i \\ &= A^2 + B^2 - 2\bar{A}_i \bar{B}_i. \end{aligned}$$

Das heißt die Darstellung des skalaren Produkts mit Hilfe der Koordinaten der Vektoren sieht wie folgt aus:

$$\vec{A}\vec{B} = A_i B_i = \bar{A}_i \bar{B}_i = \dots \text{ usw.} \quad (1.9)$$

Das skalare Produkt ist kommutativ, distributiv, aber *nicht* assoziativ:

$$\vec{A}\vec{B} = \vec{B}\vec{A} \quad (1.10)$$

$$\vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{C} \quad (1.11)$$

$$\vec{A}(\vec{B}\vec{C}) \neq (\vec{A}\vec{B})\vec{C}. \quad (1.12)$$

Dass die Gleichheit in 1.12 nicht gilt, ist unmittelbar einsichtig, weil die linke Seite ja einen Vektor parallel zu  $\vec{A}$  darstellt, während die rechte Seite ein Vektor parallel zu  $\vec{C}$  ist. Für beliebige Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{C}$  kann somit 1.12 nicht gelten. Das sieht man auch, wenn man von der symbolischen Schreibweise zur Koordinatenschreibweise wechselt:

$$A_i B_k C_k \neq A_k B_k C_i.$$

Bei Verwendung der Summenkonvention ist zu beachten, dass in einem Produkt mit mehreren Fakto-

ren der gleiche Buchstabe als Index nicht öfter als zweimal vorkommen darf. Wenn man diese Regel einhält, ergibt sich immer eine eindeutige Schreibweise. Falsch wäre dementsprechend folgender Ausdruck

$$D_i = A_i B_i C_i \text{ (falsch!),}$$

weil ja nicht klar ist, über welche Indices zu summieren ist.

Aus 1.8 folgt, dass das skalare Produkt verschwindet, wenn entweder  $\vec{A}$  oder  $\vec{B}$  der Nullvektor ist (Vektor mit Länge Null), oder der  $\cos \theta = 0$ , das heißt der Winkel  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , gleichbedeutend mit der Aussage, dass  $\vec{A}$  senkrecht auf  $\vec{B}$  steht.

**Bsp. 1** In einem Koordinatensystem mit den Achsen 1,2,3 sind die Koordinaten der Vektoren  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  gegeben durch  $A_i = (1, 2, 3)$ ,  $B_i = (-2, 0, 4)$ ,  $C_i = (1, 1, 1)$ . Wie lautet die Darstellung der Vektoren  $\vec{A}(\vec{B}\vec{C})$  und  $(\vec{A}\vec{B})\vec{C}$ ?

**Bsp. 2** Was bedeuten die folgenden symbolischen Gleichungen in einem Koordinatensystem mit den Achsen 1,2,3? (i)  $\vec{A}\vec{B} = \vec{C}\vec{D}$ , (ii)  $(\vec{A}\vec{B})\vec{C} = \lambda\vec{V}$ , (iii)  $(\vec{A} - \vec{B})\vec{C} = D$ .

**Bsp. 3** Schreibe die folgenden Gleichungen in symbolischer Form: (i)  $(A_i + B_i)(C_i - D_i) = \alpha$ , (ii)  $A_k B_l C_k = D_l$

### 1.1.4 Darstellung von Vektoren

Mithilfe des Skalarprodukts können wir die *Koordinate* und die *Komponente* eines Vektors  $\vec{A}$  in Richtung eines Einheitsvektors  $\vec{e}$  berechnen, wobei  $|\vec{e}| = 1$ .

Unter der *Koordinate* des Vektors  $\vec{A}$  in Richtung eines Einheitsvektors  $\vec{e}$  verstehen wir das skalare Produkt (die Zahl)

$$\vec{A}\vec{e} = A \cos \theta = A_i e_i \tag{1.13}$$

Unter der *Komponente* des Vektors  $\vec{A}$  in Richtung eines Einheitsvektors  $\vec{e}$  verstehen wir den Vektor

$$\vec{A}' = (\vec{A}\vec{e})\vec{e} \tag{1.14}$$

$$\left\{ \vec{A}' \right\}_k = A_i e_i e_k. \tag{1.15}$$

Jeder Vektor  $\vec{A}$  lässt sich in eindeutiger Weise als Summe von zwei Vektoren  $\vec{A}'$  und  $\vec{A}''$  darstellen,

von denen der erste parallel und der zweite senkrecht zu einem gegebenen Einheitsvektor  $\vec{e}$  ist:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}'' \quad (1.16)$$

$$\vec{A}' = (\vec{A}\vec{e})\vec{e} \quad (1.17)$$

$$\vec{A}'' = \vec{A} - (\vec{A}\vec{e})\vec{e}. \quad (1.18)$$

**Definition.** Wir bezeichnen eine *orthogonale Basis* als ein System von drei Einheitsvektoren  $\vec{e}^1$ ,  $\vec{e}^2$ , und  $\vec{e}^3$ , die paarweise aufeinander senkrecht stehen

$$\vec{e}^i \vec{e}^k = \delta_{ik}. \quad (1.19)$$

Hierbei haben wir das so genannte *Kronecker'sche Delta* verwendet, das 1 ist wenn die Indizes  $i = k$  und 0 ist, wenn  $i \neq k$ . Zu beachten ist auch, dass die hochgestellten Indizes zum *Namen* des Vektors gehören. Schreibt man die Gleichung 1.19 ausführlicher, dann sind das die folgenden 9 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}^1 \vec{e}^1 = 1 & \vec{e}^1 \vec{e}^2 = 0 & \vec{e}^1 \vec{e}^3 = 0 \\ \vec{e}^2 \vec{e}^1 = 0 & \vec{e}^2 \vec{e}^2 = 1 & \vec{e}^2 \vec{e}^3 = 0 \\ \vec{e}^3 \vec{e}^1 = 0 & \vec{e}^3 \vec{e}^2 = 0 & \vec{e}^3 \vec{e}^3 = 1 \end{array}$$

Eine *rechtsorientierte orthogonale Basis* liegt vor, wenn  $\vec{e}^1$ ,  $\vec{e}^2$ , und  $\vec{e}^3$  eine orthogonale Basis bilden, und wenn eine Drehung von  $\vec{e}^1$  in Richtung  $\vec{e}^2$  verbunden mit einem Fortschreiten in Richtung der Orientierung von  $\vec{e}^3$  die Bewegung einer Rechtsschraube ergibt.

Stimmen die Richtungen und Orientierungen der Einheitsvektoren einer orthogonalen Basis mit den Richtungen und Koordinatenachsen 1,2,3 eines Koordinatensystems überein, dann gilt:

$$e_i^k = \delta_{ik}. \quad (1.20)$$

Bei dieser Gleichung in Koordinatenschreibweise ist zu beachten, dass der hochgestellte Index  $k$  den Namen des Einheitsvektors bezeichnet, während der tiefgestellte Index  $i$  die  $i$ -te Koordinate anzeigt.

**Satz.** Die skalaren Produkte eines Vektors  $\vec{A}$  mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}^k$  in Richtung der Koordinatenachsen liefern die Koordinaten  $A_k$  des Vektors  $\vec{A}$  bezüglich des gegebenen Koordinatensystems:

$$\vec{A} \vec{e}^k = A_i e_i^k = A_i \delta_{ik} = A_k. \quad (1.21)$$

Somit lässt sich jeder Vektor als Summe seiner drei Komponenten in Richtung der Achsen eines

Koordinatensystems darstellen:

$$\vec{A} = \vec{A}^1 + \vec{A}^2 + \vec{A}^3 = A_1 \vec{e}^1 + A_2 \vec{e}^2 + A_3 \vec{e}^3 \quad (1.22)$$

$$\vec{A}^1 = (\vec{A} \vec{e}^1) \vec{e}^1 = A_1 \vec{e}^1 \quad (1.23)$$

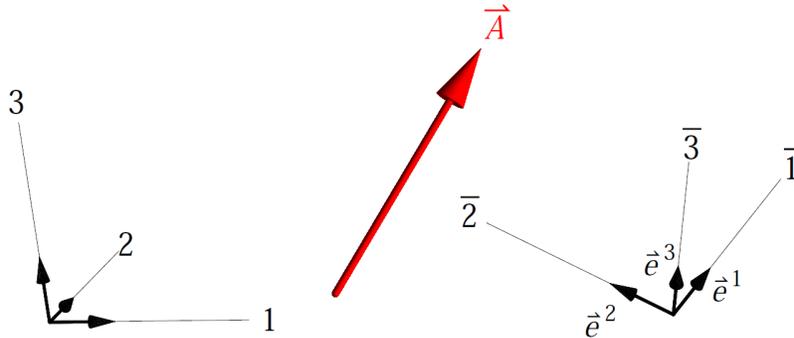
$$\vec{A}^2 = (\vec{A} \vec{e}^2) \vec{e}^2 = A_2 \vec{e}^2 \quad (1.24)$$

$$\vec{A}^3 = (\vec{A} \vec{e}^3) \vec{e}^3 = A_3 \vec{e}^3 \quad (1.25)$$

**Bsp.** Gegeben sind zwei Koordinatensysteme mit den Achsen 1,2,3 und  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$  (siehe Abbildung). Die Koordinaten der Einheitsvektoren  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \text{ und } \vec{e}^3$  entlang der Achsen  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$  seien im System 1,2,3:

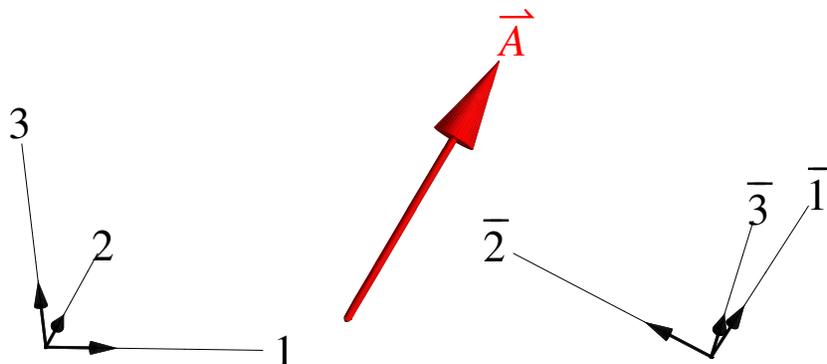
$$e_i^1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad e_i^2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad e_i^3 = (0, 0, 1)$$

Ein Vektor  $\vec{A}$  habe im System 1,2,3 die Koordinaten  $A_i = (2, 2, 3)$ . Wie lauten die Koordinaten des Vektors  $\vec{A}$  im System  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ ?



### 1.1.5 Orthogonale Transformationen

Wir betrachten zwei kartesische Koordinatensysteme mit den Achsen 1, 2, 3 und das System mit den Achsen  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ .



Die normierten Einheitsvektoren in Richtung 1, 2, 3 bezeichnen wir mit  $\vec{d}^1, \vec{d}^2, \vec{d}^3$  und die normierten Einheitsvektoren in Richtung der Achsen  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$  mit  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ . Da die Einheitsvektoren  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$  bzw.  $\vec{d}^1, \vec{d}^2, \vec{d}^3$  eine orthogonale Basis bilden, gilt:

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}^k = e_i^i e_i^k = \bar{e}_i^i \bar{e}_i^k = \delta_{ik} \quad (1.26)$$

$$\vec{d}^i \cdot \vec{d}^k = d_i^i d_i^k = \bar{d}_i^i \bar{d}_i^k = \delta_{ik} \quad (1.27)$$

Hierbei bezeichnet  $e_l^i$  bzw.  $\bar{e}_l^i$  die  $l$ -te Koordinate des Vektors  $\vec{e}^i$  in dem Koordinatensystem 1, 2, 3 bzw.  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ . Und entsprechend bezeichnet  $d_l^i$  bzw.  $\bar{d}_l^i$  die  $l$ -te Koordinate des Vektors  $\vec{d}^i$  in dem Koordinatensystem 1, 2, 3 bzw.  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ . Die Skalarprodukte zwischen den Vektoren  $\vec{e}^i$  und  $\vec{d}^k$  nennen wir  $r_{ik}$

$$r_{ik} \equiv \vec{d}^i \cdot \vec{e}^k = d_i^i e_i^k = \bar{d}_i^i \bar{e}_i^k = \cos \alpha_{ij}. \quad (1.28)$$

Die Elemente der Matrix  $r_{ik}$  sind also die "Kosinüsse" der Winkel zwischen Koordinatenachsen der beiden Koordinatensysteme. Des weiteren gilt

$$d_l^i = \delta_{li} \quad \text{und} \quad \bar{e}_l^k = \delta_{kl}, \quad (1.29)$$

weil ja die Vektoren  $\vec{d}^1, \vec{d}^2, \vec{d}^3$  in dem System 1, 2, 3 die Darstellung  $d_l^1 = (1, 0, 0)$ ,  $d_l^2 = (0, 1, 0)$  und  $d_l^3 = (0, 0, 1)$  haben bzw. die Vektoren  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$  in dem System  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$  ebenso die Darstellung  $\bar{e}_l^1 = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{e}_l^2 = (0, 1, 0)$  und  $\bar{e}_l^3 = (0, 0, 1)$  haben. Damit folgt aus 1.28

$$r_{ik} = e_i^k = \bar{d}_k^i. \quad (1.30)$$

Das heißt: In den *Spalten* der Transformationsmatrix  $r_{ik}$  stehen die Koordinaten der Einheitsvektoren  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$  im System 1, 2, 3, und in den *Zeilen* der Transformationsmatrix  $r_{ik}$  stehen die Koordinaten der Einheitsvektoren  $\vec{d}^1, \vec{d}^2, \vec{d}^3$  in dem System  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ :

$$r_{ik} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 \\ e_2^1 & e_2^2 & e_2^3 \\ e_3^1 & e_3^2 & e_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1^1 & \bar{d}_1^2 & \bar{d}_1^3 \\ \bar{d}_2^1 & \bar{d}_2^2 & \bar{d}_2^3 \\ \bar{d}_3^1 & \bar{d}_3^2 & \bar{d}_3^3 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Berücksichtigen wir 1.30 in 1.26 bzw. 1.27, so erhalten wir die wichtigen *Orthogonalitätsrelationen der Transformationsmatrix*

$$r_{li} r_{lk} = \delta_{ik} \quad \text{und} \quad r_{il} r_{kl} = \delta_{ik}, \quad (1.32)$$

die zeigen, dass es sich bei  $r_{ik}$  um eine *orthogonale* Matrix handelt. Für die Determinante der Transformationsmatrix gilt

$$\det r_{ik} = 1. \quad (1.33)$$

Diese Erkenntnis folgt aus 1.32 und der Tatsache, dass das Produkt der Determinanten von zwei Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  gleich der Determinante des Matrixprodukts  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ist, also

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Wenn wir 1.32 als Matrix-Matrix Multiplikation verstehen wollen, so müssen wir eine der beiden Matrizen transponieren, also  $r_{li} = r_{il}^T$  und erhalten

$$\begin{aligned} \det r_{il}^T \det r_{lk} &= \det r_{il}^T r_{lk} \\ (\det r_{lk})^2 &= \det \delta_{ik} \quad / \sqrt{\phantom{x}} \\ \det r_{lk} &= \pm 1. \end{aligned}$$

Für Transformationsmatrizen, die eine *Drehung* des Koordinatensystems beschreiben gilt das positive Vorzeichen. Für Spiegelungen gilt das negative Vorzeichen.

Wir betrachten nun die Darstellung eines Vektors  $\vec{A}$  in den beiden Koordinatensystemen 1, 2, 3 und  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ :

$$\vec{A} = A_1 \vec{d}^1 + A_2 \vec{d}^2 + A_3 \vec{d}^3 = A_k \vec{d}^k \quad (1.34)$$

$$\vec{A} = \bar{A}_1 \vec{e}^1 + \bar{A}_2 \vec{e}^2 + \bar{A}_3 \vec{e}^3 = \bar{A}_k \vec{e}^k \quad (1.35)$$

Schreiben wir diese beiden symbolischen Gleichungen in Koordinatenschreibweise für das System  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$  bzw. 1, 2, 3, so erhalten wir

$$\bar{A}_i = A_1 \bar{d}_i^1 + A_2 \bar{d}_i^2 + A_3 \bar{d}_i^3 = A_k \bar{d}_i^k \quad (1.36)$$

$$A_i = \bar{A}_1 e_i^1 + \bar{A}_2 e_i^2 + \bar{A}_3 e_i^3 = \bar{A}_k e_i^k. \quad (1.37)$$

Setzen wir nun 1.30 ein, so gelangen wir zu dem *Transformationsgesetz für Vektorkoordinaten*:

$$\bar{A}_i = r_{ki} A_k \quad (1.38)$$

$$A_i = r_{ik} \bar{A}_k \quad (1.39)$$

Diese Gleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen den auf zwei verschiedenen Koordinatensysteme bezogenen Koordinaten ein und desselben Vektors.

### 1.1.6 Endgültige Definition eines Vektors

Wir verwenden die Transformationsgleichungen 1.38 und 1.39, um den Vektorbegriff endgültig zu definieren.

Als *Vektor* bezeichnen wir eine physikalische oder mathematische Größe dann und nur dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) In jedem Koordinatensystem sind drei Zahlen definiert (Koordinaten), durch deren Angabe die physikalische oder mathematische Größe eindeutig bestimmt ist.
- (b) Zwischen den in zwei beliebigen Koordinatensystemen definierten Koordinaten  $A_i$  und  $\bar{A}_i$  besteht die Beziehung

$$A_i = r_{ik}\bar{A}_k \quad (1.40)$$

$$\bar{A}_i = r_{ki}A_k \quad (1.41)$$

Als *Skalar* bezeichnen wir eine physikalische oder mathematische Größe dann und nur dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) In jedem Koordinatensystem ist eine Zahl definiert, durch deren Angabe die physikalische oder mathematische Größe eindeutig bestimmt ist.
- (b) Zwischen den in zwei beliebigen Koordinatensystemen definierten Koordinaten  $A$  und  $\bar{A}$  besteht die Beziehung

$$A = \bar{A} \quad (1.42)$$

**Das skalare Produkt ist ein Skalar.** Wir wollen zeigen, dass  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  formal die obige Definition eines Skalars erfüllt.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i = r_{ik}\bar{A}_k r_{im}\bar{B}_m = r_{ik}r_{im}\bar{A}_k\bar{B}_m = \delta_{km}\bar{A}_k\bar{B}_m = \bar{A}_k\bar{B}_k.$$

Unter Ausnutzung der Transformationseigenschaft von Vektoren 1.40 und der Orthogonalitätsrelation 1.32 ist somit gezeigt, dass das Skalarprodukt von zwei Vektoren invariant in Bezug auf Koordinatentransformationen ist und somit die Bezeichnung "Skalar" tatsächlich verdient.

### 1.1.7 Definition von Tensoren 2. und höherer Stufe

Analog zu Skalaren und Vektoren definieren wir einen Tensoren zweiter Stufe und höherer Stufe über das Transformationsverhalten ihrer Koordinaten beim Übergang von einem Koordinatensystem in ein anderes.

Als *Tensor zweiter Stufe* bezeichnen wir eine physikalische oder mathematische Größe dann und nur dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) In jedem Koordinatensystem sind  $3^2 = 9$  Zahlen definiert (Koordinaten), durch deren Angabe die physikalische oder mathematische Größe eindeutig bestimmt ist.
- (b) Zwischen den in zwei beliebigen Koordinatensystemen definierten Koordinaten  $T_{ik}$  und  $\bar{T}_{ik}$  besteht die Beziehung

$$T_{ik} = r_{in}r_{km}\bar{T}_{nm} \quad (1.43)$$

$$\bar{T}_{ik} = r_{ni}r_{mk}T_{nm} \quad (1.44)$$

Das so genannte *tensorielle oder direkte Produkt* zweier Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  wird symbolisch mit  $\vec{A} \otimes \vec{B}$  bezeichnet und ist definiert durch

$$\{\vec{A} \otimes \vec{B}\}_{ik} = A_i B_k$$

Das tensorielle Produkt der Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  ist in jedem Koordinatensystem durch  $3^2 = 9$  Zahlen definiert. Außerdem gilt:

$$T_{ik} = A_i B_k = r_{in}\bar{A}_n r_{km}\bar{B}_m = r_{in}r_{km}\bar{A}_n\bar{B}_m = r_{in}r_{km}\bar{T}_{nm}.$$

Wir sehen somit, dass sich das tensorielle Produkt zweier Vektoren  $\vec{A} \otimes \vec{B}$  transformiert wie in 1.43 definiert. Anders ausgedrückt können wir auch sagen, dass Tensoren zweiter Stufe das gleiche Transformationsverhalten aufweisen wie das tensorielle Produkt zweier Vektoren.

**Bsp.** Gegeben sind zwei Koordinatensysteme mit den Achsen  $1, 2, 3$  und  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ , wobei die Transformationsmatrix folgende Form hat

$$r_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ein Vektor  $\vec{v}$  und ein Tensor zweiter Stufe  $\bar{T}_{ik}$  haben im System  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$  die Koordinaten:

$$\bar{v}_i = (0, -1, 3), \quad \bar{T}_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie lauten die Koordinaten des Vektors  $\vec{v}$  und des Tensors  $T_{ik}$  im System 1, 2, 3 ?

Antwort: Gleichung 1.40 ergibt

$$v_i = r_{ik}\bar{v}_k = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gleichung 1.43 ergibt für die Transformation des Tensors

$$\begin{aligned} T_{ik} &= r_{in}r_{km}\bar{T}_{nm} = r_{in}\bar{T}_{nm}r_{mk}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(4 + \sqrt{3}) & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Das Kronecker  $\delta$  ist ein Tensor 2. Stufe.** Die Koordinaten des Kronecker  $\delta_{ik}$  sind in allen Koordinatensystemen definiert durch

$$\delta_{ik} = \bar{\delta}_{ik} = \begin{cases} 1 & , i = k \\ 0 & , i \neq k. \end{cases}$$

Wir zeigen das Transformationsverhalten und somit die Aussage, dass  $\delta_{ik}$  ein Tensor 2. Stufe ist:

$$\bar{\delta}_{ik} = r_{ni}r_{mk}\delta_{nm} = r_{mi}r_{mk} = \delta_{ik}$$

Als *Tensor dritter Stufe* bezeichnen wir eine physikalische oder mathematische Größe dann und nur dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) In jedem Koordinatensystem sind  $3^3 = 27$  Zahlen definiert (Koordinaten), durch deren Angabe die physikalische oder mathematische Größe eindeutig bestimmt ist.
- (b) Zwischen den in zwei beliebigen Koordinatensystemen definierten Koordinaten  $T_{ijk}$  und  $\bar{T}_{ijk}$  besteht die Beziehung

$$T_{ijk} = r_{il}r_{jm}r_{kn}\bar{T}_{lmn} \quad (1.45)$$

$$\bar{T}_{ijk} = r_{li}r_{mj}r_{nk}T_{lmn} \quad (1.46)$$

Als *Tensor m-ter Stufe* bezeichnen wir eine physikalische oder mathematische Größe dann und nur dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) In jedem Koordinatensystem sind  $3^m$  Zahlen definiert (Koordinaten), durch deren Angabe die physikalische oder mathematische Größe eindeutig bestimmt ist.
- (b) Zwischen den in zwei beliebigen Koordinatensystemen definierten Koordinaten  $T_{i_1i_2\cdots i_m}$  und  $\bar{T}_{i_1i_2\cdots i_m}$  besteht die Beziehung

$$T_{i_1i_2\cdots i_m} = r_{i_1k_1}r_{i_2k_2}\cdots r_{i_mk_m}\bar{T}_{k_1k_2\cdots k_m} \quad (1.47)$$

$$\bar{T}_{i_1i_2\cdots i_m} = r_{k_1i_1}r_{k_2i_2}\cdots r_{k_mi_m}T_{k_1k_2\cdots k_m} \quad (1.48)$$

### 1.1.8 Das Vektorprodukt

Vermutlich kennen Sie das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) zweier Vektoren nach folgender Definition:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix}$$

Wir lernen hier eine alternative Definition kennen, die von dem sogenannten  $\varepsilon$ -Tensor Gebrauch macht, und die sich besser dafür eignet, gewisse Eigenschaften des Vektorprodukts zu beweisen.

Unter dem  $\varepsilon$ -Tensor ("Epsilon-Tensor") verstehen wir jenen Tensor dritter Stufe, dessen Koordinaten in jedem Koordinatensystem durch folgende Vorschrift festgelegt sind:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= 0 && \text{wenn zwei oder alle drei Indizes gleich sind} \\ \varepsilon_{ijk} &= +1 && \text{für lauter verschiedene Indizes in gerader Permutation} \\ \varepsilon_{ijk} &= -1 && \text{für lauter verschiedene Indizes in ungerader Permutation} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Mit der Grundreihenfolge 1, 2, 3 und  $\varepsilon_{123} = +1$  ergeben sich nach obiger Definition folgende Werte für die insgesamt  $3^3 = 27$  Koordinaten des  $\varepsilon$ -Tensors:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1 \\ \text{alle anderen } \varepsilon_{ijk} &= 0. \end{aligned}$$

**Der  $\varepsilon$ -Tensor ist ein Tensor 3. Stufe.** Wir überprüfen, ob so eingeführte  $\varepsilon$ -Tensor tatsächlich ein Tensor dritter Stufe ist. Dazu testen wir, ob das Transformationsgesetz 1.46 mit der obigen Definition für  $\varepsilon_{ijk}$  erfüllt ist.

$$\bar{\varepsilon}_{pqr} = r_{ip}r_{jq}r_{kr}\varepsilon_{ijk}$$

Setzen wir die Werte für  $\varepsilon_{ijk}$  in obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{pqr} &= r_{1p}r_{2q}r_{3r} + r_{2p}r_{3q}r_{1r} + r_{3p}r_{1q}r_{2r} - r_{1p}r_{3q}r_{2r} - r_{3p}r_{2q}r_{1r} - r_{2p}r_{1q}r_{3r} \\ \bar{\varepsilon}_{pqr} &= \begin{vmatrix} r_{1p} & r_{2p} & r_{3p} \\ r_{1q} & r_{2q} & r_{3q} \\ r_{1r} & r_{2r} & r_{3r} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Im letzten Schritt haben wir den transformierten  $\varepsilon$ -Tensor als dreireihige Determinante geschrieben. Hieraus sehen, wir (i) dass  $\bar{\varepsilon}_{pqr}$  verschwindet, wenn zwei oder mehr Indizes gleich sind (Eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen ist Null), (ii) dass  $\bar{\varepsilon}_{pqr}$  das Vorzeichen ändert, wenn zwei Indizes vertauscht werden (eine Determinante ändert ihr Vorzeichen beim Vertauschen von zwei Zeilen), und (iii) dass  $\bar{\varepsilon}_{123} = 1$  gilt:

$$\bar{\varepsilon}_{123} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = +1.$$

Mit (i)–(iii) ist bewiesen, dass der  $\varepsilon$ -Tensor tatsächlich ein Tensor dritter Stufe ist. Aus dem obigem Beweis gewinnen wir auch die Erkenntnis, dass sich die Koordinaten des  $\varepsilon$ -Tensors in *jedem* Koor-

dinatensystem durch die Elemente einer *beliebigen orthogonalen* Transformationsmatrix  $r_{ik}$  wie folgt darstellen lassen:

$$\varepsilon_{ijk} = \bar{\varepsilon}_{ijk} = \begin{vmatrix} r_{1i} & r_{2i} & r_{3i} \\ r_{1j} & r_{2j} & r_{3j} \\ r_{1k} & r_{2k} & r_{3k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} \\ r_{j1} & r_{j2} & r_{j3} \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} \end{vmatrix}. \quad (1.51)$$

Mithilfe des  $\varepsilon$ -Tensors können wir nun das Vektorprodukt wie folgt definieren:

**Definition.** Unter dem vektoriellen Produkt des Vektors  $\vec{A}$  mit dem Vektor  $\vec{B}$  verstehen wir einen Vektor, den wir symbolisch mit  $\vec{A} \times \vec{B}$  bezeichnen und dessen Koordinaten definiert sind durch:

$$\left\{ \vec{A} \times \vec{B} \right\}_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (1.52)$$

Ausführlich geschrieben bedeutet Gl. 1.52 unter Berücksichtigung von 1.49

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{A} \times \vec{B} \right\}_1 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{1jk} A_j B_k = \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ \left\{ \vec{A} \times \vec{B} \right\}_2 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{2jk} A_j B_k = \varepsilon_{213} A_1 B_3 + \varepsilon_{231} A_3 B_1 = -A_1 B_3 + A_3 B_1 \\ \left\{ \vec{A} \times \vec{B} \right\}_3 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{3jk} A_j B_k = \varepsilon_{312} A_1 B_2 + \varepsilon_{321} A_2 B_1 = A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass die Definition 1.52 für das Vektorprodukt natürlich zu den bereits bekannten Koordinaten des Vektorprodukts führt.

**Bsp 1.** Schreibe die folgenden symbolischen Gleichungen in Koordinatenschreibweise:

$$\vec{D} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}, \quad \vec{E} \vec{F} = (\vec{A} \times \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D})$$

**Bsp 2.** Schreibe die folgenden Gleichungen in symbolischer Form:

$$\varepsilon_{klm} A_l C_k = \varepsilon_{imj} B_j D_i, \quad E_i F_i = \varepsilon_{knj} \varepsilon_{lmn} A_j C_l D_m B_k$$

Wie der Name schon suggeriert, liefert das Vektorprodukt einen Vektor. Um diese Aussage zu beweisen, muss gezeigt werden, dass sich die Koordinaten des Vektorprodukts beim Wechsel von einem in ein anderes Koordinatensystem wie ein Vektor transformieren. Diesen Beweis liefern wir ein wenig später nach.

Zunächst geben wir hier einige wichtige Eigenschaften des Vektorprodukts an.

**Satz.** Bei Vertauschen der Reihenfolge der Vektoren ändert das vektorielle Produkt sein Vorzeichen (d.h. das vektorielle Produkt ist nicht kommutativ)

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (1.53)$$

**Satz.** Das vektorielle Produkt  $\vec{A} \times \vec{B}$  der Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  steht senkrecht auf beide Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$ , d.h. es gilt:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{und} \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.54)$$

**Satz.** Der Betrag des vektoriellen Produkts  $\vec{A} \times \vec{B}$  der Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  ist gegeben durch:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2} \quad (1.55)$$

Der Betrag des vektoriellen Produkts  $\vec{A} \times \vec{B}$  der Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  ist gleich der Fläche des von  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  gebildeten Parallelogramms

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (1.56)$$

Wir wollen die Eigenschaften 1.53–1.56 des vektoriellen Produkts beweisen. Die Eigenschaft 1.53 folgt unmittelbar aus der Antisymmetrie des  $\varepsilon$ -Tensors bei Vertauschung zweier Indizes:

$$\left\{ \vec{A} \times \vec{B} \right\}_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k = -\varepsilon_{ikj} B_k A_j = -\left\{ \vec{B} \times \vec{A} \right\}_i$$

Um die Aussagen 1.54–1.56 zu zeigen, bemerken wir, dass wir in der Darstellung von  $\varepsilon_{ijk}$  in 1.51 auch die einfachst mögliche Transformationsmatrix, nämlich die Einheitsmatrix, also  $r_{pq} = \delta_{pq}$ , wählen können. Dann finden wir die folgende sehr hilfreiche Darstellung des  $\varepsilon$ -Tensors:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \quad (1.57)$$

Dass diese Darstellung identisch ist mit unserer ursprünglichen Definition (1.49) ist leicht zu überprüfen. Wenn zwei (oder mehr) Indizes gleich sind, also z.B.  $i = j$ , dann sind zwei Zeilen bzw. Spalten in der

Determinante gleich, wodurch diese verschwindet. Wenn  $i, j, k$  verschieden sind, dann entspricht dem paarweisen Vertauschen von Indizes dem Vertauschen von Zeilen bzw. Spalten in der Determinante, wodurch sich das Vorzeichen wie gewünscht ändert. Schließlich rechnen wir die Determinante explizit aus und finden:

$$\varepsilon_{ijk} = \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k1} + \delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k2} - \delta_{k1}\delta_{j2}\delta_{i3} - \delta_{k2}\delta_{j3}\delta_{i1} - \delta_{k3}\delta_{j1}\delta_{i2}$$

Durch explizites Einsetzen der Indizes, z.B. für  $(ijk) = (123)$ , finden wir

$$\varepsilon_{123} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = +1 \quad \text{usw. für andere Indizes.}$$

Damit ist die Darstellung als Determinante verifiziert, und wir können mit deren Hilfe die Aussage [1.54](#) leicht überprüfen.

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} &= \varepsilon_{ijk} A_j B_k A_i = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} A_j B_k A_i = \begin{vmatrix} \delta_{1i} A_i & \delta_{2i} A_i & \delta_{3i} A_i \\ \delta_{1j} A_j & \delta_{2j} A_j & \delta_{3j} A_j \\ \delta_{1k} B_k & \delta_{2k} B_k & \delta_{3k} B_k \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Was wir hier benutzt haben, ist die Eigenschaft, dass Determinanten zeilenweise mit einer Zahl multipliziert werden können, und schließlich, dass die Determinante verschwindet, wenn 2 Zeilen gleich sind. Damit ist also gezeigt, dass das Vektorprodukt senkrecht auf die beiden Vektoren steht.

Schließlich zeigen wir noch die Gleichungen [1.55](#) und [1.56](#) für den Betrag des Vektorprodukts. Zunächst schreiben wir in Koordinatenschreibweise

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \varepsilon_{imn} A_m B_n. \quad (1.58)$$

Wir haben es hier also mit dem Produkt zweier  $\varepsilon$ -Tensoren (genauer mit der Überschiebung, siehe später in Kapitel [1.1.9](#)) zu tun. Mit Hilfe der Darstellung als Determinante finden wir für ein solches Produkt zweier  $\varepsilon$ -Tensoren:

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \quad (1.59)$$

Hier haben wir verwendet, dass das Produkt der Determinanten von zwei Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  gleich

der Determinante des Matrixprodukts  $\mathbf{AB}$  ist, also  $\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = \det \mathbf{AB}$ , und die Tatsache dass wir das Produkt aus Zeilenvektor und Spaltenvektor schreiben können als (zB. für die 1. Zeile der ersten und 1. Spalte der 2. Matrix)

$$\delta_{i1}\delta_{1l} + \delta_{i2}\delta_{2l} + \delta_{i3}\delta_{3l} = \delta_{ip}\delta_{pl} = \delta_{il}.$$

Für die Auswertung von 1.58 benötigen wir die Überschiebung  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}$ , d.h. wir setzen in 1.59  $l = i$  und beachten, dass über zweifach auftretende Indizes zu summieren ist. Das führt mit  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$  auf

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} 3 & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\ &= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{ki}\delta_{jm}\delta_{in} - 3\delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{kn}\delta_{ji}\delta_{im} \\ &= 3\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} - 3\delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{kn}\delta_{jm} \\ &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Setzen wir nun 1.60 in 1.58 ein, so können wir schließlich 1.55 verifizieren:

$$\begin{aligned} \left| \vec{A} \times \vec{B} \right|^2 &= \varepsilon_{ijk}A_jB_k\varepsilon_{imn}A_mB_n = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})A_jB_kA_mB_n \\ &= \delta_{jm}\delta_{kn}A_jB_kA_mB_n - \delta_{jn}\delta_{km}A_jB_kA_mB_n = A_mB_nA_mB_n - A_nB_mA_mB_n \\ &= (\vec{A})^2(\vec{B})^2 - (\vec{A}\vec{B})^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung 1.56 folgt unmittelbar aus 1.55 unter Verwendung der Eigenschaften des Skalarprodukts 1.8 zu

$$\left| \vec{A} \times \vec{B} \right|^2 = A^2B^2 - (\vec{A}\vec{B})^2 = A^2B^2 - A^2B^2 \cos^2 \theta = A^2B^2 \sin^2 \theta.$$

**Bsp 1.** Es ist die Fläche des durch die Punkte  $A_i = (1, 2, 1)$ ,  $B_i = (2, 7, 5)$ , und  $C_i = (5, 4, 2)$  bestimmten Dreiecks zu berechnen.

**Bsp 2.** Wir untersuchen, ob die folgenden drei Vektoren in einer Ebene liegen:  $A_i = (4, 5, 2)$ ,  $B_i = (2, -2, 1)$ ,  $C_i = (-1, 0, 2)$

**Das gemischte Produkt (oder auch Spatprodukt).** Das gemischte Produkt der Vektoren  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  wird symbolisch mit  $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$  bezeichnet und ist definiert durch

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \vec{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (1.61)$$

Das Spatprodukt ist ein Skalar, der das Volumen des durch die Vektoren  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  aufgespannten Parallelepipeds angibt.

**Bsp.** Berechne das Volumen des von den Vektoren  $A_i = (0, 3, 0)$ ,  $B_i = (-2, 1, 0)$ , und  $C_i = (0, 2, 4)$  aufgespannten Parallelepipeds.

Zum Abschluss dieses Kapitels noch eine kleine Sammlung an nützlichen Beziehungen zum  $\varepsilon$ -Tensor, die für die Vereinfachung von Ausdrücken, in denen das vektorielle Produkt vorkommt, nützlich sind. Die ersten beiden kennen wir schon, die weiteren folgen durch zwei- bzw. dreifaches Überschieben der  $\varepsilon$ -Tensoren:

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \quad (1.62)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (\text{einfache Überschiebung}) \quad (1.63)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = \delta_{jj} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kj} = 2\delta_{kn} \quad (\text{zweifache Überschiebung}) \quad (1.64)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6 \quad (\text{dreifache Überschiebung}) \quad (1.65)$$

### 1.1.9 Tensoroperationen

**Gleichheit von Tensoren.** Zwei Tensoren  $m$ -ter Stufe  $A$  und  $B$  heißen gleich, wenn sie in allen entsprechenden Koordinaten übereinstimmen, d.h. wenn gilt

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A_{k_1 k_2 \dots k_m} = B_{k_1 k_2 \dots k_m}. \quad (1.66)$$

**Summe (Differenz) von Tensoren.** Unter der Summe (Differenz) zweier Tensoren  $m$ -ter Stufe  $A$  und  $B$  versteht man jenen Tensor  $m$ -ter Stufe, dessen Koordinaten gleich der Summe (Differenz) der entsprechenden Koordinaten der Tensoren  $A$  und  $B$  sind.

$$\{A \pm B\}_{k_1 k_2 \dots k_m} = A_{k_1 k_2 \dots k_m} \pm B_{k_1 k_2 \dots k_m}. \quad (1.67)$$

**Allgemeines Tensorprodukt.** Unter dem allgemeinen (oder *direkten*) Produkt eines Tensors  $m$ -ter Stufe  $A$  mit einem Tensor  $n$ -ter Stufe  $B$  versteht man jenen Tensor  $(m+n)$ -ter Stufe  $C = A \otimes B$ , dessen Koordinaten die  $3^{m+n}$  Produkte aller Koordinaten von  $A$  mit allen Koordinaten von  $B$  sind:

$$C_{i_1 i_2 \dots i_m k_1 k_2 \dots k_n} = A_{i_1 i_2 \dots i_m} B_{k_1 k_2 \dots k_n}. \quad (1.68)$$

**Verjüngung eines Tensors.** Unter Verjüngung eines Tensors  $m$ -ter Stufe  $A$  nach den Indizes  $k_1$  und  $k_2$  versteht man den Tensor  $(m-2)$ -ter Stufe  $B$  mit folgenden Koordinaten (Beachte die Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert!)

$$B_{k_3 k_4 \dots k_m} = A_{j j k_3 k_4 \dots k_m}. \quad (1.69)$$

Wir zeigen, dass die Verjüngung eines Tensors  $m$ -ter Stufe tatsächlich auf einen Tensor  $(m-2)$ -ter Stufe führt, indem wir das Transformationsverhalten des verjüngten Tensors untersuchen.

$$B_{k_3 k_4 \dots k_m} = A_{j j k_3 k_4 \dots k_m} = \underbrace{r_{i_1 j} r_{i_2 j}}_{=\delta_{i_1 i_2}} r_{i_3 k_3} \dots r_{i_m k_m} \bar{A}_{i_1 i_2 i_3 i_4 \dots i_m} = r_{i_3 k_3} \dots r_{i_m k_m} \bar{A}_{i_1 i_1 i_3 i_4 \dots i_m}.$$

Da doppelt vorkommende Indizes (über die summiert wird) beliebig benannt werden dürfen, spiegelt die obige Zeile das Transformationsverhalten eines Tensors  $(m-2)$ -ter Stufe wider. Eine Konsequenz aus 1.69 ist die Tatsache, dass die Spur eines Tensors zweiter Stufe ein Skalar ist, also

$$T_{jj} = \bar{T}_{jj}.$$

**Überschiebung von Tensoren.** Unter einfacher Überschiebung eines Tensors  $m$ -ter Stufe  $A$  mit einem Tensor  $n$ -ter Stufe  $B$  nach den Indizes  $i_1$  und  $k_1$  versteht man jenen Tensor  $C$  der Stufe  $(m+n-2)$  mit den Koordinaten

$$C_{i_2 i_3 \dots i_m k_2 k_3 \dots k_n} = A_{j i_2 i_3 \dots i_m} B_{j k_2 k_3 \dots k_n}. \quad (1.70)$$

Wir zeigen, dass die so definierte Überschiebung eines Tensors  $m$ -ter Stufe mit einem Tensor  $n$ -ter Stufe tatsächlich auf einen Tensor  $(m+n-2)$ -ter Stufe führt, indem wir das Transformationsverhalten

des überschobenen Tensors untersuchen.

$$\begin{aligned}
C_{i_2 i_3 \dots i_m k_2 k_3 \dots k_n} &= A_{j_1 i_2 i_3 \dots i_m} B_{j_1 k_2 k_3 \dots k_n} \\
&= r_{j_1 p_1} r_{i_2 p_2} r_{i_3 p_3} \dots r_{i_m p_m} \overline{A}_{p_1 p_2 p_3 \dots p_m} \cdot r_{j_1 q_1} r_{k_2 q_2} r_{k_3 q_3} \dots r_{k_n q_n} \overline{B}_{q_1 q_2 q_3 \dots q_n} \\
&= \underbrace{r_{j_1 p_1} r_{j_1 q_1}}_{\delta_{p_1 q_1}} r_{i_2 p_2} r_{i_3 p_3} \dots r_{i_m p_m} r_{k_2 q_2} r_{k_3 q_3} \dots r_{k_n q_n} \overline{A}_{p_1 p_2 p_3 \dots p_m} \overline{B}_{q_1 q_2 q_3 \dots q_n} \\
&= r_{i_2 p_2} r_{i_3 p_3} \dots r_{i_m p_m} r_{k_2 q_2} r_{k_3 q_3} \dots r_{k_n q_n} \overline{A}_{j_1 p_2 p_3 \dots p_m} \overline{B}_{j_1 q_2 q_3 \dots q_n} \\
&= r_{i_2 p_2} r_{i_3 p_3} \dots r_{i_m p_m} r_{k_2 q_2} r_{k_3 q_3} \dots r_{k_n q_n} \overline{C}_{p_2 p_3 \dots p_m q_2 q_3 \dots q_n}.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass sich  $C_{i_2 i_3 \dots i_m k_2 k_3 \dots k_n}$  wie ein Tensor der Stufe  $(m + n - 2)$  transformiert.

**Bsp.** Wir betrachten das Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ , dessen Koordinatendarstellung  $C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$  wir als direktes Vektorprodukt eines Tensors dritter Stufe mit zwei Vektoren und anschließender 2-maliger Überschreibung auffassen können:

$$T_{ijkpq} = \varepsilon_{ijk} A_p B_q \xrightarrow{\text{Überschiebung (jp)}} T_{ijkjq} = \varepsilon_{ijk} A_j B_q \xrightarrow{\text{Überschiebung (kq)}} C_i = T_{ijkjk} = \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

Diese Überlegung zeigt, dass es sich bei  $C_i$  um einen Tensor der Stufe  $5 - 2 - 2 = 1$  (also einen Vektor) handeln muss.

### 1.1.10 Tensoren zweiter Stufe

Die Tensoren zweiter Stufe sind für die Anwendungen in der Physik von besonderer Bedeutung. Wir wollen daher die wichtigsten Eigenschaften von Tensoren zweiter Stufe hier zusammenfassen. Ein Tensor  $T_{ik}$  in  $\mathbb{R}^3$  ist in jedem Koordinatensystem durch die Angabe von  $3^2 = 9$  Koordinaten festgelegt. Zwischen den in zwei beliebigen Koordinatensystemen definierten Koordinaten  $T_{ik}$  und  $\overline{T}_{ik}$  besteht die Beziehung

$$T_{ik} = r_{in} r_{km} \overline{T}_{nm} \quad (1.71)$$

$$\overline{T}_{ik} = r_{ni} r_{mk} T_{nm}, \quad (1.72)$$

wobei die  $r_{in}$  orthogonale Drehmatrizen sind. Als *Namen* für Tensoren zweiter Stufe wird manchmal ein Buchstaben mit einem darüberliegenden Doppelpfeil, also z.B.  $\overleftrightarrow{A}$ ,  $\overleftrightarrow{B}$ ,  $\overleftrightarrow{C}$  usw. verwendet, manchmal findet man auch die Schreibweise mit einem doppelt überstrichenen Buchstaben, also  $\overline{\overline{A}}$ ,  $\overline{\overline{B}}$ ,  $\overline{\overline{C}}$  usw. Die *Koordinaten* eines Tensors zweiter Stufe bezeichnen wir im allgemeinen mit demselben Buchstaben, den wir für den Namen des Tensors gewählt haben, also z.B.  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$ , usw.

**Spur eines Tensors.** Die Verjüngung eines Tensors  $A_{ij}$  zweiter Stufe heißt *Spur des Tensors*

$$\text{Sp } \overset{\leftrightarrow}{A} = A_{ii}$$

Wie Gleichung 1.69 zeigt, ist die Spur eines Tensors zweiter Stufe ein Skalar (eine Invariante).

**Transponierter Tensor.** Vertauschen wir bei einem Tensor  $A_{ik}$  die Zeilen mit den Spalten, so nennen wir diesen Tensor den zu  $A_{ik}$  *transponierten* Tensor, den wir mit  $A_{ik}^T$  bezeichnen, und es gilt

$$A_{ik}^T = A_{ki}. \quad (1.73)$$

**Symmetrische und Antisymmetrische Tensoren.** Wir bezeichnen einen Tensor als *symmetrisch*, wenn er gleich dem transponierten Tensor ist, also es gilt

$$A_{ik}^T = A_{ik} \quad \iff \quad A_{ik} = A_{ki}. \quad (1.74)$$

Einen Tensor  $A_{ik}$  nennen wir *anti-symmetrisch* oder *schief-symmetrisch*, wenn gilt:

$$A_{ik}^T = -A_{ik} \quad \iff \quad A_{ik} = -A_{ki}. \quad (1.75)$$

Es ist klar, dass für anti-symmetrische Tensoren die Diagonalterme ( $i \neq k$ ) verschwinden müssen.

Jeder beliebige Tensor zweiter Stufe  $B_{ik}$  kann in einen symmetrischen  $S_{ik}$  und anti-symmetrischen Anteil  $A_{ik}$  wie folgt zerlegt werden

$$B_{ik} = S_{ik} + A_{ik} \quad \text{mit} \quad S_{ik} = \frac{1}{2} (B_{ik} + B_{ik}^T) \quad \text{und} \quad A_{ik} = \frac{1}{2} (B_{ik} - B_{ik}^T) \quad (1.76)$$

**Orthogonale Tensoren.** Bezeichnen wir mit  $E_{ik} = \delta_{ik}$  den Einheitstensor, dann nennen wir einen Tensor  $R_{ik}$  *orthogonal*, wenn gilt:

$$R_{ik} R_{kj}^T = E_{ij} \quad \text{und} \quad R_{ik}^T R_{kj} = E_{ij}. \quad (1.77)$$

Anders ausgedrückt gilt also für orthogonale Tensoren, dass der transponierte Tensor gleich dem inversen Tensor ist

$$R_{ik}^T = R_{ik}^{-1}. \quad (1.78)$$

**Überschiebung mit einem Vektor.** Die Überschiebung des Tensors zweiter Stufe  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  mit dem Vektor  $\vec{x}$  wird symbolisch mit  $\overset{\leftrightarrow}{A}\vec{x}$  bezeichnet und ist definiert durch

$$\left\{ \overset{\leftrightarrow}{A}\vec{x} \right\}_i = A_{il}x_l. \quad (1.79)$$

Wie 1.70 zeigt, ist  $\overset{\leftrightarrow}{A}\vec{x}$  ein Vektor.

**Überschiebung mit einem Tensor 2. Stufe.** Die Überschiebung des Tensors zweiter Stufe  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  mit dem Tensor zweiter Stufe  $\overset{\leftrightarrow}{B}$  wird symbolisch mit  $\overset{\leftrightarrow\leftrightarrow}{AB}$  bezeichnet und ist definiert durch

$$\left\{ \overset{\leftrightarrow\leftrightarrow}{AB} \right\}_i = A_{il}B_{lk}. \quad (1.80)$$

Wie 1.70 zeigt, ist  $\overset{\leftrightarrow\leftrightarrow}{AB}$  ein Tensor zweiter Stufe. Im allgemeinen gilt

$$\overset{\leftrightarrow\leftrightarrow}{AB} \neq \overset{\leftrightarrow\leftrightarrow}{BA}$$

Gilt für zwei Tensoren zweiter Stufe  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  und  $\overset{\leftrightarrow}{B}$

$$\overset{\leftrightarrow\leftrightarrow}{AB} = \overset{\leftrightarrow\leftrightarrow}{BA},$$

so nennt man  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  und  $\overset{\leftrightarrow}{B}$  *vertauschbar (kommutativ)*.

**Determinante eines Tensors 2. Stufe.** Unter der Determinante des Tensors zweiter Stufe  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  verstehen wir die Determinante seiner Koordinatenmatrix:

$$\det A_{ik} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.81)$$

Wir lernen zwei hilfreiche Darstellungen für die Determinante eines Tensors kennen:

$$\det A_{ik} = \varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} \quad (1.82)$$

$$\det A_{ik} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}A_{ip}A_{jq}A_{kr} \quad (1.83)$$

Die Bedeutung von 1.83 ist unter anderem darin begründet, dass wir anhand von 1.83 erkennen, dass die *Determinante eines Tensors zweiter Stufe ein Skalar (Invariante)* ist. Warum? Gleichung 1.83 drückt die dreifache Überschiebung eines Tensors sechster Stufe ( $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}$ ) mit einem weiteren Tensor sechster Stufe ( $A_{ip}A_{jq}A_{kr}$ ) aus, die nach 1.70 einen Tensor der Stufe  $6 - 3 \times 2 = 0$ , also einen Skalar,

liefert. Bleibt noch zu zeigen, dass die Gleichungen 1.82 und 1.83 für die Determinante tatsächlich mit der Definition aus 1.81 übereinstimmen. Wir beginnen mit 1.82 und verwenden die Darstellung des  $\varepsilon$ -Tensors als Determinante (1.57)

$$\varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix} A_{i1}A_{j2}A_{k3} = \begin{vmatrix} \delta_{1i}A_{i1} & \delta_{1j}A_{j1} & \delta_{1k}A_{k1} \\ \delta_{2i}A_{i1} & \delta_{2j}A_{j1} & \delta_{2k}A_{k1} \\ \delta_{3i}A_{i1} & \delta_{3j}A_{j1} & \delta_{3k}A_{k1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \det A_{ik}.$$

Zum Beweis von 1.83 gehen wir zunächst analog vor:

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}A_{ip}A_{jq}A_{kr} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{vmatrix} A_{ip}A_{jq}A_{kr} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix}.$$

Nun berechnen wir die dreireihige Determinante explizit und berücksichtigen die Definition des  $\varepsilon$ -Tensors und die Tatsache, dass die Summenindizes  $i, j, k$  beliebig bezeichnet werden können, ohne das Ergebnis der Summe zu ändern:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}A_{ip}A_{jq}A_{kr} &= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk} (A_{i1}A_{j2}A_{k3} + A_{i2}A_{j3}A_{k1} + A_{i3}A_{j1}A_{k2} - A_{k1}A_{j2}A_{i3} - A_{k2}A_{j3}A_{i1} - A_{k3}A_{j1}A_{i2}) \\ &= \frac{1}{6} (\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{kij} + \varepsilon_{jki} - \varepsilon_{kji} - \varepsilon_{ikj} - \varepsilon_{jik}) A_{i1}A_{j2}A_{k3} \\ &= \varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} \stackrel{1.82}{=} \det A_{ik}. \end{aligned} \tag{1.84}$$

**Eigenwerte und Eigenvektoren von symmetrischen Tensoren 2. Stufe** Die Eigenwerte  $a$  und Eigenvektoren  $\vec{x}$  eines Tensors  $\overleftrightarrow{A}$  sind durch folgende Gleichung definiert:

$$\overleftrightarrow{A} \vec{x} = a \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A_{ik}x_k = ax_i. \tag{1.85}$$

Bringen den Term  $a\vec{x}$  auf die linke Seite, indem wir die Einheitsmatrix  $\overleftrightarrow{E}$  definiert durch  $\left\{ \overleftrightarrow{E} \right\}_{ik} = \delta_{ik}$  einführen, so sehen wir, dass 1.85 ein *homogenes lineares* Gleichungssystem darstellt.

$$\left( \overleftrightarrow{A} - a \overleftrightarrow{E} \right) \vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A_{ik} - a \delta_{ik}) x_k = 0, \tag{1.86}$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} (A_{11} - a)x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 &= 0 \\ A_{21}x_1 + (A_{22} - a)x_2 + A_{23}x_3 &= 0 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + (A_{33} - a)x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.87}$$

Die Bedingung für die Existenz einer nicht trivialen (d.h.  $\vec{x} \neq 0$ ) Lösung dieses linearen, homogenen Gleichungssystems ist das Verschwinden der Koeffizientendeterminante:

$$\det \left( \overset{\leftrightarrow}{A} - a \overset{\leftrightarrow}{E} \right) = \begin{vmatrix} A_{11} - a & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - a & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - a \end{vmatrix} \quad (1.88)$$

Gleichung 1.88 führt auf eine kubische Gleichung für  $a$  und heißt *charakteristische Gleichung des Tensors*  $\overset{\leftrightarrow}{A}$ . Ihre drei Lösungen  $a = a_1$ ,  $a = a_2$  und  $a = a_3$  heißen *Eigenwerte des Tensors*  $\overset{\leftrightarrow}{A}$ . Das Gleichungssystem 1.85 bzw. 1.87 für die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  des Eigenvektors  $\vec{x}$  besitzt also nicht für jeden beliebigen Wert von  $a$  eine Lösung, sondern nur dann, wenn  $a$  einer der drei Eigenwerte  $a_1, a_2$  oder  $a_3$  ist. Für jeden dieser drei Eigenwerte liefert dann das Gleichungssystem 1.85 bzw. 1.87 einen Eigenvektor. Zu einem Tensor zweiter Stufe gibt es also im allgemeinen drei verschiedene Eigenvektoren. Die Länge und Orientierung dieser Eigenvektoren ist unbestimmt. Man spricht daher auch von *Eigenrichtungen* oder *Hauptachsen* eines Tensors zweiter Stufe.

**Die Eigenwerte eines Tensors zweiter Stufe sind Skalare (Invariante).** Diese Aussage folgt aus der Tatsache, dass die Determinante eines Tensors eine Invariante ist (vgl. 1.83) und damit auch die charakteristische Gleichung 1.88, aus der ja die Eigenwerte bestimmt werden. Wertet man die charakteristische Gleichung  $\det(A_{ik} - a\delta_{ik}) = 0$  mit Hilfe von 1.83 explizit aus, so findet man nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} \det(A_{ik} - a\delta_{ik}) &= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} (A_{ip} - a\delta_{ip})(A_{jq} - a\delta_{jq})(A_{kr} - a\delta_{kr}) \\ &= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr} - a \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{iqr} A_{jq} A_{kr} + a^2 A_{kk} - a^3. \end{aligned}$$

Weil sämtliche Koeffizienten von  $a^0$ ,  $a^1$ ,  $a^2$  und  $a^3$  Tensoren 0-ter Stufe (also Skalare) sind, sind auch die Lösungen von  $\det(A_{ik} - a\delta_{ik}) = 0$  Invariante, d.h. unabhängig von dem Koordinatensystem, in welchem wir die Koordinaten des Tensors  $A_{ik}$  angeben. Damit sind auch die Eigenwerte von  $A_{ik}$  invariant in Bezug auf Koordinatentransformationen.

Besonders interessant für die theoretische Physik sind die *symmetrischen Tensoren* zweiter Stufe, da man über deren Eigenwerte und Eigenvektoren weitere Aussagen machen kann.

**Die Eigenwerte eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe sind stets reell.** Wir beweisen diesen Sachverhalt, indem wir zunächst annehmen, dass der Eigenwert  $a$  einen Realteil  $\alpha$  und Imaginärteil  $\beta$  besitzt, und auch der Eigenvektor  $\vec{x}$  in Real und Imaginärteil aufgespalten werden

kann:

$$\begin{aligned} a &= \alpha + i \cdot \beta & (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\ \vec{x} &= \vec{p} + i \cdot \vec{q} & (\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

Trennen wir die Eigenwertgleichung

$$A_{nm}x_m = ax_n \quad \Leftrightarrow \quad A_{nm}(p_m + iq_m) = (\alpha + i\beta)(p_n + iq_n)$$

in Real- und Imaginärteil auf, so erhalten wir die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} A_{nm}p_m &= \alpha p_n - \beta q_n \\ A_{nm}q_m &= \alpha q_n + \beta p_n \end{aligned}$$

Die skalare Multiplikation der ersten Gleichung mit  $q_n$  bzw. der zweiten Gleichung mit  $p_n$  liefert

$$\begin{aligned} A_{nm}p_m q_n &= \alpha p_n q_n - \beta q_n q_n \\ A_{nm}q_m p_n &= \alpha q_n p_n + \beta p_n p_n \end{aligned}$$

Weil für einen symmetrischen Tensor  $A_{nm} = A_{mn}$  gilt, ergibt die Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung

$$0 = 0 + 2\beta(p_m p_m + q_m q_m) \quad \Rightarrow \quad \beta \cdot (p^2 + q^2) = 0.$$

Da der Betrag des Vektors  $\vec{x} \neq 0$  ist, gilt sicher auch  $p^2 + q^2 > 0$ , und damit folglich, dass  $\beta = 0$  sein muss. Damit ist gezeigt, dass der Imaginärteil des Eigenwerts verschwindet, und der Eigenwert somit rein reell sein muss.

**Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe sind stets orthogonal.** Zum Beweis dieses Satzes nehmen wir an,  $a_1$  und  $a_2$  seien zwei verschiedene Eigenwerte ( $a_1 \neq a_2$ ) und  $\vec{x}^1$  und  $\vec{x}^2$  seien die zugehörigen Eigenvektoren eines symmetrischen Tensors  $A_{nm}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} A_{nm}x_m^1 &= a_1 x_n^1 \\ A_{nm}x_m^2 &= a_2 x_n^2 \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste dieser Eigenwertgleichungen skalar mit  $\vec{x}^2$  und die zweite Gleichung mit  $\vec{x}^1$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{nm}x_m^1x_n^2 &= a_1x_n^1x_n^2 \\ A_{nm}x_m^2x_n^1 &= a_2x_n^2x_n^1 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie von  $A_{nm} = A_{mn}$  ergibt die Subtraktion dieser Gleichungen

$$0 = (a_1 - a_2)x_n^1x_n^2 \quad \Rightarrow \quad (a_1 - a_2)\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^2 = 0.$$

Da wir vorausgesetzt haben, dass  $a_1 \neq a_2$  ist, muss daher  $\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^2 = 0$  sein, was gleichbedeutend mit der zu beweisenden Aussage ist, dass  $\vec{x}^1$  orthogonal auf  $\vec{x}^2$  steht.

Sind alle drei Eigenwerte eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe verschieden, so bilden die Eigenvektoren ein orthogonales Dreibein.

**Bsp.** In einem Koordinatensystem 1, 2, 3 seien die Koordinaten des Tensor  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  gegeben durch

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Eigenvektoren und Eigenwerte des Tensors. Bestimme weiters die Koordinaten des Tensors  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  in dem Koordinatensystem, das durch das orthogonale Dreibein der Eigenvektoren gegeben ist (*A-Darstellung des Tensors*).

Die charakteristische Gleichung liefert die drei Eigenwerte

$$\begin{aligned} \det(A_{ik} - a\delta_{ik}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad -a^3 + 2a^2 + 3a = 0, \\ &\Rightarrow \quad a_1 = 3, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0 \end{aligned}$$

Die dazugehörigen, auf die Länge 1 normierten Eigenvektoren lauten

$$x_i^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1), \quad x_i^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1), \quad x_i^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1).$$

Wie leicht zu überprüfen ist, bilden diese drei Vektoren in der Reihenfolge  $\vec{x}^1$ ,  $\vec{x}^2$  und  $\vec{x}^3$  ein orthonormales Dreibein mit Rechtsorientierung. Um den Tensor  $\overset{\leftrightarrow}{A}$  in dieses Koordinatensystem zu transformieren, stellen wir die Transformationsmatrix  $r_{ik}$  auf, indem wir nach Gleichung 1.30 bzw.

1.31 die Einheitsvektoren  $\vec{x}^1$ ,  $\vec{x}^2$  und  $\vec{x}^3$  spaltenweise in die Matrix  $r_{ik}$  eintragen:

$$r_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Wir benutzen die Transformationsgleichung 1.72 und erhalten für die Darstellung  $\bar{A}_{ik}$  des Tensors  $\overleftrightarrow{A}$  in seinem Eigensystem

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ik} &= r_{ni}r_{mk}A_{nm} = r_{in}^T A_{nm} r_{mk} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass  $\bar{A}_{ik}$  *diagonal* ist, und dass die Diagonalelemente gleich den zuvor berechneten Eigenwerten sind. Das ist natürlich kein zufälliges Ergebnis, sondern gilt ganz allgemein:

**Die Darstellung eines symmetrischen Tensors in seinem eigenen Hauptachsensystem ist eine Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonale die Eigenwerte des Tensors stehen.** Seien  $A_{ik}$  die Koordinaten des Tensors in einem Koordinatensystem 1, 2, 3, und  $a_1, a_2, a_3$  die Eigenwerte des Tensors. Die normierten Eigenvektoren dargestellt in dem System 1, 2, 3 haben die Koordinaten  $e_i^1, e_i^2$  und  $e_i^3$ . Nach Gleichung 1.72 gilt dann für die Koordinaten des Tensors in seinem Eigensystem

$$\bar{A}_{ik} = r_{ni}r_{mk}A_{nm},$$

wobei nach Gleichung 1.30 bzw. 1.31 die Transformationsmatrix spaltenweise durch die Einheitsvektoren  $e_i^1, e_i^2$  und  $e_i^3$  gegeben ist. Wir können also schreiben

$$r_{ni} = e_n^i, \quad r_{mk} = e_m^k,$$

wodurch wir die Transformationsgleichung mit Hilfe der Eigenwertgleichungen  $A_{nm}e_m^k = a_k e_n^k$  folgendermaßen auswerten können:

$$\bar{A}_{ik} = r_{ni}r_{mk}A_{nm} = e_n^i e_m^k A_{nm} = e_n^i \underbrace{(A_{nm}e_m^k)}_{a_k e_n^k} = a_k \underbrace{e_n^i e_n^k}_{\delta_{ik}} = a_k \delta_{ik}.$$

Damit ist die obige Aussage bewiesen:  $\bar{A}_{ik}$  ist eine Diagonalmatrix, in dessen Hauptdiagonale die Eigenwerte  $a_1, a_2$  und  $a_3$  stehen.

**Der Trägheitstensor** Der Trägheitstensor  $I_{ij}$  tritt in der Physik bei der Beschreibung von Drehbewegungen auf. Er beschreibt die Trägheitseigenschaften eines massiven, ausgedehnten Körpers. Seine Definition folgt aus dem Drehimpulsvektor  $\vec{L}$  eines mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  rotierenden Körpers:

$$L_i = I_{ij}\omega_j = \int_V dV \rho (r^2\delta_{ij} - x_i x_j) \omega_j.$$

Hierbei ist  $\rho(x_1, x_2, x_3)$  die Massendichte und  $r^2 = x_k x_k$  das Abstandsquadrat des differentiellen Massenelements vom Ursprung des Koordinatensystems. Aus der obigen Gleichung lesen wir also die Definition des Trägheitstensors  $I_{ij}$  ab:

$$I_{ij} = \int_V dV \rho (r^2\delta_{ij} - x_i x_j) \quad (1.89)$$

Die Tatsache, dass die obige Definition tatsächlich einen Tensor zweiter Stufe liefert, sieht man daran, dass sowohl  $r^2\delta_{ij}$  ein Tensor 2. Stufe ist (der Skalar  $r^2$  multipliziert mit dem Tensor  $\delta_{ik}$  ist wieder ein Tensor), als auch das direkte Produkt der beiden Vektoren  $x_i x_j$  einen Tensor 2. Stufe darstellt. Des Weiteren stellen wir fest, dass der Trägheitstensor ein *symmetrischer* Tensor ist, also  $I_{ij} = I_{ji}$  wie man unmittelbar sieht. Daraus folgt, dass der Trägheitstensor auf Hauptachsenform transformiert werden kann und durch drei Hauptträgheitsmomente (seine Eigenwerte) und die dazugehörigen Richtungen (Hauptachsen) charakterisiert werden kann.

Kennen wir den Trägheitstensor  $I_{ij}$  eines Körpers, so können wir das Trägheitsmoment  $I_{\vec{n}}$  in Bezug auf eine beliebige Drehachse  $\vec{n}$  (mit  $|\vec{n}| = 1$ ) wie folgt berechnen:

$$I_{\vec{n}} = n_i I_{ij} n_j. \quad (1.90)$$

**Quader.** Wir berechnen den Trägheitstensor für einen Quader mit den Abmessungen  $a \cdot b \cdot c$  und der konstanten Massendichte  $\rho$ . Wählen wir den Ursprung des Koordinatensystems im Schwerpunkt des Quaders liefert die Rechnung für  $I_{11}$ :

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_V dV \rho (r^2\delta_{11} - x_1^2) = \int_V dV \rho (x_2^2 + x_3^2) = \rho \int_{x_1=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_1 \int_{x_2=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx_2 \int_{x_3=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dx_3 (x_2^2 + x_3^2) \\ &= 4\rho a \int_{x_2=0}^{\frac{b}{2}} dx_2 \left[ x_2^2 x_3 + \frac{x_3^3}{3} \right]_{x_3=0}^{\frac{c}{2}} = 4\rho a \int_{x_2=0}^{\frac{b}{2}} dx_2 \left( \frac{c}{2} x_2^2 + \frac{c^3}{24} \right) = \rho a c \left[ 2\frac{x_2^3}{3} + \frac{c^2}{6} x_2 \right]_{x_2=0}^{\frac{b}{2}} \\ &= \rho a b c \left( \frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{12} \right) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung kann auch für  $I_{22}$  und  $I_{33}$  durchgeführt werden, die Nichtdiagonalterme hingegen verschwinden. Der Trägheitstensor eines Quaders nimmt dann folgende Gestalt an:

$$I_{ik} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

Wir berechnen noch nach Gleichung 1.90 das Trägheitsmoment des Quaders in Bezug auf eine Drehung um die Achse definiert durch  $n_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ . Wir erhalten

$$I_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \cdot \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{M}{12} \left( \frac{a^2 + b^2}{2} + c^2 \right).$$

**Kugel.** Wir berechnen den Trägheitstensor für eine Kugel mit dem Radius  $R$  und der konstanten Massendichte  $\rho$ . Wir können die Rechnung vereinfachen, indem wir benutzen, dass aufgrund der Symmetrie des Problems  $I_{11} = I_{22} = I_{33}$  gilt und damit z.B.  $I_{11}$  ein Drittel der Spur des Tensor ist:

$$I_{11} = \frac{1}{3} I_{ii} = \frac{1}{3} \int_V dV \rho (r^2 \delta_{ii} - x_i x_i) = \frac{1}{3} \rho \int_V dV 2r^2 = \frac{1}{3} \rho 4\pi \int_0^R 2r^4 dr = \frac{2}{5} \underbrace{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}_{=M} R^2.$$

Die Nichtdiagonalterme des Tensors verschwinden aufgrund der Symmetrie wie man auch durch explizites Ausrechnen leicht sieht, z.B.:

$$I_{12} = \int_V dV \rho (r^2 \delta_{12} - x_1 x_2) = -\rho \int_V dV x_1 x_2 = -\rho \int_{r=0}^R r^4 dr \int_{\vartheta=0}^{\pi} d\vartheta \sin^3 \vartheta \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi}_{=0} = 0.$$

Der Trägheitstensor einer Kugel hat also die besonders einfache Form

$$I_{ij} = \frac{2}{5} MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie man ebenfalls leicht bemerkt (und wie aufgrund der Kugelsymmetrie zu erwarten ist), ist daher das Trägheitsmoment unabhängig von einer beliebig gewählten Richtung  $n_i = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$

$$I_{\vec{n}} = n_i I_{ij} n_j = \frac{2}{5} MR^2 n_i \delta_{ij} n_j = \frac{2}{5} MR^2 n_i n_i = \frac{2}{5} MR^2.$$

**Zylinder.** Wir berechnen den Trägheitstensor für einen Kreiszyylinder mit dem Radius  $R$  und der Höhe  $h$  und der konstanten Massendichte  $\rho$ . Die Achse des Zylinders soll gleich der  $z$ -Achse sein, und der Schwerpunkt des Zylinders liege im Koordinatenursprung. Wir berechnen zunächst  $I_{33}$ , indem wir für die Berechnung des Integrals in Zylinderkoordinaten übergehen<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_V dV \rho (r^2 \delta_{33} - x_3 x_3) \\ &= \rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} dz \int_{r_{\perp}=0}^R r_{\perp} dr_{\perp} (r_{\perp}^2 + z^2 - z^2) = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \underbrace{\rho R^2 \pi h}_{=M} R^2 = \frac{1}{2} M R^2. \end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir die Komponenten  $I_{11}$  und  $I_{22}$  also die Trägheitsmomente für Drehungen um die  $x$ -Achse bzw.  $y$ -Achse, die aufgrund der Symmetrie gleich sein werden ( $I_{11} = I_{22}$ )

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_V dV \rho (r^2 \delta_{11} - x_1 x_1) = \rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} dz \int_{r_{\perp}=0}^R r_{\perp} dr_{\perp} (r_{\perp}^2 + z^2 - r_{\perp}^2 \cos^2 \varphi) \\ &= 2\pi \rho h \underbrace{\int_{r_{\perp}=0}^R r_{\perp}^3 dr_{\perp}}_{=\frac{R^4}{4}} + 2\pi \rho \underbrace{\int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} z^2 dz}_{=\frac{h^3}{12}} \underbrace{\int_{r_{\perp}=0}^R r_{\perp} dr_{\perp}}_{=\frac{R^2}{2}} - \rho h \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi}_{=\pi} \underbrace{\int_{r_{\perp}=0}^R r_{\perp}^3 dr_{\perp}}_{=\frac{R^4}{4}} \\ &= \rho R^2 \pi h \left( \frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{R^2}{4} \right) = \frac{1}{12} \underbrace{\rho R^2 \pi h}_{=M} (3R^2 + h^2) = \frac{M}{12} (3R^2 + h^2). \end{aligned}$$

Wir zeigen noch anhand von  $I_{13}$ , dass die Nicht-Diagonalterme  $I_{12}$ ,  $I_{13}$  und  $I_{23}$  verschwinden

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int_V dV \rho (r^2 \delta_{13} - x_1 x_3) \\ &= \rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} dz \int_{r_{\perp}=0}^R r_{\perp} dr_{\perp} (-r_{\perp} \cos \varphi \cdot z) = -\rho \frac{R^3}{3} \frac{h^2}{4} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Der Trägheitstensor eines homogenen Zylinders nimmt also folgende Gestalt an<sup>2</sup>

$$I_{ij} = M \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Um eine Verwechslung mit der Massendichte  $\rho$  zu vermeiden, wählen wir diesmal ausnahmsweise für den Abstand von der  $z$ -Achse das Symbol " $r_{\perp}$ " und nicht " $\rho$ " wie wir es bei Zylinderkoordinaten bisher immer gemacht haben.

<sup>2</sup>Handelt es sich um einen dünnen Stab, also  $R \ll h$ , dann inkludiert dieses Resultat das bekannte Ergebnis für das Trägheitsmoment eines Stabs  $I = \frac{1}{12} M h^2$ .

## 1.2 Raumkurven

Mathematisch gesehen handelt es sich bei Raumkurven um Abbildungen der Art

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{A} : t &\mapsto \vec{A}(t)\end{aligned}$$

Das heißt der Vektor  $\vec{A}$  ist nicht konstant, sondern hängt von einem Parameter  $t$  ab. Ein in der Physik sehr häufig vorkommender Fall ist, dass dieser veränderlicher Vektor den Ortsvektor eines Teilchens beschreibt, und der Parameter  $t$  die Zeit darstellt.

### 1.2.1 Veränderliche Vektoren

Wenn wir nach der Bedeutung der Ableitung eines Vektors  $\frac{d}{dt}\vec{A} \equiv \dot{\vec{A}}$  fragen, dann können wir das am besten in Koordinatendarstellung beantworten:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \vec{A} \right\}_i = \frac{d}{dt} A_i \equiv \dot{A}_i$$

Das heißt, die Ableitung eines Vektors nach einem Parameter ergibt wieder einen Vektor, dessen Koordinaten die Ableitungen der Koordinaten darstellen  $\frac{d}{dt} A_i$ , die wir – wie in der Physik üblich – auch mit  $\dot{A}_i$  abkürzen wollen. In einer gleichwertigen Schreibweise können wir diesen Sachverhalt auch so ausdrücken

$$\dot{\vec{A}} \equiv \frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{d}{dt} [A_i(t) \vec{e}^i] = \dot{A}_i(t) \vec{e}^i,$$

wobei die drei Vektoren  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ , die zeitlich nicht veränderlichen Einheitsvektoren sind, und nach der Summenkonvention über  $i$  zu summieren ist.

Von besonderem Interesse in der Physik sind zeitliche Ableitungen des Ortsvektors

$$\vec{r}(t) = x_1(t) \vec{e}^1 + x_2(t) \vec{e}^2 + x_3(t) \vec{e}^3 = x_i(t) \vec{e}^i.$$

Bekanntermaßen ergibt ja die erste Ableitung nach der Zeit die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$ , die zweite Ableitung die Beschleunigung  $\vec{a}(t)$ .

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{x}_i(t) \vec{e}^i = v_i(t) \vec{e}^i \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \ddot{x}_i(t) \vec{e}^i & (1.93) \\ &= \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \dot{v}_i(t) \vec{e}^i.\end{aligned}$$

**Beispiel:** Die Bewegung eines Massenpunktes entlang einer Bahn werde durch folgenden Ortsvektor beschrieben (Welche Art von Bahn ist das?)

$$\vec{r}(t) = 2 \cos(3t) \vec{e}^1 + 2 \sin(3t) \vec{e}^2 + 5t \vec{e}^3.$$

Wir berechnen die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= -6 \sin(3t) \vec{e}^1 + 6 \cos(3t) \vec{e}^2 + 5 \vec{e}^3 \\ \vec{a}(t) &= -18 \cos(3t) \vec{e}^1 - 18 \sin(3t) \vec{e}^2. \end{aligned}$$

Was verstehen wir unter folgenden Ausdrücken:  $\frac{d}{dt} (c(t) \vec{A}(t))$  und  $\frac{d}{dt} (\vec{A}(t) \vec{B}(t))$ ? Das heißt, die Ableitung eines Produkts eines Skalars  $c(t)$  mit einem veränderlichen Vektor  $\vec{A}(t)$  bzw. die Ableitung des Skalarprodukts von zwei veränderlichen Vektoren  $\vec{A}(t)$  und  $\vec{B}(t)$ . Dazu gehen wir am besten in Koordinatenschreibweise über und wenden die bekannten Rechenregeln für Differenziation an (Produktregel)

$$\left\{ \frac{d}{dt} [c(t) \vec{A}(t)] \right\}_i = \frac{d}{dt} [c(t) A_i(t)] = \dot{c}(t) A_i(t) + c(t) \dot{A}_i(t) = \left\{ \dot{c}(t) \vec{A}(t) + c(t) \dot{\vec{A}}(t) \right\}_i \quad (1.94)$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{A}(t) \vec{B}(t)] = \frac{d}{dt} [A_i(t) B_i(t)] = \dot{A}_i(t) B_i(t) + A_i(t) \dot{B}_i(t) = \dot{\vec{A}}(t) \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \dot{\vec{B}}(t) \quad (1.95)$$

Wenden wir Gleichung 1.95 auf eine Raumkurve an für die gilt  $|\vec{A}(t)| = \text{const}$ , das heißt für eine Kurve, die einen konstanten Abstand vom Ursprung hat, so finden wir:

$$\begin{aligned} \vec{A}(t) \vec{A}(t) &= \text{const} & / \frac{d}{dt} \\ \dot{\vec{A}}(t) \vec{A}(t) + \vec{A}(t) \dot{\vec{A}}(t) &= 0 \\ \dot{\vec{A}}(t) \vec{A}(t) &= 0, \end{aligned}$$

und somit die sehr nützliche Aussage: ein in seiner Richtung veränderlicher, aber dem *Betrag nach konstanter Vektor* liefert bei der Ableitung einen zum ursprünglichen Vektor *senkrechten* Vektor.

**Beispiel:** Die klassische Anwendung dieses Zusammenhangs ist die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn  $|\vec{r}(t)| = r$  mit dem Radius  $r$ . Es gilt also

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \quad \text{und somit} \quad \vec{r} \perp \dot{\vec{r}}.$$

Handelt es sich zusätzlich um eine Bewegung mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit  $v$ , also  $|\vec{v}(t)| = v$ , so gilt auch

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{und somit} \quad \vec{v} \perp \vec{a}.$$

Des Weiteren finden wir wegen  $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$  auch

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{r} \cdot \vec{a} = -v^2.$$

Bei einer *ebenen* Bewegung liegen alle beteiligten Vektoren  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ , und  $\vec{a}$  in einer Ebene und es folgt aus  $\vec{r} \perp \vec{v}$  und  $\vec{v} \perp \vec{a}$ , dass  $\vec{a}$  entweder parallel oder antiparallel auf  $\vec{r}$  steht. Aus  $\vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{r}||\vec{a}| \cos \alpha = -v^2$  sehen wir, dass  $\alpha = \pi$  sein muss, also  $\vec{a}$  in die entgegengesetzte Richtung weist wie  $\vec{r}$ . Schließlich gewinnen wir die bekannte Beziehung, dass für den Betrag der Zentralbeschleunigung bei einer Kreisbahn mit konstantem Betrag der Umlaufgeschwindigkeit gilt

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

## 1.2.2 Parametrisierung von Raumkurven

Oft sind Kurven  $\vec{r}(t)$  nicht bereits explizit in dieser Form gegeben, sondern sind etwa durch den Schnitt zweier Flächen im Raum gegeben. Beispielsweise ergibt der Schnitt zweier nicht-paralleler Ebenen eine Gerade, deren Parameterdarstellung leicht gefunden werden kann, wie aus folgendem Beispiel ersichtlich wird.

**Beispiel:** Die zwei Ebenen

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

sind nicht parallel und besitzen daher eine Schnittgerade. Setzen wir  $x_1 = t$  und berechnen anschließend  $x_2(t)$  und  $x_3(t)$  durch Elimination von  $x_3$  bzw.  $x_2$  aus den beiden Gleichungen, so erhalten wir die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = t\vec{e}^1 + \left(\frac{7}{5} - \frac{4t}{5}\right)\vec{e}^2 + \left(\frac{2}{5} + \frac{t}{5}\right)\vec{e}^3.$$

Natürlich hätten wir auch  $x_2 = u$  oder  $x_3 = v$  als Parameter wählen können, und wäre dann zu einer gleichwertigen Parameterdarstellung der Form  $\vec{r}(u) = (x_1(u), u, x_3(u))$  bzw.  $\vec{r}(v) = (x_1(v), x_2(v), v)$  gelangt.

Verläuft die gesuchte Kurve in einer Ebene normal zu einer der Koordinatenachsen, ist zu beachten, dass dann die Wahl der entsprechenden Koordinate als Parameter nicht möglich ist. Verläuft etwa eine Schnittkurve parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene, also in einer Ebene  $x_3 = \text{const.}$ , dann scheidet die Wahl  $x_3 = t$  als Parameter natürlich aus. Liefert der Schnitt zweier nicht-ebener Flächen mehrere Schnittkurven, so müssen diese getrennt parametrisiert werden.

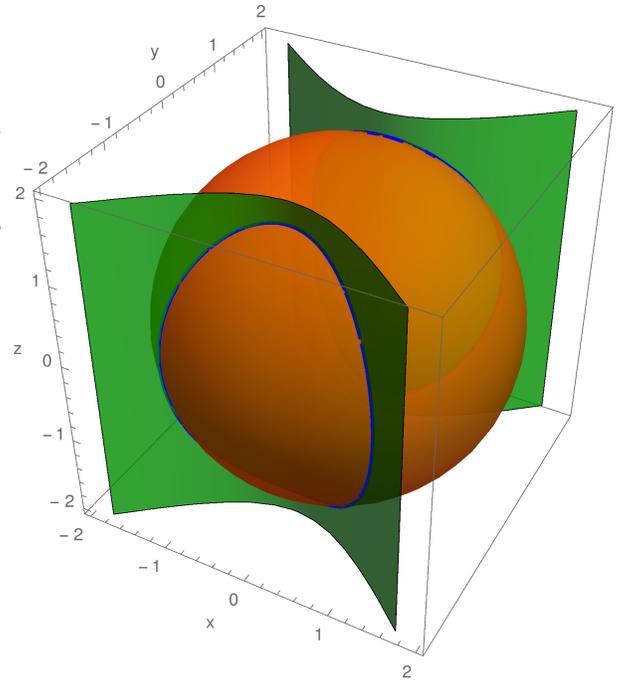
**Beispiel.** Wir betrachten den Schnitt der Kugel  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$  (orange) mit dem Hyperboloid  $x_1^2 - x_2^2 = -1$  (grün). Wählen wir  $x_1 = t$ , so finden wir die insgesamt vier Schnittkurven

$$\vec{r}^1(t) = t\vec{e}^1 + \sqrt{1+t^2}\vec{e}^2 + \sqrt{3-2t^2}\vec{e}^3$$

$$\vec{r}^2(t) = t\vec{e}^1 + \sqrt{1+t^2}\vec{e}^2 - \sqrt{3-2t^2}\vec{e}^3$$

$$\vec{r}^3(t) = t\vec{e}^1 - \sqrt{1+t^2}\vec{e}^2 + \sqrt{3-2t^2}\vec{e}^3$$

$$\vec{r}^4(t) = t\vec{e}^1 - \sqrt{1+t^2}\vec{e}^2 - \sqrt{3-2t^2}\vec{e}^3$$



### 1.2.3 Bogenelement

Das *vektorielle Bogenelement*  $d\vec{r}$  ist, wie der Name schon sagt, ein Vektor, den wir als totales Differenzial auffassen können

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{d}{dt} [x_i \vec{e}^i] dt = \dot{x}_i \vec{e}^i dt. \quad (1.96)$$

Das *skalare Wegelement*  $ds$  erhalten wir, indem wir den Betrag von  $d\vec{r}$  bilden

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\dot{x}_i \vec{e}^i dt) \cdot (\dot{x}_j \vec{e}^j dt) = \dot{x}_i \dot{x}_j (dt)^2 \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = \dot{x}_i \dot{x}_j \delta_{ij} (dt)^2 = \dot{x}_i \dot{x}_i (dt)^2 \quad (1.97)$$

bzw.

$$ds = \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i} dt \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i} = v. \quad (1.98)$$

**Beispiel:** Wir berechnen das vektorielle und skalare Bogenelement für folgende Raumkurve

$$\vec{r}(t) = t\vec{e}^1 + (t^2 - 1)\vec{e}^2 + (t - 1)^2\vec{e}^3.$$

Damit erhalten wir

$$d\vec{r} = dt \vec{e}^1 + 2t dt \vec{e}^2 + 2(t-1) dt \vec{e}^3,$$

und somit

$$ds = \sqrt{1 + 4t^2 + 4(t-1)^2} dt = \sqrt{5 - 8t + 8t^2} dt.$$

### 1.2.4 Tangentenvektor, Krümmung, Torsion

In diesem Abschnitt charakterisieren wir Raumkurven, indem wir an jedem Punkt der Kurve ein orthogonales Dreibein definieren, das die Richtung der Tangente, der Krümmung, und der Torsion (ein Maß für die Abweichung von einer ebenen Kurve) angibt. Wir beginnen mit der Definition des Tangentenvektors  $\vec{T}$  an eine Raumkurve  $\vec{r}(t)$ . Er ist ein Einheitsvektor in Richtung der Tangente:

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} \equiv \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{oder} \quad T_i = \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_j \dot{x}_j}} = \frac{\dot{x}_i}{v}. \quad (1.99)$$

Schreiben wir den Vektor der Geschwindigkeit in der Form  $\vec{v} = v\vec{T}$ , so liefert die Differenziation Ausdrücke für die Tangentialbeschleunigung  $\vec{a}^T$  und Zentripetalbeschleunigung  $\vec{a}^Z$ .

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Da die Ableitung  $\frac{d\vec{T}}{dt}$  senkrecht auf  $\vec{T}$  steht gilt also

$$\vec{a}^T = \frac{dv}{dt} \vec{T} \quad (\text{Tangentialbeschleunigung}) \quad (1.100)$$

$$\vec{a}^Z = v \frac{d\vec{T}}{dt} \quad (\text{Zentripetalbeschleunigung}) \quad (1.101)$$

Mit  $ds = v dt$  können wir für den Tangentenvektor auch schreiben

$$T_i = \frac{1}{v} \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{ds} \quad \text{oder} \quad \vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (1.102)$$

Da der Tangentenvektor ein Einheitsvektor ist (also eine konstante Länge hat), steht die Ableitung des Tangentenvektors *normal* auf die Tangente, und stellt ein Maß für die *Krümmung* der Kurve in dem betrachteten Punkt dar. Definieren wir den sogenannten Hauptnormalenvektor  $\vec{H}$  (oder auch Krümmungsvektor) als Einheitsvektor, so können wir die Krümmung  $\kappa$  einer Kurve folgendermaßen charakterisieren

$$\kappa \vec{H} \equiv \frac{d\vec{T}}{ds} \quad \text{oder} \quad \kappa H_i = \frac{dT_i}{ds} \quad \text{bzw.} \quad \kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|. \quad (1.103)$$

Drücken wir  $\vec{T}$  durch  $\vec{T} = \vec{v}/v$  aus und benützen wieder  $ds = vdt$ , so können wir den Hauptnormalenvektor  $\vec{H}$  auch schreiben als

$$\vec{H} = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\dot{\vec{v}}}{v^2} - \frac{\dot{v}}{v^3} \vec{v} \right) = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\vec{a}}{v^2} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{v^4} \vec{v} \right). \quad (1.104)$$

Eine weitere nützliche Darstellung für die Krümmung einer Kurve gewinnen wir, indem wir Gleichung 1.103 von links vektoriell mit  $\vec{T} \times$  multiplizieren und anschließend den Betrag bilden

$$\kappa \vec{T} \times \vec{H} = \vec{T} \times \frac{d\vec{T}}{ds} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \left| \vec{T} \times \frac{d\vec{T}}{ds} \right|.$$

Verwenden wir nun  $\vec{T} = \vec{v}/v$  und  $ds = vdt$ , so finden wir einen weiteren Ausdruck für die Krümmung

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{v^3}. \quad (1.105)$$

Schließlich benutzen wir die beiden Einheitsvektoren  $\vec{T}$  und  $\vec{H}$ , um einen dritten Einheitsvektor, den *Binormalenvektor*  $\vec{B}$ , aufzustellen, der dann zusammen mit  $\vec{T}$  und  $\vec{H}$  ein orthogonales Dreibein liefert

$$\vec{B} \equiv \vec{T} \times \vec{H} \quad \text{oder} \quad \vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|}. \quad (1.106)$$

Bilden wir nun die Ableitung nach  $ds$  von Gleichung 1.106, so sehen wir, dass  $\frac{d\vec{B}}{ds}$  *parallel* zum Hauptnormalenvektor ist. Die Proportionalitätskonstante bezeichnen wir als *Torsion* und verwenden das Symbol  $\tau$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{ds} &= \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{H} + \vec{T} \times \frac{d\vec{H}}{ds} \\ &= \kappa \vec{H} \times \vec{H} + \vec{T} \times \frac{d\vec{H}}{ds} = \vec{T} \times \frac{d\vec{H}}{ds} \end{aligned}$$

Da somit  $\frac{d\vec{B}}{ds}$  normal auf  $\vec{T}$  steht und  $\frac{d\vec{B}}{ds}$  auch normal auf  $\vec{B}$  stehen muss, weil ja  $|\vec{B}| = \text{const.}$ , ist die obige Aussage bewiesen. Wir schreiben

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{H}. \quad (1.107)$$

Schreiben wir nun weiters Gl. 1.106 um in  $\vec{B} \times \vec{T} = \vec{H}$  und leiten diese nach  $\frac{d}{ds}$  ab, so finden wir unter Verwendung der Definitionen für Krümmung und Torsion und der Beziehungen der Vektoren  $\vec{T}$ ,  $\vec{H}$

und  $\vec{B}$  im orthogonalen Dreibein

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{H}}{ds} &= \frac{d\vec{B}}{ds} \times \vec{T} + \vec{B} \times \frac{d\vec{T}}{ds} \\ &= -\tau \vec{H} \times \vec{T} + \kappa \vec{B} \times \vec{H} \\ &= \tau \vec{B} - \kappa \vec{T}.\end{aligned}\tag{1.108}$$

Wir fassen die Beziehungen zwischen den Vektoren  $\vec{T}$ ,  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$ , sowie die Definitionen von Krümmung  $\kappa$  und Torsion  $\tau$  als sogenannte *Frenet'sche Formeln* zusammen:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{H}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{H}, \quad \frac{d\vec{H}}{ds} = \tau \vec{B} - \kappa \vec{T}.\tag{1.109}$$

**Bsp: Kreisbahn.** Als erstes Beispiel betrachten wir die Bewegung auf einer Kreisbahn in der  $xy$ -Ebene mit dem Radius  $R$  und der Kreisfrequenz  $\omega$

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \vec{e}^1 + R \sin(\omega t) \vec{e}^2.$$

Zunächst schreiben wir  $\vec{r}(t)$  in  $\vec{r}(s)$  um, indem wir  $ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = R\omega dt$  berechnen, und somit finden

$$\vec{r}(s) = R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^1 + R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^2.$$

Gleichung 1.102 liefert dann

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^1 + \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^2,$$

und die Ableitung  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  ergibt

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{1}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^1 - \frac{1}{R} \sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \frac{1}{R}.$$

Mit dem Hauptnormalenvektor  $\vec{H} = -\cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^1 - \sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^2$  finden wir schließlich für den Binormalenvektor den konstanten Vektor in  $z$ -Richtung

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{H} = \vec{e}^3.$$

Damit ist  $\frac{d\vec{B}}{ds} = 0$  und die Torsion  $\tau$  verschwindet für diese ebene Bahn. Wir überprüfen noch die Konsistenzbedingung der Frenet'schen Formeln (rechte Gleichung in 1.109) und finden

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{ds} &= \tau\vec{B} - \kappa\vec{T} \\ \frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^1 - \frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^2 &= 0 - \frac{1}{R}\left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^1 + \cos\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^2\right) \checkmark \end{aligned}$$

**Bsp: Schraubenlinie.** Wir betrachten hier die Schraubenlinie gegeben durch

$$\vec{r}(t) = 3\cos(t)\vec{e}^1 + 3\sin(t)\vec{e}^2 + 4t\vec{e}^3.$$

Zunächst schreiben wir wieder  $\vec{r}(t)$  in  $\vec{r}(s)$  um, indem wir  $ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = 5dt$  berechnen, und somit finden

$$\vec{r}(s) = 3\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 + 3\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{4}{5}s\vec{e}^3.$$

Gleichung 1.102 liefert dann

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{3}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 + \frac{3}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{4}{5}\vec{e}^3.$$

und die Ableitung  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  ergibt

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{3}{25}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{3}{25}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{3}{25}.$$

Mit dem Hauptnormalenvektor  $\vec{H} = -\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2$  finden wir schließlich für den Binormalenvektor den Vektor

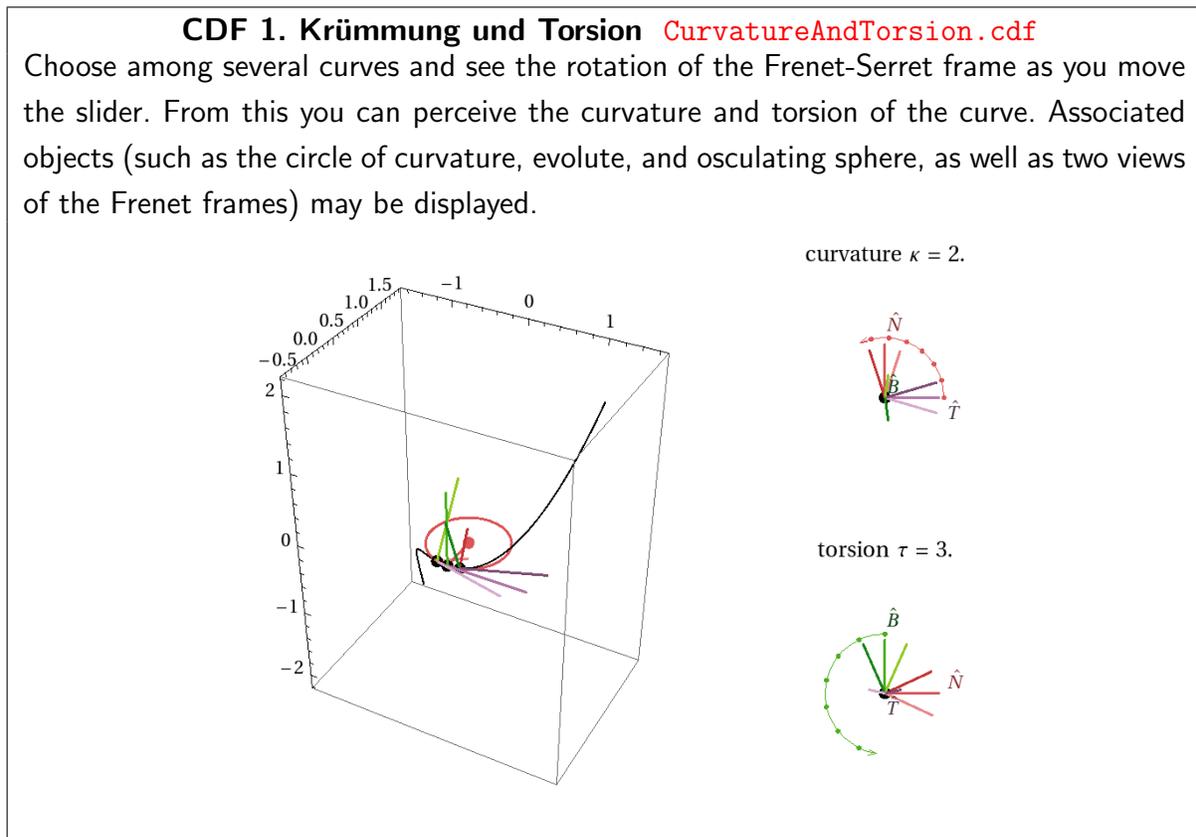
$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{H} = \frac{4}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{4}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{3}{5}\vec{e}^3.$$

Damit ist

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{4}{25}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 + \frac{4}{25}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right| = \frac{4}{25}.$$

und die Torsion  $\tau$  ist dieses Mal nicht gleich Null für diese nicht ebene Bahn. Wir überprüfen noch die Konsistenzbedingung der Frenet'schen Formeln (rechte Gleichung in 1.109) und finden

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{ds} &= \tau\vec{B} - \kappa\vec{T} \\ \frac{1}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 &= \frac{4}{25}\left[\frac{4}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{4}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{3}{5}\vec{e}^3\right] \\ &\quad - \frac{3}{25}\left[-\frac{3}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 + \frac{3}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{4}{5}\vec{e}^3\right] \\ &= \frac{1}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 \checkmark \end{aligned}$$



### 1.2.5 Linienintegrale

Das Kurven-, Linien-, oder Wegintegral erweitert den gewöhnlichen Integralbegriff für die Integration im mehrdimensionalen Raum. Es beschreibt die Integration entlang einer Kurve und führt auf ein Einfachintegral. Ein typisches Anwendungsbeispiel aus der Physik liefert einen Zusammenhang zwischen

der Kraft  $\vec{F}$ , die entlang eines Weges  $C$  integriert, die geleistete Arbeit  $W$  ergibt

$$W = \int_C \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\vec{r}. \quad (1.110)$$

Durch Einsetzen des vektoriellen Wegelements  $d\vec{r}$  wird das Integral in ein Einfachintegral übergeführt, für dessen Lösung die aus der Vorlesung Differenzial- und Integralrechnung bekannten Verfahren angewendet werden können. Das Ergebnis des obigen Integrals ist ein Skalar, da der Integrand das Skalarprodukt eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  mit dem vektoriellen Wegelement ist. Andere Beispiele für We-gintegrale wären etwa

$$A = \int_C \Phi(x_1, x_2, x_3) ds \quad (1.111)$$

$$\vec{B} = \int_C \Phi(x_1, x_2, x_3) d\vec{r} \quad (1.112)$$

$$\vec{D} = \int_C \vec{F}(x_1, x_2, x_3) ds \quad (1.113)$$

Hier ist  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  ein *skalares* Feld während  $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$  ein *Vektorfeld* darstellt. Dementsprechend führt 1.111 auf einen Skalar während 1.112 und 1.113 einen Vektoren als Ergebnis der Integration liefern. Als Spezialfall der Kategorie 1.111 berechnet sich die Länge  $L$  einer Kurve  $C$  aus:

$$L = \int_C ds. \quad (1.114)$$

Ausführlicher geschrieben bedeutet Gleichung 1.110

$$W = \int_C \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} F_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_i}{dt} dt. \quad (1.115)$$

Die Kurve  $C$  wird also durch die Parameterdarstellung  $x_i(t)$  beschrieben. Der Anfangspunkt der Kurve ist bei  $t = t_1$ , der Endpunkt bei  $t = t_2$ , und das Vektorfeld  $F_i$  wird entlang der Kurve ausgewertet.

**Beispiel.** Wir berechnen die Länge eines Viertelkreises  $L$  mit dem Radius  $r$ . Mit

$$\vec{r}(t) = r \cos t \vec{e}^1 + r \sin t \vec{e}^2, \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = -r \sin t \vec{e}^1 + r \cos t \vec{e}^2$$

$$ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = r \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = r dt$$

erhalten wir für die gesuchte Länge der Kurve das bekannte Ergebnis

$$L = \int_C ds = \int_0^{\pi/2} r dt = \frac{r\pi}{2}.$$

**Länge einer Wurfparabel.** Als weiteres Anwendungsbeispiel wollen wir die Bahnlänge einer Wurfparabel berechnen. Wir nehmen an, dass eine Masse horizontal mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung aus einer Höhe  $h$  abgeworfen wird. Vernachlässigen wir den Luftwiderstand, so ergibt sich die bekannte Wurfparabel:

$$\vec{r}(t) = vt\vec{e}^1 + \left(h - \frac{g}{2}t^2\right)\vec{e}^3, \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = vdt\vec{e}^1 - gtdt\vec{e}^3,$$

$$ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \sqrt{v^2 + g^2t^2}dt.$$

Hierbei haben wir auch gleich nach den bereits bekannten Regeln das Wegelement  $ds$  berechnet. Um die Länge  $L$  der Parabel bis zum Aufschlagen der Masse bei  $z = 0$  zu berechnen, benötigen wir noch die Zeit  $t_2$ , die wir aus der Forderung  $z(t) = 0$  gewinnen, also  $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ , und damit gilt:

$$L = \int_0^{t_2} \sqrt{v^2 + g^2t^2}dt.$$

Dieses Integral können wir auflösen, indem wir die Eigenschaft der hyperbolischen Winkelfunktionen,  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ , dazu benutzen um die Wurzel "loszuwerden". Dazu müssen wir zuerst geeignete Variablentransformationen (Substitutionen) durchführen. Das erledigen wir in zwei Schritten:

$$L = \int_0^{t_2} \sqrt{v^2 + g^2t^2}dt = \left. \begin{array}{l} t = \frac{v}{g}u \\ dt = \frac{v}{g}du \\ t_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \\ t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow u_2 = \frac{g}{v}\sqrt{\frac{2h}{g}} \end{array} \right| = \frac{v^2}{g} \int_0^{u_2} \sqrt{1 + u^2}du.$$

In der zweiten Substitution kommen nun die erwähnten hyperbolischen Winkelfunktionen ins Spiel,

$$L = \left. \begin{array}{l} u = \sinh w \\ du = \cosh w dw \\ u_1 = 0 \Rightarrow w_1 = 0 \\ u_2 = \sqrt{\frac{2gh}{v^2}} \Rightarrow w_2 = \operatorname{arsinh} u_2 \end{array} \right| = \frac{v^2}{g} \int_0^{w_2} \sqrt{1 + \sinh^2 w} \cdot \cosh w dw = \frac{v^2}{g} \int_0^{w_2} \cosh^2 w dw.$$

Das verbleibende Integrals lösen wir am einfachsten, wenn wir folgende Eigenschaft der hyperbolischen Cosinusfunktion benützen,  $\cosh^2 w = \frac{1}{2} (1 + \cosh(2w))$ . Damit erhalten wir für das gesuchte Integral

$$L = \frac{v^2}{2g} \left[ w + \frac{1}{2} \sinh(2w) \right]_0^{w_2} = \frac{v^2}{2g} \left( w_2 + \frac{1}{2} \sinh(2w_2) - 0 - 0 \right)$$

Und mit

$$w_2 = \operatorname{arsinh} \left[ \sqrt{\frac{2gh}{v^2}} \right],$$

und der Tatsache, dass sich Funktion und Umkehrfunktion "aufheben", also  $\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x$ , allgemein gilt ja  $f(f^{-1}(x)) = x$ , gelangen wir schließlich zu dem gewünschten Ausdruck für die Länge der Wurfparabel

$$L = \frac{v^2}{2g} \left[ \sqrt{\frac{2gh}{v^2}} + \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{2gh}{v^2}} \right].$$

**Mittelwert von Funktionen entlang von Kurven.** Sei  $f(x, y)$  eine Funktion  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $C$  eine Kurve in  $\mathbb{R}^2$  mit der Länge  $L$ , dann ist der Mittelwert  $\bar{f}$  entlang der Kurve  $C$  durch folgendes Integral gegeben

$$\bar{f} = \frac{1}{L} \int_C f(x, y) ds.$$

In einem Beispiel nehmen wir an, dass  $T(x, y) = 1 + x + y^2$  die Temperaturverteilung in der  $xy$ -Ebene beschreibt, und dass wir die mittlere Temperatur  $\bar{T}$  entlang einer Bahn  $C$  gegeben als Viertelkreis von  $(x, y) = (0, 2)$  bis  $(x, y) = (2, 0)$  berechnen wollen, also  $L = 2r\pi/4 = \pi$ . Mit dem bereits bekannten Wegelement für  $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$  für eine Kreisbewegung (siehe oben)

$$ds = \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}} dx, \quad \text{und} \quad T(x, y(x)) = 1 + x + 4 - x^2 = 5 + x - x^2,$$

erhalten wir für die mittlere Temperatur

$$\bar{T} = \frac{1}{\pi} \int (5 + x - x^2) \sqrt{\frac{4}{4 - x^2}} dx = \dots = 3 + \frac{4}{\pi}.$$

Das obige Integral lässt sich mit der Substitution  $x = 2 \sin t$  in den Griff bekommen.

**Beispiel: Bewegung im homogenen Gravitationsfeld.** Nahe der Erdoberfläche wirkt die konstante Gravitationskraft

$$\vec{F} = -mg \vec{e}^3.$$

Wir berechnen die Arbeit  $W$  für eine *Bewegung senkrecht nach oben*, in positive  $z$  Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$  auf die Höhe  $h$ . Diesen Integrationsweg  $\vec{r}(t)$  können wir als in eine nach der Zeit  $t$  parametrisierten Form

$$\vec{r}(t) = vt \vec{e}^3$$

ausdrücken. Das vektorielle Wegelement  $d\vec{r}$  ist das totale Differenzial

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = v dt \vec{e}^3,$$

womit wir für die Arbeit erhalten

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (-mgv dt) = \int_0^{h/v} (-mgv) dt = -mgv t \Big|_0^{h/v} = -mgh.$$

Wenn wir statt einer Bewegung senkrecht nach oben, eine *spiralförmige Bahn* der Masse nach oben annehmen, also

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \vec{e}^1 + R \sin(\omega t) \vec{e}^2 + vt \vec{e}^3,$$

wobei  $R$  den Radius der Spirale und  $\omega$  die Kreisfrequenz bedeutet, so können wir mithilfe des totalen Differenzials

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = -R\omega \sin(\omega t) dt \vec{e}^1 + R\omega \cos(\omega t) dt \vec{e}^2 + v dt \vec{e}^3,$$

wiederum die geleistete Arbeit berechnen. Wie zu erwarten, erhalten wir das gleiche Ergebnis wie wir es bereits weiter oben für die senkrechte Bewegung nach oben erhalten haben. Mit  $\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = \delta_{ik}$  erhalten wir

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{h/v} (-mgv) dt = -mgv t \Big|_0^{h/v} = -mgh.$$

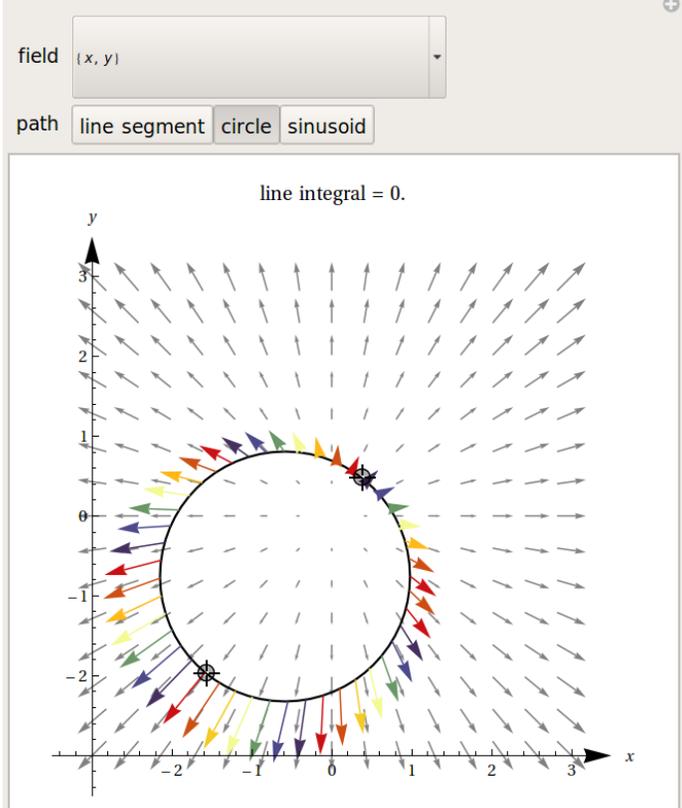
Eine tiefere Begründung dafür werden wir etwas später geben (siehe Kapitel 2.1.2). Kurz gesagt hängt das Ergebnis solcher Wegintegrale  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, wenn es sich bei dem Kraftfeld  $\vec{F}$  um ein konservatives Kraftfeld handelt, das heißt, um ein Feld, das sich als Gradient eines skalaren Feldes (eines Potentials) ausdrücken lässt.

Wir wollen noch die Länge der oben verwendeten Spiralbahn berechnen. Dazu müssen wir die Länge des entsprechenden Wegelements, also  $ds = |d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}$  über den Weg  $C$  aufintegrieren. Damit erhalten wir für die Länge  $L$  des Weges

$$L = \int_C ds = \int_C \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2 + R^2\omega^2 \cos^2 + v^2} dt = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2} \int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2}(t_2 - t_1).$$

**CDF 2. Linienintegral** [IntegratingAVectorFieldAlongACurve.cdf](#)

The line integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  of the vector field  $\vec{F}$  along the curve  $C$  gives the work done by the field on an object moving along the curve through the field. A field is called conservative if only the starting and ending points matter; in a conservative field the work done around a closed curve is zero. The first two fields in the popup menu are conservative.



## 1.3 Flächen im Raum

### 1.3.1 Parameterdarstellung einer Fläche

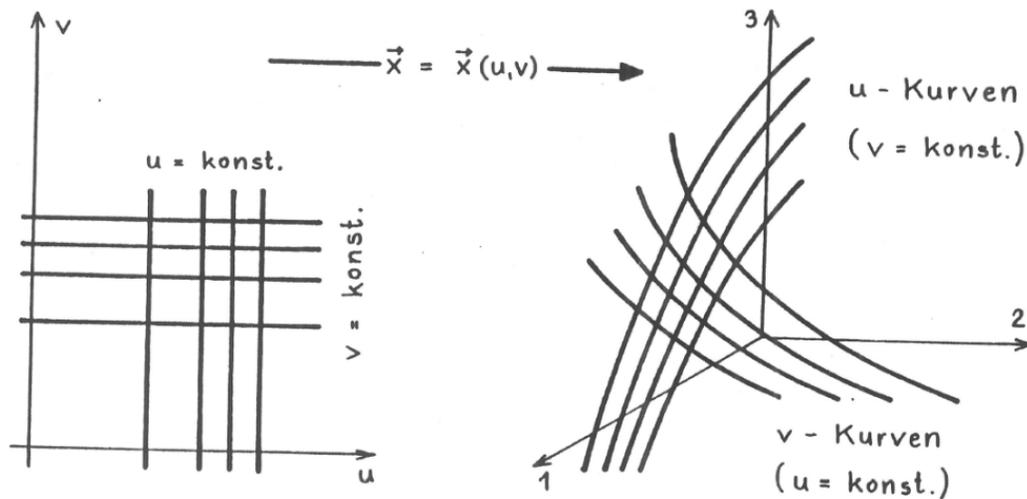
Wir gehen von der Annahme aus, dass die Koordinaten eines Punktes (Ortsvektor)  $x_i$  Funktionen von *zwei* Parametern  $u$  und  $v$  sind

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \quad \leftrightarrow \quad x_i = x_i(u, v) \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1(u, v) \\ x_2 &= x_2(u, v) \\ x_3 &= x_3(u, v) \end{aligned} \quad (1.116)$$

Die Gleichungen 1.116 besagen, dass jedem Wertepaar  $(u, v)$  ein Punkt  $x_i = (x_1, x_2, x_3)$  zugeordnet wird. Es handelt sich also um eine Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Halten wir einen der Parameter, beispielsweise  $v$ , fest, setzen also  $v = v_1 = \text{const.}$ , so beschreiben die Punkte  $x_i = x_i(u, v_1)$  eine Kurve auf der Fläche. Der Schar von parallelen Geraden  $v = \text{const.}$  in der  $(u, v)$ -Ebene wird durch die Abbildung 1.116 eine Schar von Raumkurven zugeordnet ( $u$ -Kurven).

Ganz entsprechend wird der Schar von parallelen Geraden  $u = \text{const.}$  in der  $(u, v)$ -Ebene durch die Abbildung 1.116 eine Schar von Raumkurven zugeordnet ( $v$ -Kurven). Dieser Sachverhalt ist in der Abbildung unten illustriert.



Wir wollen im folgenden voraussetzen, dass die Zuordnung  $x_i = x_i(u, v)$  umkehrbar eindeutig ist, d.h. jedem Punkt der  $(u, v)$ -Ebene soll ein Punkt  $x_i$  zugeordnet sein und umgekehrt. Dann folgt, dass jede  $u$ -Kurve jede  $v$ -Kurve nur in einem Punkt schneidet, und dass die beiden Kurvenscharen ( $u$ -Kurven und  $v$ -Kurven) ein geometrisches Gebilde überdecken, das wir *Fläche* nennen.

### 1.3.2 Tangentialebene, Normalenvektor und Flächenelement

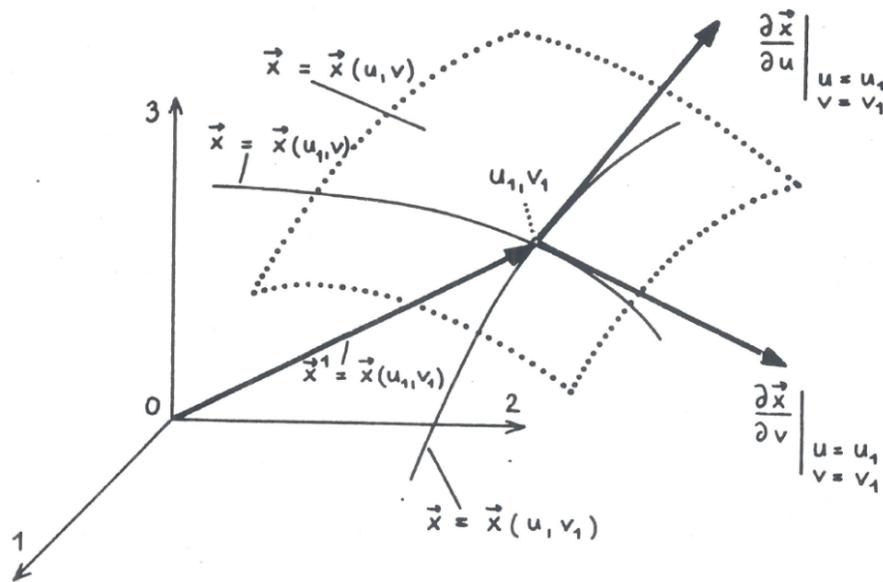
Wir wollen nun die Tangentialebene, den Normalenvektor und schließlich das differentielle Flächenelement einer Fläche  $x_i(u, v)$  bestimmen. Kurz gesagt bedienen wir uns der bereits bekannten Berechnung von Tangentenvektoren, und stellen Tangentenvektoren entlang der  $u$ -Kurven und der  $v$ -Kurven der Fläche auf.

Ganz analog zu Gleichung 1.99 für die Tangente an Raumkurven berechnen wir den Tangentenvektor  $\vec{T}^u$  entlang der  $u$ -Kurven indem wir die *partielle* Ableitung von  $\vec{x}$  nach  $u$  bilden

$$\vec{T}^u = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right|} \quad \text{oder} \quad T_i^u = \frac{\partial_u x_i}{\sqrt{(\partial_u x_j)(\partial_u x_j)}}. \quad (1.117)$$

Beachte, dass wir hier in der Koordinatenschreibweise (rechte Gleichung) die verkürzte Notation  $\partial_u$  für die partielle Ableitung verwendet haben. Es ist auch klar, dass die Summenkonvention nur auf die Koordinate  $i$  angewendet wird und natürlich nicht auf die Variable  $u$ , die zwar auch als Index auftaucht, aber eben keine Koordinate ist. Ganz analog berechnen wir den Tangentenvektor  $\vec{T}^v$  entlang der  $v$ -Kurven indem wir die *partielle* Ableitung von  $\vec{x}$  nach  $v$  bilden

$$\vec{T}^v = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right|} \quad \text{oder} \quad T_i^v = \frac{\partial_v x_i}{\sqrt{(\partial_v x_j)(\partial_v x_j)}}. \quad (1.118)$$



**Beispiel.** Wir wollen die Berechnung der Tangentenvektoren  $\vec{T}^u$  und  $\vec{T}^v$  mittels Gleichungen 1.117 und 1.118 anhand der Fläche  $x_i(u, v) = (u + v, u - v, uv)$  verdeutlichen.

$$\partial_u x_i = (1, 1, v), \quad (\partial_u x_i)(\partial_u x_i) = 2 + v^2, \quad T_i^u = \frac{(1, 1, v)}{\sqrt{2 + v^2}}.$$

$$\partial_v x_i = (1, -1, u), \quad (\partial_v x_i)(\partial_v x_i) = 2 + u^2, \quad T_i^v = \frac{(1, -1, u)}{\sqrt{2 + u^2}}.$$

Die durch die Vektoren 1.117 und 1.118 bestimmte Ebene nennen wir *Tangentialebene* der Fläche  $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$  in einem Punkt  $(u, v) \rightarrow (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ . Schneiden sich die  $u$ -Kurve und die  $v$ -Kurve in einem Punkt  $(u, v)$  rechtwinkelig, dann verschwindet das Skalarprodukt

$$\vec{T}^u \cdot \vec{T}^v = 0. \quad (1.119)$$

Gilt 1.119 auf der ganzen Fläche, so schneiden sich die  $u$ -Kurven und die  $v$ -Kurven überall rechtwinklig und man nennt  $u$  und  $v$  *orthogonale Parameter*.

Die zur Tangentialebene, oder kurz Fläche, senkrechte Richtung  $\vec{n}$  (der *Normalenvektor*) ist gegeben durch das Vektorprodukt von  $\partial_u \vec{x}$  mit  $\partial_v \vec{x}$

$$\vec{n} = \pm \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right|}. \quad (1.120)$$

Wir sehen, dass  $\vec{n}$  ein Einheitsvektor ist. Durch die Wahl des Vorzeichens wird die Orientierung des Normalenvektors und damit auch der Fläche festgelegt.

**Beispiel.** Wir wollen die Tangentialebene und den Normalenvektor an eine Kugelfläche mit dem Radius  $R$  aufstellen. Als Parametrisierung verwenden wir zunächst die aus der Behandlung von Kugelkoordinaten bereits bekannte Form mit den zwei Parametern  $\theta$  und  $\phi$ .

$$x_i(\theta, \phi) = R(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (1.121)$$

Für die Auswertung von 1.120 benötigen wir zunächst die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial \theta} = R(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_i}{\partial \phi} = R(-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0). \quad (1.122)$$

Wir bemerken, dass das Skalarprodukt  $\frac{\partial x_i}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \phi} = 0$  für alle  $\theta$  und  $\phi$ , das heißt, die gewählte Parametrisierung ist orthogonal. Die Auswertung des Vektorprodukts ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} &= R^2 (\sin^2 \theta \cos \phi \vec{e}^1 + \sin^2 \theta \sin \phi \vec{e}^2 + \sin \theta \cos \theta \vec{e}^3), \\ \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right| &= R^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den Normalenvektor

$$\vec{n} = \sin \theta \cos \phi \vec{e}^1 + \sin \theta \sin \phi \vec{e}^2 + \cos \theta \vec{e}^3.$$

Dieses Ergebnis ist nicht sonderlich überraschend, ist  $\vec{n}$  doch der Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors, der – bei einer Kugelfläche – ja normal auf die Fläche steht. Des Weiteren bemerken wir, dass wir durch unsere Wahl des Vorzeichens für  $\vec{n}$  einen von der Fläche nach außen gerichteten Normalenvektor festgelegt haben.

**Beispiel.** Wir bleiben bei der Kugeloberfläche, wiederholen nun die Rechnung allerdings für eine andere Parametrisierung. Und zwar können wir die Kugeloberfläche ja auch durch folgende Gleichung ausdrücken

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2.$$

Um zu einer Parameterdarstellung zu kommen, drücken wir beispielsweise  $x_3$  durch  $x_1$  und  $x_2$  aus  $x_3 = z(x_1, x_2)$ , und wählen für  $x_1$  und  $x_2$  zwei beliebige Funktionen  $x_1(u, v)$  und  $x_2(u, v)$  der Parameter  $u$  und  $v$

$$x_i(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), z(x_1(u, v), x_2(u, v))).$$

In unserem Beispiel haben wir also

$$x_3 = z(x_1, x_2) = \pm \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Wählen wir etwa  $x_1(u, v) = R \sin u \cos v$  und  $x_2(u, v) = R \sin u \sin v$ , dann erhalten wir genau die Parametrisierung nach Polarwinkel  $u = \theta$  und Azimutalwinkel  $v = \phi$ . Wir wollen aber die einfache Wahl  $x_1(u, v) = u$  und  $x_2(u, v) = v$  treffen. Dann lautet die Parameterdarstellung der Kugeloberfläche wie folgt (genauer gesagt beschränken wir uns auf die obere Hälfte der Kugeloberfläche  $x_3 \geq 0$ )

$$x_i(u, v) = (u, v, z(u, v)) = (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}).$$

Wir können nun wieder die Tangentialvektoren und den Normalenvektor für diese Parametrisierung aufstellen

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right) \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right). \end{aligned}$$

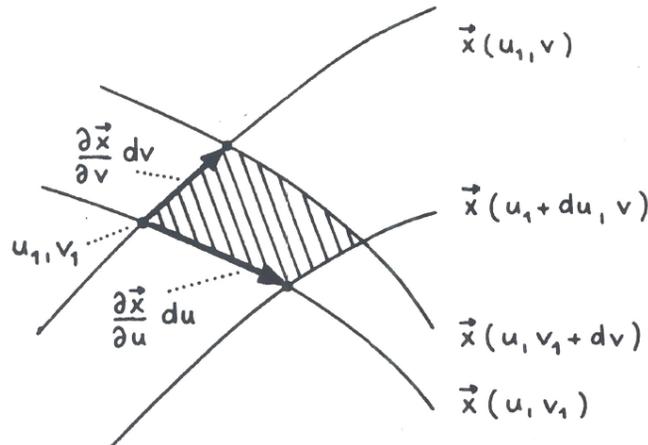
Wir bemerken, dass das Skalarprodukt  $\frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v}$  für allgemeine  $(u, v)$  nicht verschwindet, das heißt, die gewählte Parametrisierung ist dieses Mal nicht orthogonal. Die Auswertung des Vektorprodukts ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} &= -\frac{\partial z}{\partial u} \vec{e}^1 + -\frac{\partial z}{\partial v} \vec{e}^2 + \vec{e}^3 \\ &= \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \vec{e}^1 + \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \vec{e}^2 + \vec{e}^3 \\ \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \end{aligned}$$

Mit 1.120 erhalten wir somit für den Normalenvektor

$$\vec{n} = \frac{u}{R} \vec{e}^1 + \frac{v}{R} \vec{e}^2 + \frac{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}{R} \vec{e}^3.$$

Mit diesen Vorarbeiten können wir nun das differenzielle Flächenelement einer Fläche aufstellen, das wir für die Integration über Flächen benötigen. Analog zur Behandlung des Wegelements für Raumkurven (siehe Kapitel 1.2.3) erhalten wir das Flächenelement mit Hilfe des Vektorprodukts der vektoriellen Bogenelemente entlang der  $u$ -Kurven bzw. der  $v$ -Kurven. Das skalare Flächenelement  $dA$  gibt die Fläche des durch die Vektoren  $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} du$  und  $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} dv$  aufgespannten Parallelogramms an (schraffierte Fläche in der Abbildung unten). Das vektorielle Flächenelement ist definiert durch  $d\vec{A} = \vec{n} dA$  ist also ein Vektor der Länge  $dA$ , der in Richtung des Normalenvektors weist.



$$d\vec{A} = \pm \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) du dv = \vec{n} dA \quad (1.123)$$

$$dA = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv \quad (1.124)$$

$$dA = \sqrt{\left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right)^2 \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right)^2} du dv \quad (1.125)$$

$$dA = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv \quad (\text{orthogonale Parameter!}) \quad (1.126)$$

Beachte, dass der Ausdruck für  $dA$  nach Gleichung 1.125 aus der Beziehung 1.55 für den Betrag des Vektorprodukts folgt. Die vereinfachte Form von  $dA$  in Gleichung 1.126 gilt nur für eine orthogonale Parametrisierung der Fläche!

### 1.3.3 Flächenintegrale

Das Flächenintegral beschreibt die Integration entlang einer Fläche gegeben durch  $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$  und führt auf ein Zweifachintegral. Ein typisches Anwendungsbeispiel aus der Physik ist Flächenintegral eines Vektorfeldes  $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$  über eine Fläche  $S$ , das man auch als *Flussintegral* bezeichnet.

$$\Phi = \int_S \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\vec{A}. \quad (1.127)$$

Hierbei bezeichnet  $d\vec{A}$  das vektorielle Flächenelement (Gl. 1.123). Das Ergebnis dieser Integration ist ein Skalar, weil der Integrand das Skalarprodukt eines Vektorfeldes mit dem vektoriellen Flächenelement darstellt. Andere Beispiele für Flächenintegrale über ein skalares Feld  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  bzw. ein Vektorfeld  $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$  wären etwa

$$I = \int_S \Phi(x_1, x_2, x_3) dA \quad (1.128)$$

$$\vec{J} = \int_S \Phi(x_1, x_2, x_3) d\vec{A} \quad (1.129)$$

$$\vec{K} = \int_S \vec{F}(x_1, x_2, x_3) dA. \quad (1.130)$$

**Beispiel.** Als erstes, einfaches Beispiel wollen wir die Oberfläche  $S$  einer Kugel berechnen. Das heißt wir berechnen folgendes Integral

$$S = \int_{\text{Kugel}} dA.$$

Dazu benötigen wir zunächst das Flächenelement  $dA$  in einer geeigneten Parametrisierung der Kugeloberfläche. Dazu verwenden wir die bekannte Parametrisierung in Polar- und Azimutalwinkel  $\theta$  und  $\phi$  aus Gleichung 1.121. Mit den partiellen Ableitungen nach  $\theta$  und  $\phi$  aus Gleichung 1.122 und der Beziehung 1.126 für orthogonale Parameterdarstellungen einer Fläche erhalten wir

$$dA = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \right| \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right| d\theta d\phi = R \cdot R \sin \theta d\theta d\phi = R^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

Damit berechnen wir

$$S = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 [-\cos \theta]_0^{\pi} = 4\pi R^2.$$

**Beispiel.** Gegeben sei ein Vektorfeld

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2).$$

Gesucht ist das Flächenintegral  $\Phi = \int_S \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\vec{A}$ , wobei  $S$  ein Rechteck in der  $(x_1x_2)$ -Ebene mit den Kanten parallel zu den Koordinatenachsen  $x_1$  und  $x_2$  darstellt, dessen vier Eckpunkte bei  $(2, 2, 0)$ ,  $(3, 2, 0)$ ,  $(3, 4, 0)$ , und  $(2, 4, 0)$  liegen. Die Orientierung des Normalenvektors weist in die positive  $x_3$ -Richtung. Diese Fläche wird durch  $x_3 = 0$  beschrieben, daher ist ihre naheliegende Parametrisierung  $x_i(u, v) = (u, v, 0)$ . Damit wird

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = (1, 0, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = (0, 1, 0),$$

wodurch wir mit Gleichung 1.123 für das vektorielle Flächenelement finden

$$d\vec{A} = \vec{e}^3 du dv.$$

Damit erhalten wir für das Flussintegral

$$\Phi = \int_{u=2}^3 du \int_{v=2}^4 (u+v) dv = \int_{u=2}^3 du \left[ uv + \frac{v^2}{2} \right]_{v=2}^4 = 2 \int_{u=2}^3 du (u+3) = 11.$$

**Beispiel.** Zum Abschluss dieses Kapitels wenden wir uns der Berechnung der *Oberfläche eines Drehkörpers* zu. Wir betrachten eine Fläche, die durch Rotation einer Kurve  $x_3 = f(x_1)$  in der  $(x_1, x_3)$ -Ebene um die  $x_1$ -Achse entsteht. Eine solche Fläche hat die folgende Parametrisierung (mit  $x_1 = u$ )

$$x_i(u, \phi) = (u, f(u) \sin \phi, f(u) \cos \phi).$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = (1, f'(u) \sin \phi, f'(u) \cos \phi) \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_i}{\partial \phi} = (0, f(u) \cos \phi, -f(u) \sin \phi),$$

woraus wir das Flächenelement  $dA$  berechnen.

$$\begin{aligned} dA &= \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right| du d\phi \\ &= \left| -f'(u)f(u) \vec{e}^1 + f(u) \sin(\phi) \vec{e}^2 + f(u) \cos(\phi) \vec{e}^3 \right| du d\phi \\ &= f(u) \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du d\phi \end{aligned}$$

Weil der Integrand nicht von  $\phi$  abhängt, ergibt die Integration über  $\phi$  einfach den Faktor  $2\pi$ , und die Oberfläche  $S$  eines Drehkörpers errechnet sich aus

$$S = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} f(u) \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du. \quad (1.131)$$



# Kapitel 2

## Integralsätze

### 2.1 Differenzialoperatoren

In der Physik spielen *klassische Feldtheorien* eine große Rolle. Diese haben sich zunächst aus der Potentialtheorie des Erdschwerefeldes entwickelt und sind die mathematische Grundlage für die Beschreibung all jener physikalischen Effekte, die durch Kräfte bzw. Wechselwirkungen hervorgerufen werden. Als solche sind sie ein zentraler Bestandteil der theoretischen Physik, der Geophysik und auch anderer Naturwissenschaften. Man unterscheidet bei Feldern zwischen so genannten *Skalarfeldern* und *Vektorfeldern*: Ein Skalarfeld ordnet jedem Raumpunkt einen Skalar, also eine reelle Zahl zu wie im Fall der Temperatur, des elektrischen Potentials, oder des Gravitationspotentials. Felder dagegen, die jedem Raumpunkt einen Vektor zuordnen, bezeichnet man als Vektorfelder wie etwa beim elektrischen Feld oder dem Geschwindigkeitsfeld einer Strömung.

Zwischen diesen einzelnen Feldern existieren diverse Querbeziehungen. Das Gravitationsfeld (Kraftfeld) beispielsweise ist die Ableitung (*Gradient*) des Gravitationspotentials, das elektrische Feld ist der Gradient des elektrischen Potentials. Umgekehrt können aus bestimmten Vektorfeldern mittels der sogenannten *Divergenz* wieder Skalarfelder abgeleitet werden, oder schließlich mittels einer *Rotation* aus bestimmten Vektorfeldern (Vektorpotential) andere Vektorfelder, etwa die magnetische Flussdichte.

#### 2.1.1 Der Nabla-Operator

Gegenstand dieses Kapitels ist Definition und Anwendung dieser sogenannten Differenzialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation bzw. zusammengesetzter Operatoren wie dem Laplace-Operator auf Skalar- bzw. Vektorfelder. Der fundamentale Differentialoperator ist dabei der sogenannte *Nabla*-

Operator<sup>1</sup>

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{e}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}^3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (2.1)$$

**Der Nablaoperator ist ein Vektor.** Wir wollen zeigen, dass der Nablaoperator  $\vec{\nabla}$  formal die obige Definition eines Vektors erfüllt. Verwenden wir die Abkürzungen  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  und  $\bar{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}$ , so müssen wir also folgende Identitäten beweisen:

$$\partial_i = r_{ik} \bar{\partial}_k \quad (2.2)$$

$$\bar{\partial}_i = r_{ki} \partial_k \quad (2.3)$$

Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Ortsvektors im System  $1, 2, 3, x_i$ , und den Koordinaten im System  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{x}_k$ , ist nach 1.40 und 1.41

$$x_k = r_{ki} \bar{x}_i, \quad \bar{x}_k = r_{ik} x_i. \quad (2.4)$$

Ist eine Funktion  $f = f(x_1, x_2, x_3)$  gegeben, dann gilt mit 2.4 und unter Anwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_k} r_{ik} &\Rightarrow & \partial_i f = r_{ik} \bar{\partial}_k f \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial x_k} r_{ki} &\Rightarrow & \bar{\partial}_i f = r_{ki} \partial_k f, \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass der Nablaoperator die Eigenschaften eines Vektors besitzt.

Das heißt seine Anwendung auf ("Multiplikation mit") einem Skalarfeld  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  ergibt einen Vektor, genauer ein *Vektorfeld*, das man als den *Gradienten* von  $\Phi$  bezeichnet

$$\vec{\nabla} \Phi(x_1, x_2, x_3) \equiv \text{grad } \Phi(x_1, x_2, x_3) = \vec{e}^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \vec{e}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \vec{e}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \quad (2.5)$$

Bilden wir das *Skalarprodukt* des Nabla-Operators mit einem *Vektorfeld*  $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$ , so erhalten wir ein Skalarfeld, das wir als die *Divergenz von*  $\vec{A}$  bezeichnen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x_1, x_2, x_3) \equiv \text{div } \vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \quad (2.6)$$

Bilden wir schließlich das *Vektorprodukt* des Nabla-Operators mit einem *Vektorfeld*  $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$ , so

---

<sup>1</sup>Sein Name stammt von der Bezeichnung eines harfenähnlichen hebräischen Saiteninstruments, das in etwa die Form dieses Zeichens hatte.

erhalten wir ein Vektorfeld, das wir als die *Rotation von*  $\vec{A}$  bezeichnen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A}(x_1, x_2, x_3) &\equiv \operatorname{rot} \vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}^1 \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \vec{e}^2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \vec{e}^3 \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Weil der Nablaoperator sehr häufig verwendet wird, führen wir noch eine kompaktere Schreibweise von Gleichung 2.1 ein, indem wir für  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  einfach  $\partial_i$  schreiben

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^1 \partial_1 + \vec{e}^2 \partial_2 + \vec{e}^3 \partial_3 = \vec{e}^i \partial_i. \quad (2.8)$$

Die Koordinaten des symbolischen Nabla-Vektors schreiben wir dann also einfach als

$$\{\vec{\nabla}\}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i. \quad (2.9)$$

**Beispiel.** Wir berechnen die Anwendung des Nabla-Operators auf die Funktion

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_j x_j}} = (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}}.$$

Das heißt, wir finden für

$$\partial_i \Phi = \partial_i (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} (\delta_{ij} x_j + x_j \delta_{ij}) = -\frac{x_i}{(x_j x_j)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wechseln wir von der Koordinatenschreibweise in die symbolische Darstellung dieses Vektors, so finden wir mit dem Ortsvektor  $\{\vec{r}\}_i = (x_1, x_2, x_3)$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

## 2.1.2 Gradient

In dem vorangegangenen Beispiel haben wir soeben den Gradienten der Funktion  $\Phi = \frac{1}{r}$  berechnet. Wir stellen uns nun die Frage, nach der geometrischen Bedeutung des Gradienten und welche besondere Eigenschaften Gradientenfelder haben.

Betrachten wir für ein Skalarfeld  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  eine sogenannte Äquipotentialfläche

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = c = \text{const}, \quad (2.10)$$

so beschreibt diese Gleichung eine *Fläche konstanten Potentials*, also eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$ , auf der sich der Wert von  $\Phi$  nicht ändert. Das heißt, das totale Differenzial  $d\Phi$  verschwindet so lange die Änderungen  $d\vec{x}$  in dieser Fläche stattfinden. Da wir das totale Differenzial aber mit Hilfe des Gradienten ausdrücken können, gilt

$$d\Phi = (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\Phi \perp d\vec{x}. \quad (2.11)$$

Diese Gleichung besagt somit, dass der Gradientenvektor  $\vec{\nabla}\Phi$  *normal* auf die Äquipotentialfläche  $\Phi = \text{const}$  steht, da ja  $d\vec{x}$  in der Tangentialebene an diese Fläche liegt. Mit anderen Worten gibt der Gradientenvektor die Richtung der stärksten Änderung der Funktion  $\Phi$  an.

Die Anwendung des Nabla-Operators auf das Skalarfeld  $\Phi$  generiert ein Vektorfeld  $\vec{F}$

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \vec{\nabla}\Phi(x_1, x_2, x_3). \quad (2.12)$$

An jedem Punkt  $(x_1, x_2, x_3)$  des Raumes weist der Vektor  $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$  in eine Richtung normal zu einer Äquipotentialfläche von  $\Phi$  durch diesen Punkt. Vektorfelder, die sich als Gradient eines Skalarfeldes angeben lassen, nennen wir *konservative* Vektorfelder. Ein Beispiel aus der Physik ist die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$ , die der Gradient des elektrischen Potentials ist, oder die Gravitationskraft  $\vec{F}$ , die als Gradient des Gravitationspotentials geschrieben werden kann. Der Name *konservative Kraft* kommt daher, dass die entlang eines Weges geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen, nicht aber von seiner speziellen Form. Ist die Kraft  $\vec{F}$  konservativ, also  $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$ , dann können wir für das Differenzial  $dW$  der Arbeit schreiben

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{r} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i = d\Phi. \quad (2.13)$$

Damit lautet das Wegintegral von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2

$$\int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 d\Phi = \Phi(2) - \Phi(1). \quad (2.14)$$

Ist der Weg geschlossen, also der Anfangspunkt gleich dem Endpunkt des Weges, so folgt unmittelbar, dass Arbeitsintegral verschwindet. Für solche Linienintegrale über geschlossene Wege führen wir das Integralsymbol  $\oint$  und schreiben

$$\oint dW = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{für konservative Kräfte}). \quad (2.15)$$

Die Energie bleibt also erhalten (*conserved*) wenn man nach Durchlaufen eines beliebigen Weges wieder an den Ausgangspunkt zurückkehrt. Wie wir in Kapitel 2.1.4 sehen, ist eine weitere Eigenschaft von konservativen Feldern, dass ihre Rotation verschwindet.

**Beispiel.** Wir betrachten das Kraftfeld  $F_i = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2^2, 0)$ . Zunächst überlegen wir, ob wir ein Potenzial finden, dessen Gradient  $\vec{F}$  ergibt? Mit  $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 - \frac{x_2^3}{3}$  finden wir tatsächlich

$$\partial_i \Phi = (\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi, \partial_3 \Phi) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2^2, 0) = F_i.$$

Damit ist gezeigt, dass  $\vec{F}$  eine konservative Kraft ist, und somit jedes Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg verschwinden muss. Als Übung zeigen wir das explizit für eine geschlossene Kurve  $C$ , wobei  $C$  das Quadrat in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene mit den Eckpunkte  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ , und  $(0, 1)$  bezeichnet. Als Richtung der Integration entscheiden wir uns gegen den Uhrzeigersinn. Damit gilt

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 2x_1 dx_1 + \int_0^1 (1 - x_2^2) dx_2 + \int_1^0 (2x_1 + 1) dx_1 - \int_1^0 x_2^2 dx_2 = 0.$$

**Beispiel.** Wir berechnen den Gradienten einer Funktion  $f(r)$ , die nur vom Betrag des Ortsvektors  $r = |\vec{r}|$  abhängt. Die Anwendung der Kettenregel  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i}$  führt mit  $r = (x_j x_j)^{\frac{1}{2}}$  auf

$$\partial_i f(r) = \frac{df}{dr} \partial_i (x_j x_j)^{\frac{1}{2}} = f'(r) \frac{1}{2} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} (\delta_{ij} x_j + x_j \delta_{ij}) = f'(r) \frac{x_i}{(x_j x_j)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wir finden also das wichtige Resultat, dass der Gradient einer Funktion, die nur vom Betrag des Ortsvektors abhängt, immer parallel oder antiparallel zum Ortsvektor orientiert ist

$$\vec{\nabla} f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.16)$$

### 2.1.3 Divergenz

Interpretiert man ein Vektorfeld  $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$  als Strömungsfeld, so gibt die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{A}(x_1, x_2, x_3) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \equiv \partial_i A_i. \quad (2.17)$$

für jeden Raumpunkt an, wie viel mehr aus einer Umgebung dieses Punkts hinausfließt als in sie hineinfließt. Mithilfe der Divergenz lässt sich also herausfinden, ob und wo das Vektorfeld Quellen (Divergenz größer als Null) oder Senken (Divergenz kleiner als Null) hat. Ist die Divergenz überall

gleich Null, so bezeichnet man das Feld  $\vec{A} = 0$  als *quellenfrei*. In der Physik wird die Divergenz zum Beispiel bei der Formulierung der Maxwell-Gleichungen oder der Kontinuitätsgleichung verwendet.

**Beispiel.** Gegeben ist das Vektorfeld  $A_i = (x_1, x_2, x_3)$ , von dem wir die Divergenz berechnen wollen.

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Unter Zuhilfenahme der Summenkonvention und mit  $A_i = x_i$  können wir die gleiche Rechnung auch ein wenig eleganter bewerkstelligen

$$\operatorname{div} \vec{A} = \partial_i A_i = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3.$$

Das Feld  $\vec{A}$  hat also die räumlich konstante Quellendichte von 3.

**Beispiel.** Wir berechnen die Divergenz für das Feld der Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}(\vec{r})$ , die von einer Punktmasse  $M$  im Ursprung unseres Koordinatensystems verursacht wird. Nach Newton gilt ja

$$\vec{g}(\vec{r}) = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Die Kraft  $\vec{F}$  auf eine Masse  $m$  am Ort  $\vec{r}$  wäre dann eben  $\vec{F} = m\vec{g}$ . Unter Verwendung der Koordinatenschreibweise und der Ableitungsregeln (Quotientenregel, Kettenregel) finden wir für Divergenz von  $\vec{g}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{g} &= \partial_i g_i = -GM \partial_i \frac{x_i}{(x_j x_j)^{\frac{3}{2}}} = -GM \frac{\delta_{ii} (x_j x_j)^{\frac{3}{2}} - x_i \frac{3}{2} (x_j x_j)^{\frac{1}{2}} (\delta_{ij} x_j + x_j \delta_{ij})}{(x_j x_j)^3} \\ &= -GM \frac{3r^3 - 3r x_i x_i}{r^6} = -GM \frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} = 0 \quad \text{für } r \neq 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Das heißt das Gravitationsfeld einer Punktmasse ist quellenfrei für alle  $r \neq 0$ , weil die Quelle des Feldes ja nur im Ursprung sitzt und nirgendwo sonst. Mit unseren Mitteln können wir die Quellendichte für  $r = 0$ , die dort singulär wird, noch nicht angeben, da wir dazu die Theorie der Distributionen benötigen (Stichwort: Dirac'sche Deltafunktion oder genauer Deltadistribution).

### 2.1.4 Rotation

Als Rotation bezeichnet man das Vektorprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \left\{ \operatorname{rot} \vec{A} \right\}_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wenn  $\vec{A}$  ein Strömungsfeld ist, dann gibt die Rotation von  $\vec{A}$  für jeden Ort das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit an, mit der ein mitschwimmender Körper rotiert, also wie schnell und um welche Achse er sich dreht. Dieser Zusammenhang ist namensgebend, obwohl es sich aber nicht immer um ein Geschwindigkeitsfeld und eine Drehbewegung handeln muss. Beispielsweise betrifft das Induktionsgesetz der Elektrodynamik die Rotation des elektrischen Feldes. Ein Vektorfeld, dessen Rotation in einem Gebiet überall gleich null ist, nennt man *wirbelfrei*.

**Beispiel:** Wir berechnen die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

das eine Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $|\vec{\omega}|$  um eine Drehachse durch den Ursprung in Richtung  $\omega$  beschreibt. Hierzu benutzen wir die Koordinatenschreibweise und die Definition des Vektorprodukts mit Hilfe des  $\varepsilon$ -Tensors

$$\left\{ \operatorname{rot} \vec{v} \right\}_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \omega_l x_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \omega_l \delta_{jm} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klj} \omega_l = 2\delta_{il} \omega_l = 2\omega_i.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass  $\omega_l$  konstant ist, die Ableitung  $\partial_j x_m$  ein Kronecker  $\delta_{jm}$  ergibt, und die zweifache Überschiebung des  $\varepsilon$ -Tensors  $2\delta_{il}$  liefert (siehe Kapitel 1.1.8). Damit haben wir die obige Aussage bewiesen, dass die Rotation eines Strömungsfeldes das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit ergibt.

**Beispiel:** Wir berechnen die Rotation des Einheitsvektors  $\vec{e}$  in Richtung des Ortsvektors

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{oder} \quad \left\{ \vec{e} \right\}_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_j x_j}}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{rot} \vec{e} \right\}_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j e_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \frac{x_k}{(x_m x_m)^{\frac{1}{2}}} = \varepsilon_{ijk} \frac{\delta_{jk} r - x_k \frac{1}{2} (x_m x_m)^{-\frac{1}{2}} (2\delta_{jm} x_m)}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} - \frac{1}{r^3} \varepsilon_{ijk} x_j x_k = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

**Gradient eines Tensorfeldes.** Die partiellen Ableitungen der Koordinaten eines Tensors  $n$ -ter Stufe  $T_{i_1 i_2 \dots i_n}(x_1, x_2, x_3)$  nach den Ortskoordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  bilden einen Tensor  $G_{j i_1 i_2 \dots i_n}$  der Stufe  $n + 1$  (*Fundamentalsatz der Feldtheorie*). Der durch die Differenziation entstehende Tensor heißt Gradiententensor oder kurz Gradient des Feldes. Der Gradient eines Tensors  $n$ -ter Stufe ist also ein Tensor der Stufe  $n + 1$ .

$$G_{j i_1 i_2 \dots i_n} = \partial_j T_{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (2.20)$$

Diese Aussage folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass sich der Nablaoperator wie ein Tensor 1. Stufe (Vektor) transformiert (vgl. 2.2 und 2.3). Einfache Folgerungen daraus sind:

- Der Gradient eines skalaren Feldes  $\Phi$  ist ein Vektor:  $F_i = \partial_i \Phi$ .
- Der Gradient eines Vektorfeldes  $A_i$  ist ein Tensor 2. Stufe:  $T_{ij} = \partial_i A_j$ .
- Die Divergenz eines Vektorfeldes  $A_i$  ist ein Skalar:  $\rho = T_{ii} = \partial_i A_i$ .
- Die Rotation eines Vektorfeldes  $B_k$  ist ein Vektor:  $A_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k$
- Die Divergenz vom Gradienten eines Skalarfeldes  $\Phi$  ist ein Skalar:  $\rho = \partial_i \partial_i \Phi$
- Der Gradient eines Tensorfeldes  $T_{jk}$  ist ein Tensor dritter Stufe:  $G_{ijk} = \partial_i T_{jk}$ .
- ...

### 2.1.5 Zusammengesetzte Differentialoperatoren

In diesem Unterkapitel beschäftigen wir uns mit der mehrfachen Anwendung des Nabla-Operators bzw. der Anwendung des Nabla-Operators auf zusammengesetzte Felder, die das skalare bzw. vektorielle Produkt von Teilfeldern darstellen. Eine besondere Bedeutung in der Physik hat die Divergenz eines Gradienten.

**Der Laplace-Operator.** Die Divergenz eines Gradienten nennen wir auch den Laplace-Operator, den wir mit dem "Δ"-Symbol abkürzen bzw. manchmal auch als  $\vec{\nabla}^2$  ("Nabla-Quadrat") notieren wollen

$$\text{div grad } \Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi \equiv \Delta \Phi. \quad (2.21)$$

In Koordinatenschreibweise lautet Gleichung 2.21, somit

$$\Delta \Phi = \partial_i \partial_i \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \quad (2.22)$$

Der Laplace-Operator findet in sehr vielen Gebieten der Physik Verwendung, unter anderem in der Wellengleichung, in der Wärmeleitungsgleichung, oder in der Schrödingergleichung.

**Beispiel.** Wir berechnen  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi$  für das Skalarfeld  $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^3 x_2^2 x_3^4$

$$\Delta \Phi = 18x_1 x_2^2 x_3^4 + 6x_1^3 x_3^4 + 36x_1^3 x_2^2 x_3^2.$$

Eine weitere häufig auftretende Kombination des Nabla-Operators ist die Berechnung der *Rotation einer Rotation* eines Vektorfeldes

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \quad (2.23)$$

Wir werten den Ausdruck  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$  weiter aus<sup>2</sup>, indem wir die Eigenschaften des  $\varepsilon$ -Tensors bei einfacher Überschiebung benutzen ( $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ )

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right\}_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kmn} \partial_m A_n = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} \partial_j \partial_m A_n = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \partial_j \partial_m A_n \\ &= \partial_j \partial_i A_j - \partial_j \partial_j A_i = \left\{ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \right\}_i. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Zum Unterschied von 2.21 wirkt der Laplace-Operator auf der rechten Seite dieser Gleichung auf ein Vektorfeld! Wir bemerken also den Unterschied zwischen  $\Delta \Phi$  und  $\Delta \vec{A}$ :

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi \quad (2.25)$$

$$\Delta \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (2.26)$$

**Beispiel.** Gegeben sei das Vektorfeld  $A_i = (x_1^2 x_2, -2x_1 x_3, 2x_2 x_3)$ . Berechne a)  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}$ , b)  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$ , und c)  $\Delta \vec{A}$ . Überprüfe die Gültigkeit von 2.26.

$$\text{a) } \operatorname{div} \vec{A} = 2x_1 x_2 + 0 + 2x_2, \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = 2x_2 \vec{e}^1 + 2(x_1 + 2) \vec{e}^2,$$

$$\text{b) } \operatorname{rot} \vec{A} = 2(x_1 + x_3) \vec{e}^1 - (x_1^2 + 2x_3) \vec{e}^3, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = 2(x_1 + 2) \vec{e}^2.$$

$$\text{c) } \Delta \vec{A} = 2x_2 \vec{e}^1,$$

<sup>2</sup>In der Elektrodynamik führt man analog zum elektrischen Potenzial ein Vektorpotential  $\vec{A}$  ein, dessen Rotation die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  ergibt,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Die vierte Maxwellgleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$  führt dann eben auf die Rotation der Rotation des Vektorpotentials  $\vec{A}$ .

wodurch die Gleichung 2.26 erfüllt ist.

Wir betrachten die Wirkung des Nabla-Operators auf zusammengesetzte Felder. Seien  $\Phi$  und  $\Psi$  skalare Felder, und  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  Vektorfelder, dann gelten folgende Identitäten

$$\text{grad}(\Phi\Psi) = \Psi \text{grad} \Phi + \Phi \text{grad} \Psi \quad (2.27)$$

$$\text{div}(\Phi\vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad} \Phi + \Phi \text{div} \vec{A} \quad (2.28)$$

$$\text{rot}(\Phi\vec{A}) = \Phi \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \text{grad} \Phi \quad (2.29)$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B} \quad (2.30)$$

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (2.31)$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (2.32)$$

Um die Gleichungen 2.27–2.32 zu beweisen, schreiben wir die Identitäten in Koordinatenschreibweise und benutzen die Produktregel der Differenzialrechnung. Beispielsweise lautet Gleichung 2.27

$$\{\text{grad}(\Phi\Psi)\}_i = \partial_i \Phi\Psi = \Psi \partial_i \Phi + \Phi \partial_i \Psi = \{\Psi \text{grad} \Phi + \Phi \text{grad} \Psi\}_i.$$

Beachte: Alle Ausdrücke, die rechts vom Operator  $\partial_i$  stehen werden differenziert, alle Größen, die links von  $\partial_i$  stehen werden nicht differenziert. Auf ähnliche Weise können wir zum Beispiel auch die Identität 2.30 zeigen

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \partial_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k = \varepsilon_{ijk} (B_k \partial_i A_j + A_j \partial_i B_k) = B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}.$$

### 2.1.6 Satz von Poincaré

**Die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet.** Ist das Vektorfeld  $\vec{E}$  der Gradient eines skalaren Feldes  $\Phi$ , gilt also  $\vec{E} = \vec{\nabla}\Phi$ , so verschwindet die Rotation von  $\vec{E}$ . Oder anderes ausgedrückt: Ein konservatives Vektorfeld ist wirbelfrei.

$$\text{rot} \text{grad} \Phi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0. \quad (2.33)$$

Es gilt sogar die wichtige Umkehrung: Die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet dann und nur dann, wenn das Vektorfeld ein Gradientenfeld ist

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad \iff \quad \vec{E} = \text{grad} \Phi. \quad (2.34)$$

Wir zeigen den ersten Teil der obigen Aussage (Schluss von rechts nach links) und verwenden als Voraussetzung die Vertauschbarkeit der gemischten zweiten partiellen Ableitungen im Falle der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit der Funktion  $\Phi$  (vgl. Satz von Schwarz, Vorlesung Differenzial- und Integralrechnung), und die Tatsache, dass der  $\varepsilon$ -Tensor das Vorzeichen wechselt, wenn zwei Indizes vertauscht werden.

$$\left\{ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi \right\}_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_j \Phi = -\varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \Phi = - \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi \right\}_i$$

Die obige Gleichung ist nur für  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0$  erfüllt.

Wollen wir die *Quellen*  $q = \operatorname{div} \vec{E}$  für das wirbelfreie Vektorfeld  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi^3$  berechnen, so gelangen wir zur sogenannten *Poisson'schen Gleichung*

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi = -q. \quad (2.35)$$

Ist auch  $q = 0$ , das heißt liegen keine Quellen und Senken für das Vektorfeld  $\vec{E}$  vor, so erhalten wir die *Laplace'sche Gleichung* für das skalare Potential

$$\Delta \Phi = 0. \quad (2.36)$$

Alle Lösungen der partiellen Differentialgleichungen 2.35 führen auf wirbelfreie Felder, während Lösungen von 2.36 immer quellen- und wirbelfreie Felder liefern. Bei den in den physikalischen Anwendungen auftretenden Problemen handelt es sich immer darum, in einem gegebenen räumlichen Bereich  $B$  eine partikuläre Lösung von 2.35 oder 2.36 zu ermitteln, die durch gewisse zusätzliche Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Diese Bedingungen sind in der Regel *Randbedingungen*, bei denen entweder die Werte von  $\Phi$  auf der Randfläche  $F$  des betrachteten Bereichs  $B$  vorgeschrieben sind (Randwertproblem erster Art), oder die Werte der Normalableitung (d.h. die Projektion des Feldvektors auf die Flächennormale (Randwertproblem zweiter Art). Die Lösung solcher Randwertprobleme wird in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen behandelt und sprengt den Rahmen dieser Vorlesung.

Wir betrachten nun ein *quellenfreies* Vektorfeld  $\vec{B}$ , dessen Wirbeldichte *nicht* verschwindet. Wir schreiben also

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{w},$$

wobei das Vektorfeld  $\vec{w}$  die Wirbeln des Feldes  $\vec{B}$  bezeichnet. Die Form von  $\vec{w}$  ist nicht beliebig, da  $\vec{w}$  *quellenfrei* sein muss, oder anders ausgedrückt:

<sup>3</sup>Das Minuszeichen entspricht der in der Physik gängigen Konvention.

**Die Divergenz einer Rotation verschwindet.** Die Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  ist quellenfrei

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0. \quad (2.37)$$

Weiters gilt der wichtige Satz: Die Divergenz eines Vektorfeldes verschwindet dann und nur dann, wenn das Vektorfeld die Rotation eines Feldes ist.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \iff \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (2.38)$$

Wir zeigen 2.37 ebenfalls unter der Voraussetzung der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit von  $\vec{B}$  und der Antisymmetrie des  $\varepsilon$ -Tensors

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_i A_k = -\partial_j \varepsilon_{jik} \partial_i A_k = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Die obige Gleichung ist wiederum nur erfüllt, wenn  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$  ist.

Wir nennen das Feld  $\vec{A}$ , aus dem sich das gesuchte quellenfreie Feld  $\vec{B}$  durch Bildung der Rotation ergibt,  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ , das *Vektorpotential* des Vektorfeldes  $\vec{B}$ . Wir sehen also, dass sich das Vektorpotential  $\vec{A}$  aus den Wirbeln  $\vec{w}$  des Feldes  $\vec{B}$  wie folgt berechnet

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{w}.$$

Diese Gleichung können wir mit 2.26 auch schreiben als

$$-\Delta \vec{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = \vec{w}$$

Da wir über die Divergenz des Feldes  $\vec{A}$  frei verfügen können – bei der Berechnung des gesuchten Feldes  $\vec{B}$  nach  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  fallen etwaige Quellen in  $\vec{A}$  ohnehin heraus – setzen wir  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ . Wir erhalten dann folgende, einfachere, Differenzialgleichung für das Vektorpotential

$$\Delta \vec{A} = -\vec{w}, \quad (2.39)$$

die uns erlaubt das Vektorpotential  $\vec{A}$  aus Kenntnis der Wirbeldichte  $\vec{w}$  abzuleiten.

Die beiden Eigenschaften 2.33 und 2.37 werden auch *Satz von Poincaré* oder *Poincaré-Lemma* genannt. Wir haben diese Aussagen hier für den  $\mathbb{R}^3$  kennengelernt. Es sei nur erwähnt, dass sich diese Aussagen auch höherdimensionale Räume verallgemeinern lassen (siehe z.B. Kapitel 11 im Buch "Mathematische Methoden" von Lang und Pucker).

## 2.2 Der Satz von Gauß

Der Integralsatz von Gauß stellt einen Zusammenhang zwischen einem Volumsintegral und einem Flächenintegral längs der das Volumen  $V$  berandenden Fläche  $\partial V$  dar. Für ein skalares Feld lautet der Gauß'sche Satz in seiner allgemeinsten Form

$$\int_V \partial_i F dV = \oint_{\partial V} F dA_i \quad (2.40)$$

Der Satz von Gauß gilt auch, wenn wir in der obigen Gleichung das skalare Feld  $F$  durch ein Vektorfeld  $F_j$  (oder auch durch ein Tensorfeld  $F_{jk}$  ersetzen)

$$\int_V \partial_i F_j dV = \oint_{\partial V} F_j dA_i \quad (2.41)$$

Bilden wir von diesem Ausdruck die Spur der Matrix (anders gesagt: verjüngen wir den Tensor zweiter Stufe), so erhalten wir eine Form des Gauß'schen Satzes, der in der physikalischen Anwendung wohl am häufigsten auftritt:

$$\int_V \partial_i F_i dV = \oint_{\partial V} F_i dA_i \quad (2.42)$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (2.43)$$

Die Gleichungen 2.40–2.43 gelten unter folgenden Voraussetzungen:

- Die Fläche  $\partial V$  (die Berandung des Volumens  $V$ ) sei stückweise glatt. Das heißt sie besteht aus endlich vielen Flächenstücken, die jeweils eine stetig partiell differenzierbare Parameterdarstellung aufweisen. Daraus folgt, dass auf diesen Flächenstücken ein Normalvektor existiert, der definitionsgemäß nach außen gerichtet ist.
- Das Feld  $F(x_1, x_2, x_3)$  sei in  $V$  und auf der ganzen Fläche  $\partial V$  definiert und stetig differenzierbar. Punkte in  $V$ , wo das nicht gilt, müssen durch geeignete "Lochdefinitionen" ausgeschlossen werden.
- Falls es im umschlossenen Gebiet solche Löcher gibt, müssen diese bei der Bestimmung des Randes berücksichtigt werden.

**Beispiel.** Wir wollen die Gleichung 2.43 auf das Feld  $\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$  anwenden, also (bis auf die fehlenden Konstanten  $G M m$ ) das Gravitationsfeld einer Punktmasse  $M$ , die im Ursprung des Koordinatensy-

stems sitzt. Als Bereich  $V$  wählen wir eine Kugel mit dem Radius  $R$ , das heißt, die Berandung  $\partial V$  ist dementsprechend die Kugeloberfläche mit dem Radius  $R$ . Wir werten zunächst die rechte Seite von 2.43, also das Flächenintegral aus, und erhalten unter Verwendung von Kugelkoordinaten (siehe 1.3.2)

$$dA_i = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) R^2 \sin \theta \, d\theta d\phi$$

und

$$F_i = \frac{1}{R^3} (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta).$$

Damit erhalten wir

$$\oint_{\partial V} F_i dA_i = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta \frac{R}{R^3} 1 = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 4\pi.$$

Wir wenden uns nun der linken Seite von 2.43 zu und berechnen das Volumnsintegral. Dazu benötigen wir die Divergenz des Feldes  $\vec{F}$ , von der wir bereits gezeigt haben (2.18), dass sie verschwindet:

$$\operatorname{div} \vec{F} = -\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0.$$

Damit verschwindet auch das Integral

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = 0,$$

und der Gauß'sche Satz stimmt damit scheinbar nicht?! Was wir in unserer Rechnung falsch gemacht haben ist, dass die Divergenz nur für alle  $r \neq 0$  verschwindet, aber im Punkt  $r = 0$  ist das Feld  $F_i(x_1, x_2, x_3)$  nicht stetig differenzierbar, weil  $r = 0$  ein singulärer Punkt des Feldes ist. Um den Satz von Gauß trotzdem anwenden zu können, müssen wir den Punkt  $r = 0$  also aus dem betrachteten Volumen herausnehmen, zum Beispiel indem wir ein kugelförmiges Loch um den Ursprung mit dem Radius  $\epsilon$  aus der Kugel herausschneiden. Dieses neue Gebiet  $V'$  hat nun 2 Randflächen, nämlich die innere Kugelschale  $K_\epsilon$  mit dem Radius  $\epsilon$  und die äußere Kugelschale  $K_R$  mit dem Radius  $R$ , und der Satz von Gauß nimmt folgende Gestalt an:

$$\int_{V'} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_{K_\epsilon} F_i dA_i + \int_{K_R} F_i dA_i = -4\pi + 4\pi = 0.$$

Die linke Seite ist nun tatsächlich 0, und für die rechte Seite ist zu beachten, dass der Normalvektor im Bezug auf das betrachtete Volumen nach außen gerichtet ist, also für die innere Kugelschale zum Ursprung bzw. für die äußere Kugelschale vom Ursprung weg zeigt. Somit ist die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes wieder hergestellt!

### 2.2.1 Beweis des Gauß'schen Integralsatzes

Wir wollen den Beweis von Gleichung 2.43 hier nur skizzieren. Zunächst bemerken wir, dass die zentrale Aussage des Gauß'schen Satzes eine Bilanzgleichung ist: Was hinein geht, kommt auch wieder hinaus. Wenn wir ein betrachtetes Volumen  $V$  in zwei Teilvolumina  $V_1$  und  $V_2$  mit der gemeinsamen Trennfläche  $A$  zerlegen, so trägt diese gemeinsame Fläche  $A$  nichts zum Fluss durch die Berandung von  $V$  bei, weil der Fluss, der von  $V_1$  nach  $V_2$  geht, gleich dem negativen Fluss in umgekehrter Richtung ist (die Normalenvektoren zeigen ja immer vom Volumen nach außen). Damit können wir jedes betrachtete Volumen in beliebig viele kleinere Teilvolumina zerlegen.

Wir zeigen den Satz von Gauß daher hier nur für ein quaderförmiges Volumen  $V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ . Der Mittelpunkt dieses Quaders habe die Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$ . Das Integral über den Rand des Quaders setzt sich somit aus den 6 Begrenzungsflächen des Quaders zusammen, das wir für kleine Größen  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$  folgendermaßen annähern können

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} \approx \sum_{i=1}^6 \vec{F} \cdot \Delta\vec{A}^i.$$

Die 6 Flächen  $\Delta\vec{A}^i$  sind dabei

$$\begin{aligned} \Delta\vec{A}^1 &= \Delta x_2 \Delta x_3 \vec{e}^1 & \Delta\vec{A}^2 &= \Delta x_2 \Delta x_3 (-\vec{e}^1) \\ \Delta\vec{A}^3 &= \Delta x_1 \Delta x_3 \vec{e}^2 & \Delta\vec{A}^4 &= \Delta x_1 \Delta x_3 (-\vec{e}^2) \\ \Delta\vec{A}^5 &= \Delta x_1 \Delta x_2 \vec{e}^3 & \Delta\vec{A}^6 &= \Delta x_1 \Delta x_2 (-\vec{e}^3) \end{aligned}$$

Den Wert des Feldes  $F_i$  an den Flächenmitten dieser Quaderflächen erhalten wir aus einer Taylorreihenentwicklung, um den Punkt  $(x_1, x_2, x_3)$  im Mittelpunkt des Quaders, wobei wir nur den linearen Term berücksichtigen

$$\begin{aligned} F_1(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) &= F_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{2} + \dots \\ F_1(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) &= F_1(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{2} + \dots \\ F_2(x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3) &= F_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \frac{\Delta x_2}{2} + \dots \\ F_2(x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3) &= F_2(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \frac{\Delta x_2}{2} + \dots \\ F_3(x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}) &= F_3(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\Delta x_3}{2} + \dots \\ F_3(x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}) &= F_3(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\Delta x_3}{2} + \dots \end{aligned}$$

Setzen wir diese Taylorentwicklungen zusammen mit den Darstellungen der Flächenvektoren ein, so erhalten wir für das Integral über die Quaderflächen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \vec{F} \cdot \Delta \vec{A}^i &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \\ &= (\operatorname{div} \vec{F}) \Delta V. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für das betrachtete Quadervolumen gezeigt. Da wir uns ein beliebig geformtes Volumen aus lauter kleinen Quadern zusammengesetzt denken können, gilt der Gauß'sche Satz auch für beliebig geformte Volumina. Für einen genaueren Beweis sei auf die mathematische Literatur verwiesen (siehe Buch Lang, Pucker bzw. Referenzen darin).

## 2.2.2 Weitere Anwendungen des Gauß'schen Integralsatzes

**Beispiel 1.** Wir verifizieren den Gauß'schen Satz in der Form 2.43 für das Vektorfeld  $F_i = x_i$ , wenn  $V$  das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$ , und  $c$  bedeutet, dessen Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt.

Wir werten zunächst das Volumintegral auf der linken Seite von 2.43 aus. Mit  $\partial_i A_i = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3$  erhalten wir

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = 3 \int_V dV = 3abc.$$

Das Flächenintegral auf der rechten Seite von 2.43 zerlegen wir in insgesamt 6 Teilintegrale über die Begrenzungsflächen des Quaders

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left(-\frac{c}{2}\right) (-1) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left(+\frac{c}{2}\right) (+1) \\ &+ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \left(-\frac{b}{2}\right) (-1) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \left(+\frac{b}{2}\right) (+1) \\ &+ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \left(-\frac{a}{2}\right) (-1) + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \left(+\frac{a}{2}\right) (+1) \\ &= 3abc. \end{aligned} \tag{2.44}$$

**Beispiel 2.** Eine Anwendung des Gauß'schen Satzes in der Form 2.40 findet sich in dem Beweis des *archimedischen Prinzips*. Das archimedische Prinzip wurde vor über 2000 Jahren von dem griechischen Gelehrten Archimedes formuliert, und lautet bekanntermaßen: Der statische Auftrieb eines Körpers in einem Medium ist genauso groß wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Mediums.

Die gesamte Auftriebskraft  $\vec{F}$  kann dadurch erklärt werden, indem wir die durch den hydrostatischen Druck  $p$  verursachten Kräfte  $d\vec{F}$  über die Berandung  $\partial V$  des eingetauchten Körpers aufsummieren:

$$\vec{F} = - \oint_{\partial V} p d\vec{A}.$$

Das Minuszeichen rührt daher, dass die Kraft  $d\vec{F} = -p d\vec{A}$  ja nach "innen" wirkt, während die Flächennormale  $d\vec{A}$  definitionsgemäß nach "außen" weist. Nach dem Gauß'schen Satz kann das Integral über den Rand des Volumens  $\partial V$  übergeführt werden in ein Volumsintegral über das Volumen  $V$ :

$$\vec{F} = - \int_V \text{grad } p dV = - \int_V \text{grad } (\rho g z) dV = -\rho g \vec{e}^3 \int_V dV = -\rho V g \vec{e}^3.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass der hydrostatische Druck (für inkompressible Flüssigkeiten) linear mit der Tiefe  $z$  ansteigt, also  $p(z) = \rho g z$ , wobei  $\rho$  die Dichte, und  $g$  die Erdbeschleunigung darstellt. Das Ergebnis  $\vec{F} = -\rho V g \vec{e}^3$  spiegelt somit genau das Archimedische Prinzip wider, wobei das negative Vorzeichen, die nach oben gerichtete Kraft angibt (positive  $z$  Richtung nach unten gewählt).

Aus dieser Herleitung sehen wir also, dass das archimedische Prinzip streng genommen nur gilt, wenn der Druck *linear* mit der Tiefe zunimmt. An Luft gilt etwa die barometrische Höhenformel  $p(z) = p(0)e^{-\frac{z}{z_s}}$ , und somit das archimedische Prinzip nur näherungsweise. Allerdings in sehr guter Näherung, weil die charakteristische Länge  $z_s = \frac{RT}{Mg}$  (Gaskonstante  $R$ , absolute Temperatur  $T$ , molare Gasmasse  $M$ , und Erdbeschleunigung  $g$ ) mit  $z_s \approx 8.4$  km deutlich größer ist, als typische Objekte, deren Auftrieb uns interessieren könnte ...

**Beispiel 3.** Wir betrachten eine homogene, kugelförmige Massenverteilung mit der Gesamtmasse  $M$  und der Dichte  $\rho(r)$  in der Form

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Wir zeigen mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass auf eine Masse  $m$  im Abstand  $r$  vom Zentrum der Massenverteilung die Gravitationskraft  $\vec{F} = m \vec{g}$  wirkt, wobei ( $G$  ist die Gravitationskonstante)

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -GM \frac{\vec{r}}{R^3}, & r \leq R \\ -GM \frac{\vec{r}}{r^3}, & r > R. \end{cases}$$

Wir berechnen zunächst die Divergenz des Kraftfeldes zu (vgl. 2.18)

$$\text{div } \vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -GM \frac{3}{R^3} = -4\pi G \rho_0, & r \leq R \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Wählen wir als Integrationsbereich  $V$  eine Kugel mit dem Radius  $r$ , dann liefert das Volumsintegral

$$\int_V \operatorname{div} \vec{g} \, dV = \begin{cases} -4\pi GM \frac{r^3}{R^3} = -4\pi G\tilde{M}(r), & r \leq R \\ -4\pi GM, & r > R. \end{cases}$$

Das Integral liefert also die in der Kugelschale eingeschlossene Masse als Quelle des Feldes.<sup>4</sup> Für  $r > R$  ist das die Gesamtmasse  $M$ , während für  $r \leq R$  die Masse  $\tilde{M}(r) = M \frac{r^3}{R^3}$  entsprechend des Verhältnisses  $\frac{r^3}{R^3}$  relevant ist. Das negative Vorzeichen drückt aus, dass es sich um eine anziehende Kraft handelt, das heißt die Feldlinien verlaufen in Richtung der Masse. Für die Auswertung des Flächenintegrals über die Kugelschale  $\partial V$  mit dem Radius  $r$  berücksichtigen wir, dass aufgrund der Kugelsymmetrie und der anziehenden Natur der Gravitation, die Gravitationsbeschleunigung eine Zentralkraft ist, also in der Form  $\vec{g}(\vec{r}) = -g(r)\frac{\vec{r}}{r}$  geschrieben werden kann. Damit liefert der Gauß'sche Satz:

$$\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} -4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM \frac{r^3}{R^3}, & r \leq R \\ -4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM, & r > R, \end{cases}$$

womit wir unsere ursprüngliche Annahme bewiesen haben

$$g(r) = \begin{cases} GM \frac{r}{R^3}, & r \leq R \\ GM \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

### 2.2.3 Modifikationen des Gauß'schen Satzes

Ersetzen wir im Gauß'schen Satz 2.43 das Vektorfeld  $\vec{F}$  durch das Produkt  $\vec{F} = \vec{a}\Phi$ , wobei  $\vec{a}$  ein beliebiger aber *konstanter* Vektor (ungleich dem Nullvektor) ist, und  $\Phi$  ein skalares Feld darstellt, dann erhalten wir mit  $\operatorname{div}(\vec{a}\Phi) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\Phi$  (vgl. 2.28)

$$\vec{a} \cdot \left[ \int_V \vec{\nabla}\Phi \, dV - \oint_{\partial V} \Phi d\vec{A} \right] = 0.$$

Und da der Vektor  $\vec{a}$  beliebig war, muss jede Komponente des Vektors in eckigen Klammern verschwinden, also

$$\int_V \vec{\nabla}\Phi \, dV = \oint_{\partial V} \Phi d\vec{A}. \quad (2.45)$$

Analog dazu können wir für das Vektorfeld  $\vec{F}$  im Gauß'schen Satz 2.43 auch folgende Form wählen:  $\vec{F} = \vec{B} \times \vec{a}$ . Hierbei ist  $\vec{a}$  wiederum ein beliebiger aber *konstanter* Vektor (ungleich dem Nullvektor),

<sup>4</sup>Bis auf eine numerische Konstante  $4\pi G$ , deren Wahl im Prinzip willkürlich ist und historisch so entstanden ist.

und  $\vec{B}$  ein Vektorfeld. Mit 2.30 erhalten wir

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \times \vec{a} dV = \vec{a} \cdot \int_V \operatorname{rot} \vec{B} dV$$

und

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial V} (\vec{B} \times \vec{a}) \cdot d\vec{A} = \vec{a} \cdot \oint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{B}.$$

Weil der Vektor  $\vec{a}$  beliebig war, muss also gelten:

$$\int_V \operatorname{rot} \vec{B} dV = \oint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{B} \quad (2.46)$$

Ein weiterer Integralsatz kann aus dem Gauß'schen Satz abgeleitet werden. Dazu betrachten wir zwei zumindest zweimal differenzierbare skalare Felder  $u$  und  $v$ . Wir berechnen zunächst

$$\vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} v) = \partial_i (u \partial_i v) = (\partial_i u) (\partial_i v) + u \partial_i \partial_i v = (\vec{\nabla} u) (\vec{\nabla} v) + u \Delta v$$

bzw.

$$\vec{\nabla} \cdot (v \vec{\nabla} u) = \partial_i (v \partial_i u) = (\partial_i v) (\partial_i u) + v \partial_i \partial_i u = (\vec{\nabla} v) (\vec{\nabla} u) + v \Delta u.$$

Die Subtraktion dieser Gleichungen liefert

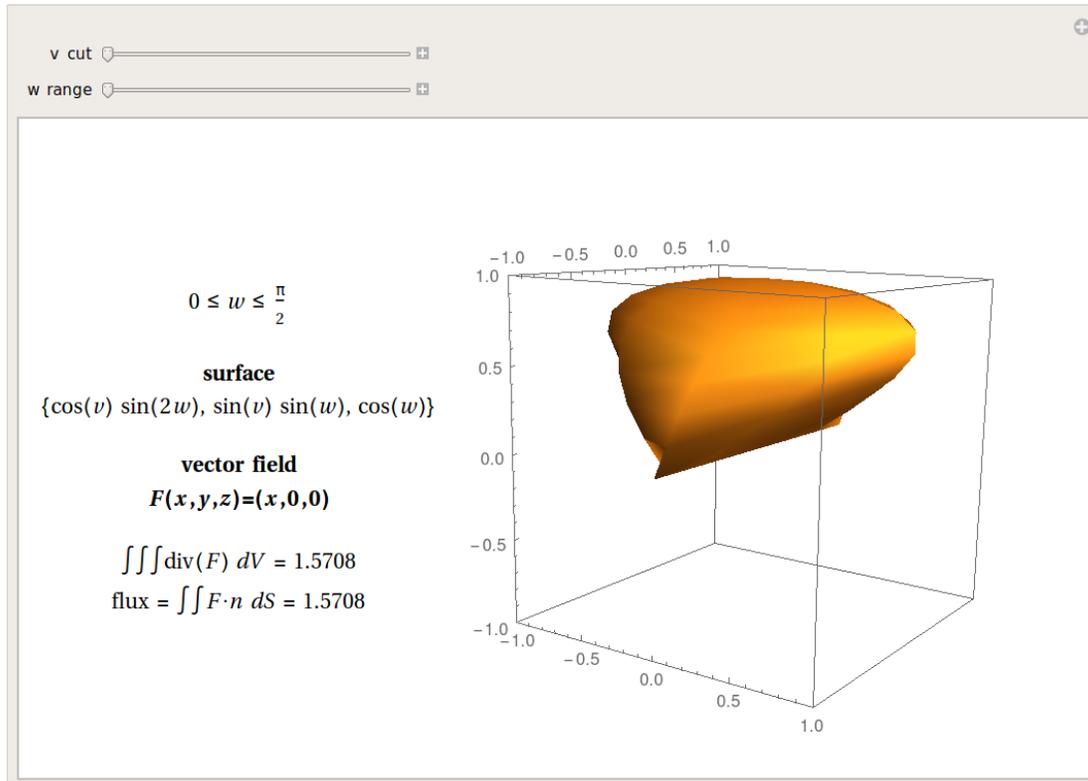
$$\vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) = u \Delta v - v \Delta u.$$

Einsetzen dieser Beziehung in den Gauß'schen Satz 2.43 führt auf die folgende Gleichung, die auch als *Integralsatz von Green* bezeichnet wird.

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \oint_{\partial V} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{A} \quad (2.47)$$

**CDF 3. Der Satz von Gauß** [TheDivergenceGaussTheorem.cdf](#)

This educational Demonstration presents a surface whose parametric equations are very similar to those of the unit sphere (but differ by a factor of 2 in  $\sin(2w)$ ). The divergence (Gauss) theorem holds for the initial settings, but fails when you increase the range value because the surface is no longer closed on the bottom. It becomes closed again for the terminal range value, but the divergence theorem fails again because the surface is no longer simple, which you can easily check by applying a cut.



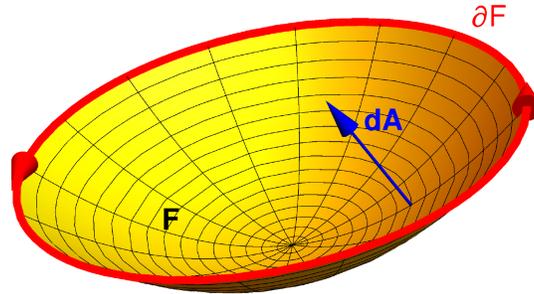
## 2.3 Der Satz von Stokes

Der Integralsatz von Stokes stellt einen Zusammenhang zwischen einem Flächenintegral über eine Fläche  $F$  und einem Kurvenintegral längs der geschlossenen Kurve  $\partial F$  dar, die den Rand der Fläche bildet. Für ein skalares Feld  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  lautet der Stokes'sche Satz in seiner allgemeinsten Form

$$\int_F \varepsilon_{ijk} dA_j \partial_k \Phi = \oint_{\partial F} \Phi dx_i \quad (2.48)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass das skalare Feld  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  eine im Integrationsgebiet stetig differenzierbare Funktion darstellt. Der Umlaufsinn der Integration entlang der Kurve  $\partial F$  und die Orientie-

zung des Flächenelement  $d\vec{A}$  ist so festzulegen, dass sie zusammen die Bewegung einer Rechts-schraube ergeben.



Ersetzen wir in 2.48 das skalare Feld  $\Phi$  durch die Koordinate  $B_i$  eines Vektorfeldes  $\vec{B}(x_1, x_2, x_3)$ , dann erhalten wir eine Variante des Stokes'schen Satzes, die in der Physik am häufigsten vorkommt.

$$\int_F \varepsilon_{ijk} dA_j \partial_k B_i = \oint_{\partial F} B_i dx_i$$

In symbolsicher Schreibweise lautet diese Gleichung also

$$\int_F (d\vec{A} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} = \oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{x},$$

die wir wegen  $(d\vec{A} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} = d\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$  auch in folgender Form schreiben können:

$$\int_F d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = \oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{x} \quad (\text{Satz von Stokes}) \quad (2.49)$$

Mithilfe des Satzes von Stokes können wir auch eine bereits bekannte Tatsache in einem anderen Licht betrachten: Das Wegintegral eines Vektorfeldes  $\vec{B}$  über einen geschlossenen Weg verschwindet, falls das Vektorfeld  $\vec{B}$  wirbelfrei ist ( $\text{rot } \vec{B} = 0$ ). Und das bedeutet ja nichts anderes als, dass das Feld  $\vec{B}$  konservativ ist (vgl. Kapitel 2.1.6)

**Beispiel.** Wir verifizieren den Stokes'schen Satz in der Form 2.49 für das Vektorfeld  $B_i = (-2x_2, 3x_1, 0)$  für eine Fläche  $F$ , die ein Rechteck in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  darstellt.

Wir berechnen zunächst das linke Integral über die Fläche. Das Flächenelement lautet  $d\vec{A} = dx_1 dx_2 \vec{e}_3$ , und für die Rotation des Feldes finden wir den konstanten Term  $\text{rot } \vec{B} = 5\vec{e}_3$ . Damit ergibt die Integration über die das Rechteck ganz einfach zu

$$\int_F d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = 5 \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 = 5ab.$$

Das Wegintegral über den Rand des Rechtecks zerlegen wir in 4 Teilstrecken  $C_1$  bis  $C_4$ , die wir einzeln berechnen müssen:

$$\begin{aligned}
 C_1 : x_i &= (at, 0, 0), & dx_i &= (a, 0, 0)dt, & B_i dx_i &= -2x_2adt, & \int_0^1 0 dt &= 0 \\
 C_2 : x_i &= (a, bt, 0), & dx_i &= (0, b, 0)dt, & B_i dx_i &= 3x_1bdt, & \int_0^1 3ab dt &= 3ab \\
 C_3 : x_i &= (a - at, b, 0), & dx_i &= (-a, 0, 0)dt, & B_i dx_i &= -2x_2adt, & \int_0^1 2ab dt &= 2ab \\
 C_4 : x_i &= (0, b - bt, 0), & dx_i &= (0, -b, 0)dt, & B_i dx_i &= -3x_1bdt, & \int_0^1 0 dt &= 0
 \end{aligned}$$

Und somit haben wir den Stokes'schen Satz für dieses Beispiel verifiziert:

$$\oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{x} = 0 + 3ab + 2ab + 0 = 5ab.$$

### 2.3.1 Beweisführung zum Satz von Stokes

Wir wollen den Satz von Stokes in seiner allgemeinen Form 2.48 beweisen

$$\int_F \varepsilon_{ijk} dA_j \partial_k \Phi = \oint_{\partial F} \Phi dx_i. \quad (2.50)$$

Dazu führen wir das Flächenintegral und das Linienintegral in obiger Gleichung auf gewöhnliche einfache Integrale zurück und zeigen deren Gleichheit.

Die Fläche  $F$  sei gegeben durch die Parameterdarstellung  $x_i = x_i(u, v)$  gegeben, wodurch das Flächenelement wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$dA_j = \varepsilon_{j pq} \frac{\partial x_p}{\partial u} \frac{\partial x_q}{\partial v} du dv.$$

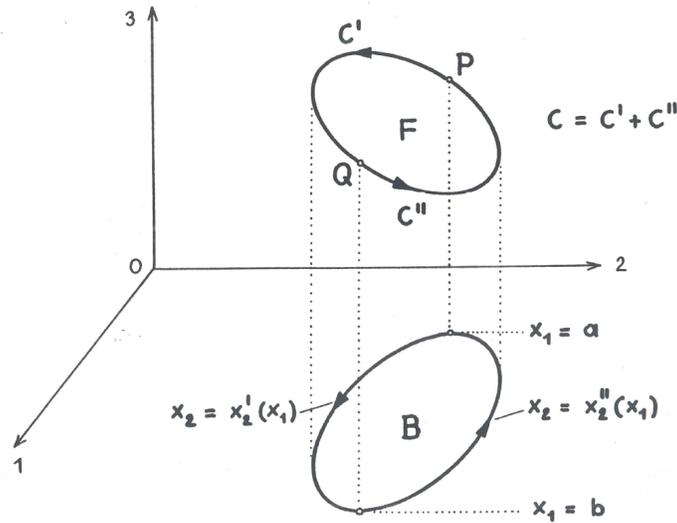
Nach Einsetzen in das Integral und Überschiebung der  $\varepsilon$ -Tensoren  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jpq} = \delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip}$  erhalten wir für die Koordinate  $S_i$  des Integrals

$$S_i = \int_F du dv \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_q} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_q}{\partial v} \right]$$

Unter Beachtung der Kettenregel können wir diesen Ausdruck noch vereinfachen

$$S_i = \int_F du dv \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial u} \right].$$

Für die weitere Rechnung der Koordinaten  $S_i$  verwenden wir nun verschiedene Parameterdarstellung der Fläche  $F$ . Für  $S_1$  (also  $i = 1$ ) zum Beispiel wählen wir  $u = x_1$ ,  $v = x_2$ , so dass die Fläche  $F$  durch  $x_3(x_1, x_2)$  dargestellt wird, wie in der Abbildung unten skizziert.



Damit gilt dann  $\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0$  und  $\frac{\partial x_1}{\partial u} = 1$ , und die Koordinate  $S_1$  vereinfacht sich zu

$$S_1 = - \iint_B dx_1 dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2)). \quad (2.51)$$

Der Integrationsbereich  $B$  ist also jetzt die Normalprojektion der Fläche  $F$  auf die  $(x_1, x_2)$ -Ebene, wie in der Skizze angedeutet. Wir setzen hier voraus, dass diese Projektion eine umkehrbar eindeutige Abbildung von  $F$  auf  $B$  ergibt.

Nun denken wir uns die geschlossene Kurve  $C \equiv \partial F$  aus zwei Kurvenstücken  $C'$  und  $C''$  zusammengesetzt.  $C'$  sei das Kurvenstück  $P \rightarrow Q$  und  $C''$  das Kurvenstück  $Q \rightarrow P$ .  $P$  und  $Q$  sind diejenigen Punkte der Randkurve, deren Koordinaten den kleinsten ( $x_1 = a$ ) bzw. den größten Wert ( $x_1 = b$ ) besitzt. Die Parameterdarstellung der Kurvenstücke  $C'$  und  $C''$  sei nun:

$$C' : \vec{r}(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2'(x_1) \\ x_3'(x_1) \end{pmatrix}, \quad C'' : \vec{r}(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2''(x_1) \\ x_3''(x_1) \end{pmatrix},$$

Wir führen jetzt die Integration über  $x_2$  in 2.51 aus

$$\begin{aligned} S_1 &= - \int_a^b dx_1 \left[ \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2)) \right] = - \int_a^b dx_1 \Phi(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2)) \Big|_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} \\ &= \int_a^b dx_1 \Phi(x_1, x_2''(x_1), x_3(x_1, x_2''(x_1))) - \int_a^b dx_1 \Phi(x_1, x_2'(x_1), x_3(x_1, x_2'(x_1))) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Wir wenden uns nun dem Linienintegral auf der rechten Seite von 2.50 und berechnen ebenfalls die 1. Koordinate  $L_1$

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \oint_{\partial F} \Phi dx_1 = \int_{C'} \Phi dx_1 + \int_{C''} \Phi dx_1 \\
 &= \int_a^b dx_1 \Phi(x_1, x'_2(x_1), x'_3(x_1)) + \int_b^a dx_1 \Phi(x_1, x''_2(x_1), x''_3(x_1)) \\
 &= \int_a^b dx_1 \Phi(x_1, x'_2(x_1), x'_3(x_1)) - \int_a^b dx_1 \Phi(x_1, x''_2(x_1), x''_3(x_1)) \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

Weil die Parameterdarstellung der Kurven  $C'$  und  $C''$ , also  $(x_1, x'_2(x_1), x'_3(x_1))$  bzw.  $(x_1, x''_2(x_1), x''_3(x_1))$  entlang der Berandung  $\partial F$  mit der Parameterdarstellung der Fläche  $F$ , also  $(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2))$ , übereinstimmen müssen, sind die Ausdrücke für  $S_1$  und  $L_1$  in Gleichungen 2.52 gleich 2.53 identisch.

Damit haben wir den Satz von Stokes für die 1. Koordinate gezeigt:  $S_1 = L_1$ . Ganz analog können wir auch zeigen, dass  $S_2 = L_2$  und  $S_3 = L_3$  gilt. Um  $S_2 = L_2$  zu zeigen, wählen wir für die Parameterdarstellung der Fläche  $F$   $x_2$  und  $x_3$  als Parameter, die Kurvenstücke  $C'$  und  $C''$  parametrisiert man mit  $x_2$ . Und für den Beweis von  $S_3 = L_3$  wählen wir  $x_3$  und  $x_1$  als Parameter für die Fläche  $F$  und parametrisieren die Kurvenstücke  $C'$  und  $C''$  mit  $x_3$ .

In dem obigen Beweis können wir das skalare Feld  $\Phi$  auch durch ein beliebige Koordinate eines Vektorfeldes  $B_m$  oder eines Tensorfeldes  $T_{pq}$  austauschen. Somit ist der Satz von Stokes auch in der Form 2.49 bewiesen.

### 2.3.2 Anwendungen des Stokes'schen Satzes

**Beispiel.** Wir überprüfen die Gültigkeit des Stokes'schen Satzes 2.49 für das Vektorfeld  $B_i = (3x_2, -x_1x_3, x_2x_3^2)$  und für die Fläche  $F$  gebildet aus dem Paraboloid  $x_3(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$  für  $0 \leq x_3 \leq 2$ .

Wir berechnen zunächst das Integral über den Rand  $\partial F$ , der durch den Kreis  $x_i(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  gegeben ist. Damit erhalten wir

$$\oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} B_i(\vec{x}(t)) \dot{x}_i(t) dt = \int_0^{2\pi} (-12 \sin^2 t - 8 \cos^2 t) dt = -20\pi.$$

Nun bestimmen wir das Flächenintegral, wobei zu beachten ist, dass mit unserer Wahl des Umlaufsinnens der Wegintegration (nämlich gegen den Uhrzeigersinn), der Normalvektor nach "oben" (in die positive  $x_3$ -Richtung) weisen muss. Als Parameterdarstellung wählen wir Zylinderkoordinaten

$x_1 = \rho \cos \phi$ ,  $x_2 = \rho \sin \phi$ , und  $x_3 = x_3$  wodurch die Fläche  $F$  gegeben ist durch

$$x_i(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ \frac{1}{2}\rho^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ \rho \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für das Flächenelement  $d\vec{A}$ , und berechnen für die Rotation von  $\vec{B}$  folgende Ausdrücke

$$dA_i = \begin{pmatrix} -\rho \cos \phi \\ -\rho \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} \rho d\rho d\phi, \quad \left\{ \text{rot } \vec{B} \right\}_i = \begin{pmatrix} x_1 + x_3^2 \\ 0 \\ -3 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi + \frac{\rho^4}{4} \\ 0 \\ -3 - \frac{\rho^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen schließlich

$$\int_F d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 \rho d\rho \left[ -\rho^2 \cos^2 \phi - \frac{\rho^5}{4} \cos \phi - 3 - \frac{\rho^2}{2} \right] = -4\pi - 0 - 12\pi - 4\pi = -20\pi.$$

**Beispiel.** Die magnetische Feldstärke eines geraden, in  $x_3$ -Richtung orientierten, und mit dem Strom  $I$  durchflossenen Leiter ist gegeben durch

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)} (-x_2 \vec{e}^1 + x_1 \vec{e}^2) = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}^\phi.$$

Hierbei wurden für die erste Darstellung kartesische Koordinaten, und für die zweite Zylinderkoordinaten mit  $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$  und  $\vec{e}^\phi = -\sin \phi \vec{e}^1 + \cos \phi \vec{e}^2$  verwendet. Wir werten den Satz von Stokes für eine Kreisscheibe mit dem Radius  $R$  aus, und berechnen zunächst das Wegintegral über den Kreis  $\partial F$

$$x_i(\phi) = R(\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad \frac{dx_i}{d\phi} = R(-\sin \phi, \cos \phi, 0),$$

und erhalten

$$\oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{I}{2\pi R} R = I.$$

Nun berechnen wir die Rotation des Feldes

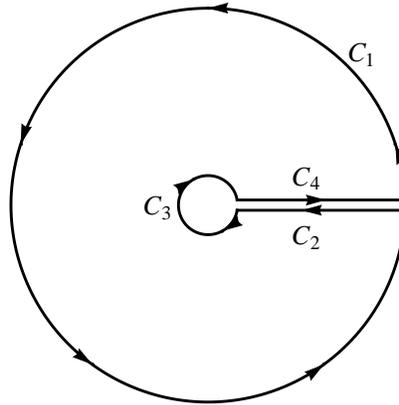
$$\left\{ \text{rot } \vec{B} \right\}_i = \frac{I}{2\pi} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x_1^2+x_2^2-2x_1^2}{x_1^2+x_2^2} + \frac{x_1^2+x_2^2-2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Mit dem Verschwinden der Rotation wird auch das Integral

$$\int_F d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = 0$$

und der Satz von Stokes gilt scheinbar nicht? Wie schon in Kapitel 2.2.2 für den Gauß'schen Satz gezeigt, hat auch dieser scheinbare Widerspruch mit der Tatsache zu tun, dass das Feld  $\vec{H}$  für  $\rho \rightarrow 0$  divergiert. Damit ist die Rotation im Punkt  $\rho = 0$  nicht definiert<sup>5</sup> und der Punkt  $\rho = 0$  muss bei der Anwendung des Stokes'schen Satzes ausgespart werden. Das Ergebnis 2.54 gilt also nur für  $\rho \neq 0$ .

Um den Satz von Stokes auf dieses Problem anwenden zu können, wählen wir als Fläche  $F'$  eine Kreisscheibe mit dem Radius  $R$  mit einem Loch in der Mitte mit dem Radius  $\epsilon$  (siehe Abbildung unten). Innerhalb dieser Fläche ist die Rotation identisch null und das Integral  $\int_{F'} d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = 0$  verschwindet. Um das entsprechende Wegintegral entlang der Berandung von  $F'$  berechnen zu können, müssen wir die Kreisscheibe entlang der Achse "aufschneiden" und den Weg entlang der 4 Kurven  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , und  $C_4$  berechnen.



$$\begin{aligned} \oint_{\partial F'} \vec{H} \cdot d\vec{x} &= \int_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{x} + \int_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{x} + \int_{C_3} \vec{H} \cdot d\vec{x} + \int_{C_4} \vec{H} \cdot d\vec{x} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \frac{I}{2\pi R} R + \int_R^\epsilon dx_1 \frac{I \cdot 0}{2\pi x_1^2} + \int_{2\pi}^0 d\phi \frac{I}{2\pi \epsilon} \epsilon - \int_\epsilon^R dx_1 \frac{I \cdot 0}{2\pi x_1^2} \\ &= I + 0 - I + 0 = 0. \end{aligned} \tag{2.55}$$

### 2.3.3 Der Integralsatz von Green in der Ebene

Einen wichtigen Spezialfall des Satzes von Stokes erhält man, indem man eine Kurve betrachtet, die völlig in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene liegt. Dann kann auch die eingeschlossene Fläche in dieser Ebene gewählt

<sup>5</sup>Später werden Sie dann lernen, dass man mithilfe der Dirac'schen Deltadistribution auch für  $\rho = 0$  die Rotation angeben kann.

werden, und man erhält folgenden Integralsatz für den (je nach Quelle) verschiedene Bezeichnungen in Verwendung sind: Satz von Green-Riemann, Satz von Green-Gauß, Satz von Green in der Ebene, Satz von Stokes in der Ebene, oder Satz von Gauß in der Ebene.

Sei  $C = \partial F$  eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in der Ebene, die mathematisch positiv durchlaufen wird und einen Bereich  $F$  begrenzt, dann gilt für die stetig differenzierbaren Funktionen  $f(x_1, x_2)$  und  $g(x_1, x_2)$ :

$$\oint_C (f dx_1 + g dx_2) = \iint_F \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.56)$$

Dass 2.56 ein Spezialfall des allgemeineren Stokes'schen Satzes 2.49 darstellt, sehen wir ganz einfach, indem wir für das Vektorfeld in 2.49 ansetzen

$$B_i = (f(x_1, x_2), g(x_1, x_2), 0).$$

Damit wird

$$\left\{ \text{rot } \vec{B} \right\}_i = \left( 0, 0, \frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \quad dA_i = (0, 0, dx_1 dx_2), \quad \vec{B} \cdot \vec{x} = f dx_1 + g dx_2,$$

und die Gleichung 2.56 ist somit bewiesen.

Der Satz von Green in der Ebene kann beispielsweise dazu benutzt werden um Flächeninhalte zu berechnen. Wählen wir die Funktionen  $f$  und  $g$  zu  $f(x_1, x_2) = -x_2$  und  $g(x_1, x_2) = x_1$ , erhalten wir aus 2.56

$$\oint_C (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) = \iint_F 2 dx_1 dx_2 = 2A_F.$$

Somit können wir den Flächeninhalt  $A_F$  eines Bereiches  $F$  aus dem Linienintegral über den Rand der Fläche erhalten. Dieser Sachverhalt wird auch als *Sektorformel* bezeichnet:

$$A_F = \frac{1}{2} \oint_{\partial F} (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) \quad (2.57)$$

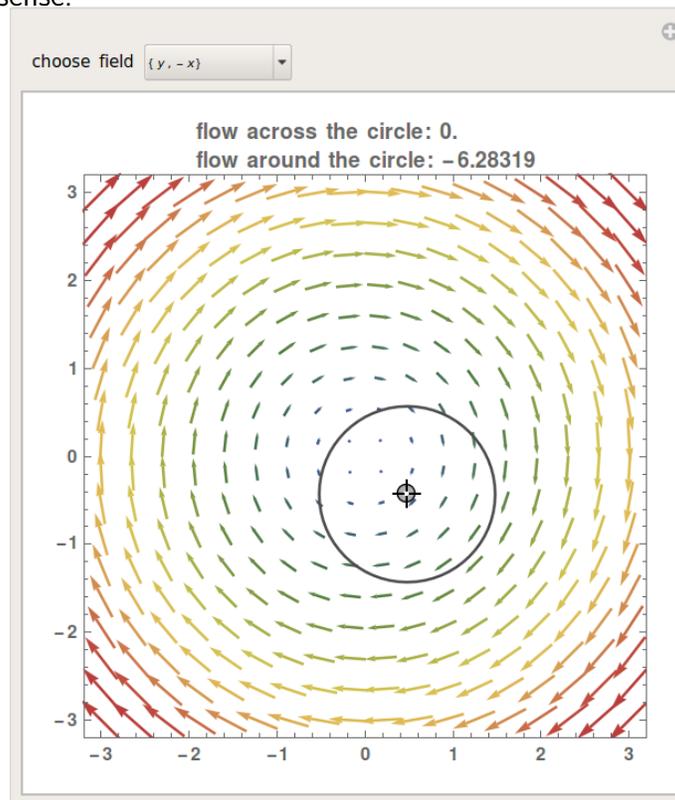
**Beispiel.** Mit der Sektorformel 2.57 wollen wir den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  berechnen. Begrenzt wird diese von der Kurve  $C : x_1 = a \cos t, x_2 = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ . Man

erhält also mit  $dx_1 = -a \sin t$  und  $dx_2 = b \cos t$  für den Flächeninhalt  $A$  der Ellipse:

$$\begin{aligned} A_F &= \frac{1}{2} \oint_{\partial F} (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = ab\pi. \end{aligned}$$

**CDF 4. Der Satz von Stokes** [VectorFieldFlowThroughAndAroundACircle.cdf](#)

The vector flow across a circle depends on the divergence of the given field: it is always zero when there are no sinks, sources, or singularities. Similarly, the vector flow around the circle depends on rotation (or curl). Here the circle is taken as parametrized in the counterclockwise sense.



# Kapitel 3

## Krummlinige Koordinatensysteme

Wir haben unseren bisherigen Untersuchungen kartesische Koordinatensysteme zugrunde gelegt. Wie wir bereits wissen, gibt es aber noch andere Koordinatensysteme, die man unter Umständen mit Vorteil an Stelle der rechtwinkligen kartesischen Koordinaten zur Darstellung geometrischer oder physikalischer Beziehungen verwenden wird. Es sind dies insbesondere zum Beispiel Zylinder- und Kugelkoordinaten. Es gibt aber noch eine Reihe weitere Koordinatensysteme, die man allgemein in orthogonale und nicht-orthogonale unterteilen kann. Wir werden uns in diesem Kapitel den so genannten orthogonalen krummlinigen Koordinatensystemen widmen, und insbesondere ableiten, welche Gestalt die in den vorangegangenen Kapiteln besprochenen Größen wie Gradient, Divergenz, Rotation in solchen Koordinatensystemen annehmen.

### 3.1 Gebräuchliche Koordinatensysteme

Hier wollen wir kurz die zwei gebräuchlichsten Koordinatensysteme, nämlich die Zylinderkoordinaten und die Kugelkoordinaten, definieren.

#### 3.1.1 Zylinderkoordinaten

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , und  $x_3 = z$ . Die Koordinaten eines Punktes (Ortsvektor) seien Funktionen von drei unabhängigen Parametern, die wir mit  $\rho$ ,  $\varphi$ , und  $z$  bezeichnen:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \tag{3.1}$$

Lösen wir die Gleichungen 3.1 nach  $\rho$ ,  $\varphi$ , und  $z$  auf, so erhalten wir  $\rho$ ,  $\varphi$ , und  $z$  als Funktion der kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$ , und  $z$ .

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z \quad (3.2)$$

Die Gleichungen 3.1 und 3.2 besagen, dass jedem Zahlentripel  $\rho, \varphi, z$  in eindeutiger Weise ein Zahlentripel  $x, y, z$  zugeordnet ist und umgekehrt. Hierzu gelten folgende Bereiche  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , und  $-\infty < z < \infty$ . Die drei Parameter  $\rho, \varphi, z$  dienen uns also wie die kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  zur Festlegung der Punkte des Raumes. Je drei Zahlen  $\rho, \varphi, z$  bestimmen eindeutig einen Punkt  $P$ , und umgekehrt, jeder Punkt  $P$  eindeutig drei Zahlen  $\rho, \varphi, z$ , die wir als *Zylinderkoordinaten des Punktes*  $P$  bezeichnen.

**Koordinatenlinien.** Halten wir jeweils zwei der drei Zylinderkoordinaten fest, so erhalten wir die drei *Koordinatenlinien*  $\vec{x}^\rho$ ,  $\vec{x}^\varphi$ , und  $\vec{x}^z$ , die wir geometrisch in folgender Weise interpretieren können:

- **$\rho$ -Linien:** Halbstrahlen senkrecht von der  $z$ -Achse weg ( $\vec{x}^\rho(\rho, \varphi = \varphi_0, z = z_0)$ )
- **$\varphi$ -Linien:** Kreise um die  $z$ -Achse ( $\vec{x}^\varphi(\rho = \rho_0, \varphi, z = z_0)$ )
- **$z$ -Linien:** Geraden parallel zur  $z$ -Achse ( $\vec{x}^z(\rho = \rho_0, \varphi_0, z)$ )

Die Tangentenvektoren  $\vec{\tau}^\rho$ ,  $\vec{\tau}^\varphi$ , und  $\vec{\tau}^z$  und die dazugehörigen Einheitsvektoren  $\vec{e}^\rho$ ,  $\vec{e}^\varphi$ , und  $\vec{e}^z$  lauten

$$\vec{\tau}^\rho = \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \varphi \vec{e}^y \quad (3.3)$$

$$\vec{\tau}^\varphi = -\rho \sin \varphi \vec{e}^x + \rho \cos \varphi \vec{e}^y \quad (3.4)$$

$$\vec{\tau}^z = \vec{e}^z \quad (3.5)$$

$$\vec{e}^\rho = \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \varphi \vec{e}^y \quad (3.6)$$

$$\vec{e}^\varphi = -\sin \varphi \vec{e}^x + \cos \varphi \vec{e}^y \quad (3.7)$$

$$\vec{e}^z = \vec{e}^z \quad (3.8)$$

Wir überprüfen leicht, dass die drei Einheitsvektoren  $\vec{e}^\rho$ ,  $\vec{e}^\varphi$ , und  $\vec{e}^z$  in jedem Punkt des Raumes orthogonal aufeinander stehen

$$\vec{e}^\rho \cdot \vec{e}^\varphi = 0, \quad \vec{e}^\rho \cdot \vec{e}^z = 0, \quad \vec{e}^\varphi \cdot \vec{e}^z = 0 \quad (3.9)$$

und der Reihenfolge  $\vec{e}^\rho$ ,  $\vec{e}^\varphi$ , und  $\vec{e}^z$  ein orthogonales Dreibein mit Rechtsorientierung aufspannen

$$\vec{e}^\rho \times \vec{e}^\varphi = \vec{e}^z. \quad (3.10)$$

Den Ortsvektor  $\vec{r} = x\vec{e}^x + y\vec{e}^y + z\vec{e}^z$  können wir nun auch in dem Dreibein  $\vec{e}^\rho$ ,  $\vec{e}^\varphi$ , und  $\vec{e}^z$  darstellen und erhalten

$$\vec{r} = \rho\vec{e}^\rho + z\vec{e}^z. \quad (3.11)$$

Wir können die Gleichungen 3.6–3.8 auch umkehren und die kartesischen Einheitsvektoren durch die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten ausdrücken.

$$\vec{e}^x = \cos \varphi \vec{e}^\rho - \sin \varphi \vec{e}^\varphi \quad (3.12)$$

$$\vec{e}^y = \sin \varphi \vec{e}^\rho + \cos \varphi \vec{e}^\varphi \quad (3.13)$$

$$\vec{e}^z = \vec{e}^z \quad (3.14)$$

**Beispiel.** Wir nehmen an der Ortsvektor  $\vec{r}$  sei von der Zeit  $t$  abhängig. Dann liefert die Ableitung von 3.11

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho}\vec{e}^\rho + \rho\dot{\vec{e}}^\rho + \dot{z}\vec{e}^z \\ &= \dot{\rho}\vec{e}^\rho + \rho(-\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{e}^x + \dot{\varphi}\cos\varphi\vec{e}^y) + \dot{z}\vec{e}^z \\ &= \dot{\rho}\vec{e}^\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}^\varphi + \dot{z}\vec{e}^z. \end{aligned} \quad (3.15)$$

**Koordinatenflächen.** Halten wir in  $\vec{x}(\rho, \varphi, z)$  nur eine der Koordinaten fest und variieren die beiden anderen, so erhalten wir die *Koordinatenflächen*

- **$\rho$ -Flächen:** Drehzylinder mit dem Radius  $\rho$  um die  $z$ -Achse
- **$\varphi$ -Flächen:** Halbebenen durch die  $z$ -Achse
- **$z$ -Flächen:** Ebenen senkrecht zur  $z$ -Achse

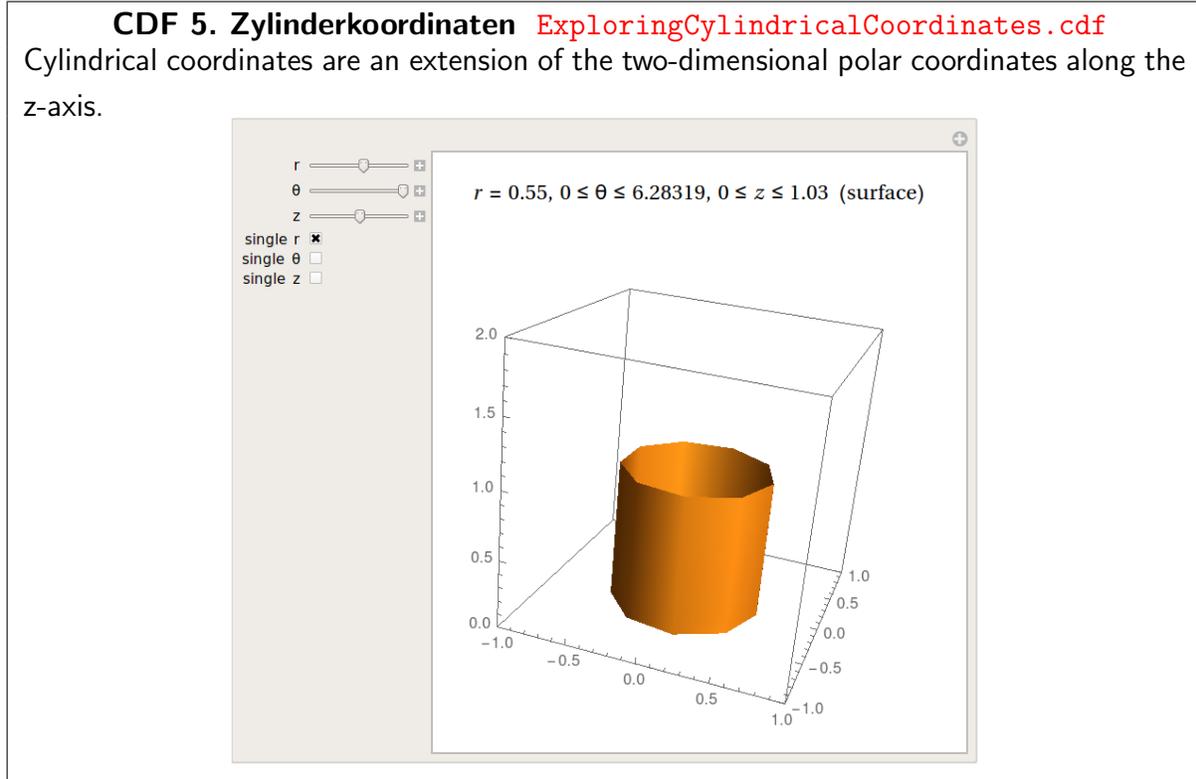
Die Koordinatenflächen sind also Äquipotenzialflächen, deren Flächennormalen mithilfe des Gradienten und Gleichungen 3.2 berechnet werden können:

$$\vec{\gamma}^\rho = \vec{\nabla}\rho(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{e}^x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{e}^y = \cos\varphi\vec{e}^x + \sin\varphi\vec{e}^y \quad (3.16)$$

$$\vec{\gamma}^\varphi = \vec{\nabla}\varphi(x, y, z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{e}^x + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{e}^y = -\frac{1}{\rho}\sin\varphi\vec{e}^x + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\vec{e}^y \quad (3.17)$$

$$\vec{\gamma}^z = \vec{\nabla}z(x, y, z) = \vec{e}^z. \quad (3.18)$$

Der Vergleich mit 3.3–3.5 zeigt, dass die Normalenvektoren auf die Koordinatenflächen  $\vec{\gamma}^\rho$ ,  $\vec{\gamma}^\varphi$ , und  $\vec{\gamma}^z$  parallel zu den entsprechenden Tangentenvektoren  $\vec{\tau}^\rho$ ,  $\vec{\tau}^\varphi$ , und  $\vec{\tau}^z$  sind, und damit ebenfalls ein orthogonales Dreibein definieren.



### 3.1.2 Kugelkoordinaten

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , und  $x_3 = z$ . Die Koordinaten eines Punktes (Ortsvektor) seien Funktionen von drei unabhängigen Parametern, die wir mit  $r$ ,  $\vartheta$ , und  $\varphi$  bezeichnen:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta \quad (3.19)$$

Lösen wir die Gleichungen 3.19 nach  $r$ ,  $\vartheta$ , und  $\varphi$  auf, so erhalten wir  $r$ ,  $\vartheta$ , und  $\varphi$  als Funktion der kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$ , und  $z$ .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (3.20)$$

Die Gleichungen 3.19 und 3.20 besagen, dass jedem Zahlentripel  $r, \vartheta, \varphi$  in eindeutiger Weise ein Zahlentripel  $x, y, z$  zugeordnet ist und umgekehrt. Hierzu gelten folgende Bereiche  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ , und  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Die drei Parameter  $r, \vartheta, \varphi$  dienen uns also wie die kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  zur Festlegung der Punkte des Raumes. Je drei Zahlen  $r, \vartheta, \varphi$  bestimmen eindeutig einen Punkt  $P$ , und umgekehrt, jeder Punkt  $P$  eindeutig drei Zahlen  $r, \vartheta, \varphi$ , die wir als *Kugelkoordinaten des Punktes*  $P$  bezeichnen.

**Koordinatenlinien.** Halten wir jeweils zwei der drei Kugelkoordinaten fest, so erhalten wir die drei *Koordinatenlinien*  $\vec{x}^r$ ,  $\vec{x}^\vartheta$ , und  $\vec{x}^\varphi$ , die wir geometrisch in folgender Weise interpretieren können:

- **$r$ -Linien:** Halbstrahlen vom Koordinatenursprung weg ( $\vec{x}^r(r, \vartheta = \vartheta_0, \varphi = \varphi_0)$ )
- **$\vartheta$ -Linien:** Halbkreise um den Koordinatenursprung ("Längenkreise"  $\vec{x}^\vartheta(r = r_0, \vartheta, \varphi = \varphi_0)$ )
- **$\varphi$ -Linien:** Kreise um die  $z$ -Achse ("Breitenkreise"  $\vec{x}^\varphi(r = r_0, \vartheta = \vartheta_0, \varphi)$ )

Die Tangentenvektoren  $\vec{\tau}^r$ ,  $\vec{\tau}^\vartheta$ , und  $\vec{\tau}^\varphi$ , und die zugehörigen Einheitsvektoren  $\vec{e}^r$ ,  $\vec{e}^\vartheta$ , und  $\vec{e}^\varphi$  lauten:

$$\vec{\tau}^r = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y + \cos \vartheta \vec{e}^z \quad (3.21)$$

$$\vec{\tau}^\vartheta = r \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + r \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y - r \sin \vartheta \vec{e}^z \quad (3.22)$$

$$\vec{\tau}^\varphi = -r \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^x + r \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^y \quad (3.23)$$

$$\vec{e}^r = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y + \cos \vartheta \vec{e}^z \quad (3.24)$$

$$\vec{e}^\vartheta = \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y - \sin \vartheta \vec{e}^z \quad (3.25)$$

$$\vec{e}^\varphi = -\sin \varphi \vec{e}^x + \cos \varphi \vec{e}^y \quad (3.26)$$

Wir überprüfen leicht, dass die drei Einheitsvektoren  $\vec{e}^r$ ,  $\vec{e}^\vartheta$ , und  $\vec{e}^\varphi$  in jedem Punkt des Raumes orthogonal aufeinander stehen

$$\vec{e}^r \cdot \vec{e}^\vartheta = 0, \quad \vec{e}^r \cdot \vec{e}^\varphi = 0, \quad \vec{e}^\vartheta \cdot \vec{e}^\varphi = 0 \quad (3.27)$$

und der Reihenfolge  $\vec{e}^r$ ,  $\vec{e}^\vartheta$ , und  $\vec{e}^\varphi$  ein orthogonales Dreibein mit Rechtsorientierung aufspannen

$$\vec{e}^r \times \vec{e}^\vartheta = \vec{e}^\varphi. \quad (3.28)$$

Den Ortsvektor  $\vec{r} = x\vec{e}^x + y\vec{e}^y + z\vec{e}^z$  können wir nun auch in dem Dreibein  $\vec{e}^r$ ,  $\vec{e}^\vartheta$ , und  $\vec{e}^\varphi$  darstellen und erhalten

$$\vec{r} = r\vec{e}^r. \quad (3.29)$$

Wir können die Gleichungen 3.24–3.26 auch umkehren und die kartesischen Einheitsvektoren durch die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten ausdrücken.

$$\vec{e}^x = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^r + \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}^\vartheta - \sin \varphi \vec{e}^\varphi \quad (3.30)$$

$$\vec{e}^y = \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^r + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}^\vartheta + \cos \varphi \vec{e}^\varphi \quad (3.31)$$

$$\vec{e}^z = \cos \vartheta \vec{e}^r - \sin \vartheta \vec{e}^\vartheta \quad (3.32)$$

**Beispiel.** Wir nehmen an der Ortsvektor  $\vec{r}$  sei von der Zeit  $t$  abhängig. Dann liefert die Ableitung von 3.29

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}^r + r\dot{\vec{e}}^r \\ &= \dot{r}\vec{e}^r + r(\dot{\vartheta}\vec{e}^\vartheta + \dot{\varphi}\sin\vartheta\vec{e}^\varphi) \\ &= \dot{r}\vec{e}^r + r\dot{\vartheta}\vec{e}^\vartheta + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\vec{e}^\varphi\end{aligned}\quad (3.33)$$

**Koordinatenflächen.** Halten wir in  $\vec{x}(r, \vartheta, \varphi)$  nur eine der Koordinaten fest und variieren die beiden anderen, so erhalten wir die *Koordinatenflächen*

- **$r$ -Flächen:** Konzentrische Kugel mit dem Radius  $r$  um den Koordinatenursprung
- **$\vartheta$ -Flächen:** Drehkegel um die  $z$ -Achse mit dem Scheitel im Koordinatenursprung
- **$\varphi$ -Flächen:** Halbebenen durch die  $z$ -Achse

Die Koordinatenflächen sind also Äquipotenzialflächen, deren Flächennormalen mithilfe des Gradienten und Gleichungen 3.20 berechnet werden können:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}^r = \vec{\nabla}r(x, y, z) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{e}^x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{e}^y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{e}^z \\ &= \sin\vartheta\cos\varphi\vec{e}^x + \sin\vartheta\sin\varphi\vec{e}^y + \cos\vartheta\vec{e}^z\end{aligned}\quad (3.34)$$

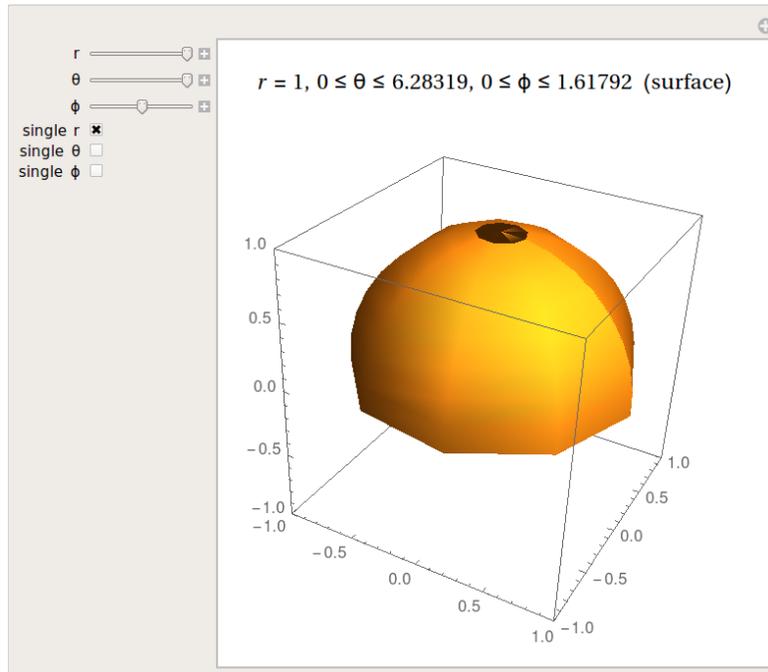
$$\begin{aligned}\vec{\gamma}^\vartheta = \vec{\nabla}\vartheta(x, y, z) &= \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)}\vec{e}^x + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)}\vec{e}^y - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2}\vec{e}^z \\ &= \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\vec{e}^x + \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi\vec{e}^y - \frac{1}{r}\sin\vartheta\vec{e}^z\end{aligned}\quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}^\varphi = \vec{\nabla}\varphi(x, y, z) &= -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{e}^x + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{e}^y \\ &= -\frac{1}{r\sin\vartheta}\sin\varphi\vec{e}^x + \frac{1}{r\sin\vartheta}\cos\varphi\vec{e}^y\end{aligned}\quad (3.36)$$

Der Vergleich mit 3.21–3.23 zeigt, dass die Normalenvektoren auf die Koordinatenflächen  $\vec{\gamma}^r$ ,  $\vec{\gamma}^\vartheta$ , und  $\vec{\gamma}^\varphi$  parallel zu den entsprechenden Tangentenvektoren  $\vec{\tau}^r$ ,  $\vec{\tau}^\vartheta$ , und  $\vec{\tau}^\varphi$  sind, und damit ebenfalls ein orthogonales Dreibein definieren.

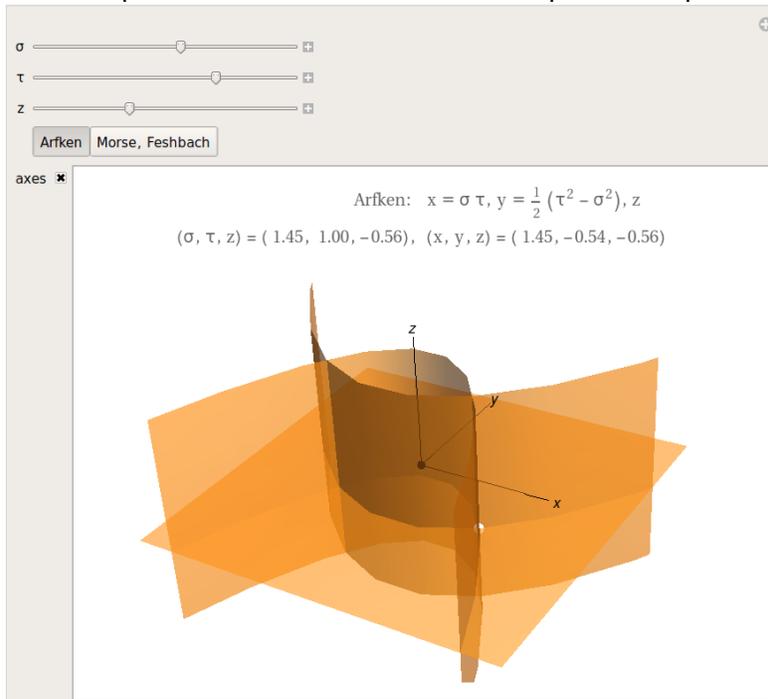
**CDF 6. Kugelkoordinaten** [ExploringSphericalCoordinates.cdf](#)

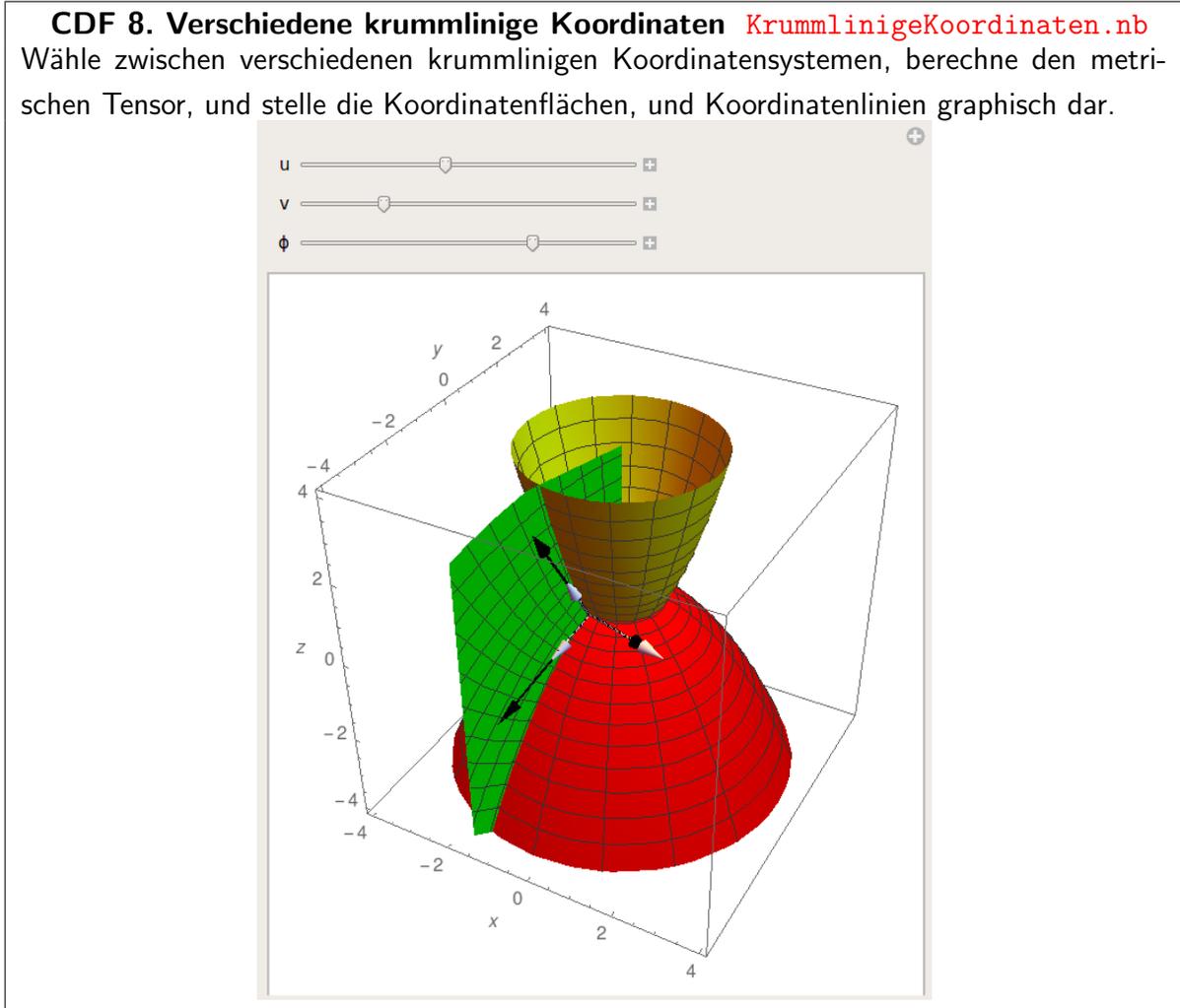
Spherical coordinates are given by a radial distance and two angle measurements.



**CDF 7. Parabolische Zylinderkoordinaten** [ParabolicCylindricalCoordinates.cdf](#)

The parabolic cylindrical curvilinear coordinate system is one of the many coordinate systems that make the Laplace and Helmholtz differential equations separable.





## 3.2 Allgemeine orthogonale Koordinatensysteme

### 3.2.1 Kartesische und krummlinige Koordinaten

Nach der Diskussion von Zylinder- und Kugelkoordinaten in den beiden vorangegangenen Kapiteln wollen wir nun allgemeine krummlinige Koordinaten behandeln, wobei wir uns vor allem auf *orthogonale* krummlinige Koordinatensystem konzentrieren wollen. Gegeben sei also ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen 1,2,3. Wir gehen von der Annahme aus, dass die Koordinaten eines Punktes (Orstvektor) Funktionen von drei unabhängigen Parametern  $u_1, u_2, u_3$  sind:

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3). \quad (3.37)$$

Von den drei Funktionen  $x_i$  setzen wir voraus, dass sie eindeutig und mindestens einmal stetig differenzierbar sind. Lösen wir die Gleichungen 3.37 nach den  $u_i$  auf, so erhalten wir die  $u_i$  als Funktion

der kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ :

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3). \quad (3.38)$$

Auch von 3.38 wollen wir voraussetzen, dass sie eindeutig und mindestens einmal stetig differenzierbar sind.

Die Gleichungen 3.37 und 3.38 besagen dann, dass jedem Zahlentripel  $u_1, u_2, u_3$  in eindeutiger Weise ein Zahlentripel  $x_1, x_2, x_3$  zugeordnet ist und umgekehrt. Die drei Veränderlichen  $u_1, u_2$ , und  $u_3$  dienen uns also wie die kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  zur Festlegung der Punkte des Raumes. Je drei Zahlen  $u_i$  bestimmen eindeutig einen Punkt  $P$ , und umgekehrt, jeder Punkt  $P$  eindeutig drei Zahlen  $u_i$ . Wir nennen also die Zahlen  $u_1, u_2, u_3$  die *krummlinige Koordinaten des Punktes  $P$* .

Die Flächenscharen

$$u_1 = \text{konst.}, \quad u_2 = \text{konst.}, \quad u_3 = \text{konst.}$$

heißen *Koordinatenflächen*. Auf jeder Koordinatenfläche ist eine krummlinige Koordinate konstant, und zwei variabel. Eine Koordinatenfläche wird nach der auf ihr konstanten Koordinate benannt.

Die Schnittkurven zweier Koordinatenflächen heißen *Koordinatenlinien*. Auf einer Koordinatenlinie sind zwei Koordinaten konstant und eine variabel. Eine Koordinatenlinie wird nach der auf ihr variablen Koordinate benannt.

### 3.2.2 Tangentenvektoren und Normalenvektoren

Setzen wir 3.38 in 3.37 ein und umgekehrt, so erhalten wir die Identitäten

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)) \\ u_k &= u_k(x_1(u_1, u_2, u_3), x_2(u_1, u_2, u_3), x_3(u_1, u_2, u_3)), \end{aligned}$$

deren Differentiation nach  $x_k$  bzw.  $u_i$  (Kettenregel!) folgende Ausdrücke liefert:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_i}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = \delta_{ik} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial u_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial u_i} = \delta_{ik} \quad (3.40)$$

Führen wir die (*nicht normierten*) Tangentenvektoren  $\vec{\tau}^i$  and die  $i$ -te Koordinatenlinie ein,

$$\vec{\tau}^i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \quad \tau_l^i = \frac{\partial x_l}{\partial u_i}, \quad (3.41)$$

sowie die (*nicht normierten*) Normalenvektoren  $\vec{\gamma}^i$  an die  $i$ -te Koordinatenfläche ein, die sich ja als Gradient der Niveauflächen  $u_i = \text{konst.}$  ergeben,

$$\vec{\gamma}^k = \vec{\nabla} u_k \quad \gamma_l^k = \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (3.42)$$

so können wir die Identität 3.40 auch in folgender Form schreiben

$$\vec{\tau}^i \cdot \vec{\gamma}^k = \delta_{ik}. \quad (3.43)$$

Das heißt, die Tangentenvektoren  $\vec{\tau}^i$  stehen im allgemeinen Fall senkrecht auf jeweils zwei der drei Normalenvektoren  $\vec{\gamma}^k$ .

### 3.2.3 Der metrische Tensor

Die skalaren Produkte der Tangentenvektoren untereinander bezeichnen wir mit  $g_{ik}$ ,

$$g_{ik} = \vec{\tau}^i \cdot \vec{\tau}^k, \quad (3.44)$$

und die skalaren Produkte der Normalenvektoren untereinander mit  $g^{ik}$ ,

$$g^{ik} = \vec{\gamma}^i \cdot \vec{\gamma}^k. \quad (3.45)$$

Die  $g_{ik}$  heißen Koordinaten des *kovarianten Maßstensors*, während die  $g^{ik}$  Koordinaten des *kontravarianten Maßstensors* genannt werden.

Es ist klar, dass der Maßtensor symmetrisch ist,  $g_{ik} = g_{ki}$  und  $g^{ik} = g^{ki}$ . Des weiteren gilt auch

$$g_{il} g^{kl} = \delta_{ik}. \quad (3.46)$$

Das sieht man unter Benutzung von 3.43

$$g_{il} g^{kl} = (\vec{\tau}^i \cdot \vec{\tau}^l) (\vec{\gamma}^k \cdot \vec{\gamma}^l) = \tau_j^i \tau_j^l \gamma_m^k \gamma_m^l = \tau_j^i \gamma_m^k \tau_j^l \gamma_m^l = \tau_j^i \gamma_m^k \delta_{jm} = \tau_j^i \gamma_j^k = \delta_{ik}.$$

Wie man unter Verwendung der Gleichungen 3.43, 3.44, 3.45, und 3.46 zeigen kann, erlaubt der metrische Tensor die Berechnung der Koordinaten der Tangentenvektoren aus den Koordinaten der Normalenvektoren und umgekehrt

$$\vec{\tau}^i = g_{il} \vec{\gamma}^l \quad (3.47)$$

$$\vec{\gamma}^i = g^{il} \vec{\tau}^l. \quad (3.48)$$

**Orthogonale krummlinige Koordinaten.** Von orthogonalen krummlinigen Koordinaten spricht man, wenn die Tangentenvektoren  $\vec{\tau}^i$  und damit auch die Normalenvektoren  $\vec{\gamma}^i$  in jedem Punkt ein orthogonales Dreibein bilden. Damit gilt für den metrischen Tensor

$$g_{ik} = g^{ik} = 0 \quad \text{für } i \neq k. \quad (3.49)$$

Die von Null verschiedenen Koordinaten des kovarianten und kontravarianten Maßtensors sind gegeben durch

$$g_{11} = \vec{\tau}^1 \vec{\tau}^1 \quad g_{22} = \vec{\tau}^2 \vec{\tau}^2 \quad g_{33} = \vec{\tau}^3 \vec{\tau}^3 \quad (3.50)$$

$$g^{11} = \vec{\gamma}^1 \vec{\gamma}^1 \quad g^{22} = \vec{\gamma}^2 \vec{\gamma}^2 \quad g^{33} = \vec{\gamma}^3 \vec{\gamma}^3 \quad (3.51)$$

Für orthogonale krummlinige Koordinaten folgt aus 3.46

$$g_{11}g^{11} = 1, \quad g_{22}g^{22} = 1, \quad g_{33}g^{33} = 1, \quad (3.52)$$

und es sind folgende Abkürzungen üblich

$$h_1 = \sqrt{g_{11}}, \quad h_2 = \sqrt{g_{22}}, \quad h_3 = \sqrt{g_{33}}, \quad (3.53)$$

wobei die  $h_i$  die *metrischen Koeffizienten* des orthogonalen krummlinigen Koordinatensystems genannt werden. Mit Gleichung 3.44 können wir die  $h_i$  also explizit in folgender Weise berechnen

$$h_1^2 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \right)^2 \quad (3.54)$$

$$h_2^2 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \right)^2 \quad (3.55)$$

$$h_3^2 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \right)^2 \quad (3.56)$$

Mithilfe der metrischen Koeffizienten können wir auch die drei orthogonalen Einheitsvektoren  $\vec{e}^{u_1}$ ,  $\vec{e}^{u_2}$ , und  $\vec{e}^{u_3}$  entlang der drei Koordinatenlinien  $u_1$ ,  $u_2$ , und  $u_3$  aus den Tangentenvektoren bzw. den Normalenvektoren bilden:

$$\vec{e}^{u_1} = \frac{1}{h_1} \vec{\tau}^1 \quad \vec{e}^{u_2} = \frac{1}{h_2} \vec{\tau}^2 \quad \vec{e}^{u_3} = \frac{1}{h_3} \vec{\tau}^3 \quad (3.57)$$

$$\vec{e}^{u_1} = h_1 \vec{\gamma}^1 \quad \vec{e}^{u_2} = h_2 \vec{\gamma}^2 \quad \vec{e}^{u_3} = h_3 \vec{\gamma}^3. \quad (3.58)$$

Für orthogonale Koordinaten gelten auch noch folgende Beziehungen, die man leicht überprüfen kann:

$$\vec{\tau}^1 = h_1 h_2 h_3 (\vec{\gamma}^2 \times \vec{\gamma}^3) \quad (3.59)$$

$$\vec{\tau}^2 = h_1 h_2 h_3 (\vec{\gamma}^3 \times \vec{\gamma}^1) \quad (3.60)$$

$$\vec{\tau}^3 = h_1 h_2 h_3 (\vec{\gamma}^1 \times \vec{\gamma}^2) \quad (3.61)$$

$$\vec{e}^{u_1} = h_2 h_3 (\vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3) \quad (3.62)$$

$$\vec{e}^{u_2} = h_3 h_1 (\vec{\nabla} u_3 \times \vec{\nabla} u_1) \quad (3.63)$$

$$\vec{e}^{u_3} = h_1 h_2 (\vec{\nabla} u_1 \times \vec{\nabla} u_2). \quad (3.64)$$

**Zylinderkoordinaten.** Mit  $u_1 \equiv \rho$ ,  $u_2 \equiv \varphi$  und  $u_3 \equiv z$  lauten die Gleichungen 3.37 für Zylinderkoordinaten

$$x_1(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi, \quad x_2(\rho, \varphi, z) = \rho \sin \varphi, \quad x_3(\rho, \varphi, z) = z$$

Damit erhalten wir für die metrischen Koeffizienten nach Gleichungen 3.54–3.56

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1, \quad (3.65)$$

und

$$\vec{e}^\rho = \cos \varphi \vec{e}^1 + \sin \varphi \vec{e}^2, \quad \vec{e}^\varphi = -\sin \varphi \vec{e}^1 + \cos \varphi \vec{e}^2, \quad \vec{e}^z = \vec{e}^3 \quad (3.66)$$

**Kugelkoordinaten.** Mit  $u_1 \equiv r$ ,  $u_2 \equiv \vartheta$  und  $u_3 \equiv \varphi$  lauten die Gleichungen 3.37 für Kugelkoordinaten

$$x_1(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x_2(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_3(r, \vartheta, \varphi) = r \cos \vartheta$$

Damit erhalten wir für die metrischen Koeffizienten nach Gleichungen 3.54–3.56

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\varphi = r \sin \vartheta, \quad (3.67)$$

und

$$\begin{aligned} \vec{e}^r &= \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y + \cos \vartheta \vec{e}^z \\ \vec{e}^\vartheta &= \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y - \sin \vartheta \vec{e}^z \\ \vec{e}^\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}^x + \cos \varphi \vec{e}^y \end{aligned} \quad (3.68)$$

**Beispiel.** Wir berechnen den metrischen Tensor und die metrischen Koeffizienten für parabolische Zylinderkoordinaten, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}x_1(u, v, z) &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\x_2(u, v, z) &= u \cdot v \\x_3(u, v, z) &= z,\end{aligned}$$

wobei  $-\infty < u < \infty$ ,  $v \geq 0$ , und  $-\infty < z < \infty$ . Zunächst berechnen wir die Tangentenvektoren

$$\begin{aligned}\tau_i^1 &= \frac{\partial x_i}{\partial u} = (u, v, 0) \\ \tau_i^2 &= \frac{\partial x_i}{\partial v} = (-v, u, 0) \\ \tau_i^3 &= \frac{\partial x_i}{\partial z} = (0, 0, 1)\end{aligned}$$

Nach Gleichung 3.44 erhalten wir daraus die Koordinaten des kovarianten Maß tensors

$$g_{ik} = \vec{\tau}^i \cdot \vec{\tau}^k = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen  $g_{ik} = 0$  für  $i \neq k$  handelt es sich bei den parabolischen Zylinderkoordinaten also um orthogonale krummlinige Koordinaten. Und die metrischen Koeffizienten sind gegeben durch

$$h_1 = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_2 = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_3 = 1. \quad (3.69)$$

Weiters ist für orthogonale Koordinaten auch der kontravariante Maß tensor  $g^{ik}$  diagonal und seine Diagonalkomponenten  $g^{ii}$  sind nach Gleichung 3.46 einfach die Kehrwerte von  $g_{ii}$

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2+v^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wollen wir der Vollständigkeit halber auch die Normalenvektoren  $\vec{\gamma}^k$  berechnen, so können wir das natürlich über die Definition  $\vec{\gamma}^k = \vec{\nabla} u_k$  erledigen. Einfacher zum Ziel kommen wir durch Anwendung

von Gleichung 3.48

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}^1 &= g^{1l} \vec{\tau}^l = g^{11} \vec{\tau}^1 = \frac{1}{u^2 + v^2} (u, v, 0) \\ \vec{\gamma}^2 &= g^{2l} \vec{\tau}^l = g^{22} \vec{\tau}^2 = \frac{1}{u^2 + v^2} (-v, u, 0) \\ \vec{\gamma}^3 &= g^{3l} \vec{\tau}^l = g^{33} \vec{\tau}^3 = (0, 0, 1)\end{aligned}$$

### 3.2.4 Kartesische und krummlinige Koordinaten

Wir bezeichnen die kartesischen Einheitsvektoren in Richtung der Achsen des vorgegebenen kartesischen Koordinatensystems mit  $\vec{e}^1$ ,  $\vec{e}^2$ , und  $\vec{e}^3$ . Die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien des orthogonalen krummlinigen Koordinatensystems nennen wir wie gehabt  $\vec{\tau}^1$ ,  $\vec{\tau}^2$ , und  $\vec{\tau}^3$ , und die Normalenvektoren auf die Koordinatenflächen mit  $\vec{\gamma}^1$ ,  $\vec{\gamma}^2$ , und  $\vec{\gamma}^3$ . Schließlich bezeichnen wir die normierten Einheitsvektoren des krummlinigen Koordinatensystems (definiert in 3.57 und 3.58) mit  $\vec{e}^{u_1}$ ,  $\vec{e}^{u_2}$ , und  $\vec{e}^{u_3}$ . Die Koordinaten eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  können wir nun in diesen vier Basissystemen wie folgt darstellen:

$$\vec{F} = F_1 \vec{e}^1 + F_2 \vec{e}^2 + F_3 \vec{e}^3 \quad (3.70)$$

$$\vec{F} = f^1 \vec{\tau}^1 + f^2 \vec{\tau}^2 + f^3 \vec{\tau}^3 \quad (3.71)$$

$$\vec{F} = f_1 \vec{\gamma}^1 + f_2 \vec{\gamma}^2 + f_3 \vec{\gamma}^3 \quad (3.72)$$

$$\vec{F} = F_{u_1} \vec{e}^{u_1} + F_{u_2} \vec{e}^{u_2} + F_{u_3} \vec{e}^{u_3} \quad (3.73)$$

- $F_1, F_2, F_3$ : kartesische Koordinaten des Vektors  $\vec{F}$
- $f^1, f^2, f^3$ : kontravariante Koordinaten des Vektors  $\vec{F}$  im krummlinigen System  $u_1, u_2, u_3$
- $f_1, f_2, f_3$ : kovariante Koordinaten des Vektors  $\vec{F}$  im krummlinigen System  $u_1, u_2, u_3$
- $F_{u_1}, F_{u_2}, F_{u_3}$ : physikalische Koordinaten des Vektors  $\vec{F}$  im krummlinigen System  $u_1, u_2, u_3$

**Beispiel.** Gegeben ist das Vektorfeld  $\vec{F} = x_3 \vec{e}^1$  im kartesischen Koordinatensystem  $\vec{e}^1$ ,  $\vec{e}^2$ , und  $\vec{e}^3$ . Wir suchen a) die kontravariante Koordinaten, b) die kovariante Koordinaten, und c) die physikalische Koordinaten des Vektorfeldes in Zylinderkoordinaten. Die Gleichungen 3.70–3.73 lauten in

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_1 \vec{e}^1 + F_2 \vec{e}^2 + F_3 \vec{e}^3 \\ \vec{F} &= f^\rho \vec{\tau}^\rho + f^\varphi \vec{\tau}^\varphi + f^z \vec{\tau}^z \\ \vec{F} &= f_\rho \vec{\gamma}^\rho + f_\varphi \vec{\gamma}^\varphi + f_z \vec{\gamma}^z \\ \vec{F} &= F_\rho \vec{e}^\rho + F_\varphi \vec{e}^\varphi + F_z \vec{e}^z\end{aligned}$$

Die kartesischen Koordinaten lesen wir direkt aus der Angabe ab:  $F_1 = x_3$ ,  $F_2 = 0$ , und  $F_3 = 0$ . Die physikalischen Koordinaten  $F_\rho, F_\varphi, F_z$  erhalten wir indem wir die obigen Gleichung skalar mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}^\rho$ ,  $\vec{e}^\varphi$ , und  $\vec{e}^z$  multiplizieren:

$$\begin{aligned}F_\rho &= \vec{F} \cdot \vec{e}^\rho = (x_3 \vec{e}^1) \cdot (\cos \varphi \vec{e}^1 + \sin \varphi \vec{e}^2) = x_3 \cos \varphi = z \cos \varphi \\ F_\varphi &= \vec{F} \cdot \vec{e}^\varphi = (x_3 \vec{e}^1) \cdot (-\sin \varphi \vec{e}^1 + \cos \varphi \vec{e}^2) = -x_3 \sin \varphi = -z \sin \varphi \\ F_z &= \vec{F} \cdot \vec{e}^z = (x_3 \vec{e}^1) \cdot \vec{e}^3 = 0.\end{aligned}$$

Die kontravarianten Koordinaten  $f^\rho, f^\varphi, f^z$  erhalten wir wegen 3.43 indem wir die entsprechende Gleichung mit den Normalenvektoren  $\vec{\gamma}^\rho$ ,  $\vec{\gamma}^\varphi$ , und  $\vec{\gamma}^z$  multiplizieren:

$$\begin{aligned}f^\rho &= \vec{F} \cdot \vec{\gamma}^\rho = (x_3 \vec{e}^1) \cdot (\cos \varphi \vec{e}^1 + \sin \varphi \vec{e}^2) = x_3 \cos \varphi = z \cos \varphi \\ f^\varphi &= \vec{F} \cdot \vec{\gamma}^\varphi = (x_3 \vec{e}^1) \cdot \left( -\frac{1}{\rho} \sin \varphi \vec{e}^1 + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \vec{e}^2 \right) = -\frac{x_3}{\rho} \sin \varphi = -\frac{z}{\rho} \sin \varphi \\ f^z &= \vec{F} \cdot \vec{\gamma}^z = (x_3 \vec{e}^1) \cdot \vec{e}^3 = 0.\end{aligned}$$

Die kovarianten Koordinaten  $f_\rho, f_\varphi, f_z$  erhalten wir wegen 3.43 indem wir die entsprechende Gleichung mit den Tangentenvektoren  $\vec{\tau}^\rho$ ,  $\vec{\tau}^\varphi$ , und  $\vec{\tau}^z$  multiplizieren:

$$\begin{aligned}f_\rho &= \vec{F} \cdot \vec{\tau}^\rho = (x_3 \vec{e}^1) \cdot (\cos \varphi \vec{e}^1 + \sin \varphi \vec{e}^2) = x_3 \cos \varphi = z \cos \varphi \\ f_\varphi &= \vec{F} \cdot \vec{\tau}^\varphi = (x_3 \vec{e}^1) \cdot (-\rho \sin \varphi \vec{e}^1 + \rho \cos \varphi \vec{e}^2) = -x_3 \rho \sin \varphi = -z \rho \sin \varphi \\ f_z &= \vec{F} \cdot \vec{\tau}^z = (x_3 \vec{e}^1) \cdot \vec{e}^3 = 0.\end{aligned}$$

### 3.2.5 Linienelemente, Flächenelemente, Volumselement

**Linienelement.** Das Linienelement  $d\vec{x}$  von einem Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $\vec{x}(u_1, u_2, u_3)$  zu einem Punkt  $Q$  mit den Koordinaten  $\vec{x}(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$  lautet

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \vec{x}(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3) - \vec{x}(u_1, u_2, u_3) \\ &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_3} du_3 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_k} du_k \\ &= \vec{\tau}^1 du_1 + \vec{\tau}^2 du_2 + \vec{\tau}^3 du_3 = \vec{\tau}^k du_k. \end{aligned}$$

Mithilfe der metrischen Koeffizienten  $h_1, h_2, h_3$  und der Einheitsvektoren des krummlinigen Koordinatensystems  $\vec{e}^{u_1}$ ,  $\vec{e}^{u_2}$ , und  $\vec{e}^{u_3}$  können wir das Linienelement im Falle orthogonaler krummliniger Koordinaten auch wie folgt angeben

$$d\vec{x} = h_1 du_1 \vec{e}^{u_1} + h_2 du_2 \vec{e}^{u_2} + h_3 du_3 \vec{e}^{u_3} \quad (3.74)$$

Für das Betragsquadrat des Linienelements  $ds^2$  erhalten wir mit 3.44 ganz allgemein

$$ds^2 = d\vec{x} d\vec{x} = (\vec{\tau}^i du_i) (\vec{\tau}^k du_k) = g_{ik} du_i du_k.$$

Für orthogonale Koordinaten ( $g_{ik} = 0$  für  $i \neq k$ ) finden wir

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2, \quad (3.75)$$

und die Linienelemente  $ds_{u_1}$ ,  $ds_{u_2}$ , und  $ds_{u_3}$  entlang der Koordinatenlinien  $u_1$ ,  $u_2$ , und  $u_3$  ergeben sich zu

$$ds_{u_1} = h_1 du_1 \quad (3.76)$$

$$ds_{u_2} = h_2 du_2 \quad (3.77)$$

$$ds_{u_3} = h_3 du_3. \quad (3.78)$$

**Flächenelemente.** Die Flächenelemente der Koordinatenflächen bezeichnen wir mit  $dA_{u_1}$ ,  $dA_{u_2}$ , und  $dA_{u_3}$ . Das Flächenelement der  $u_1$ -Fläche beispielsweise ist gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren  $d\vec{s}^{u_2}$  und  $d\vec{s}^{u_3}$  aufgespannten infinitesimalen Parallelogramms. Das heißt es gilt

$$dA_{u_1} = |d\vec{s}^{u_2} \times d\vec{s}^{u_3}| = |\vec{\tau}^2 \times \vec{\tau}^3| du_2 du_3.$$

Wegen 1.55 und 3.44 gilt aber

$$|\vec{\tau}^2 \times \vec{\tau}^3|^2 = (\vec{\tau}^2 \vec{\tau}^2)(\vec{\tau}^3 \vec{\tau}^3) - (\vec{\tau}^2 \vec{\tau}^3)^2 = g_{22}g_{33} - g_{23}^2.$$

Damit folgt für *allgemeine* krummlinige Koordinaten

$$dA_{u_1} = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} du_2 du_3 \quad (3.79)$$

$$dA_{u_2} = \sqrt{g_{11}g_{33} - g_{13}^2} du_1 du_3 \quad (3.80)$$

$$dA_{u_3} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du_1 du_2, \quad (3.81)$$

und für *orthogonale* krummlinige Koordinaten die einfachere Form

$$dA_{u_1} = h_2 h_3 du_2 du_3 \quad (3.82)$$

$$dA_{u_2} = h_1 h_3 du_1 du_3 \quad (3.83)$$

$$dA_{u_3} = h_1 h_2 du_1 du_2. \quad (3.84)$$

**Volumselement.** Schließlich berechnen wir das Volumnelement  $dV$  in den krummlinigen Koordinaten  $u_1$ ,  $u_2$ , und  $u_3$ . Es ist gleich dem Volumen des von den Vektoren  $d\vec{s}^{u_1}$ ,  $d\vec{s}^{u_2}$ , und  $d\vec{s}^{u_3}$  aufgespannten Parallelepipeds

$$dV = d\vec{s}^{u_1}(d\vec{s}^{u_2} \times d\vec{s}^{u_3}) = \vec{\tau}^1(\vec{\tau}^2 \times \vec{\tau}^3) du_1 du_2 du_3.$$

Wir werten das Spatprodukt  $\vec{\tau}^1(\vec{\tau}^2 \times \vec{\tau}^3)$  (genauer: dessen Quadrat) weiter aus und verwenden dazu die Darstellung in Form einer Determinante (siehe 1.61)

$$[\vec{\tau}^1(\vec{\tau}^2 \times \vec{\tau}^3)]^2 = \begin{vmatrix} \tau_1^1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 \\ \tau_1^2 & \tau_1^2 & \tau_1^3 \\ \tau_1^3 & \tau_1^3 & \tau_1^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tau_1^1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 \\ \tau_1^2 & \tau_1^2 & \tau_1^3 \\ \tau_1^3 & \tau_1^3 & \tau_1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_i^1 \tau_i^1 & \tau_i^1 \tau_i^2 & \tau_i^1 \tau_i^3 \\ \tau_j^2 \tau_j^1 & \tau_j^2 \tau_j^2 & \tau_j^2 \tau_j^3 \\ \tau_k^3 \tau_k^1 & \tau_k^3 \tau_k^2 & \tau_k^3 \tau_k^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \equiv g.$$

Damit erhalten wir für das Volumselement

$$dV = \sqrt{g} du_1 du_2 du_3, \quad (3.85)$$

wobei  $g$  die Determinante des metrischen Tensors darstellt. Anders ausgedrückt ist  $g$  gleich der Determinanten der Jacobi-Matrix. Für *orthogonale* krummlinige Koordinaten gilt weiters

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (3.86)$$

**Zylinderkoordinaten.** Mit den metrischen Koeffizienten aus Gleichung 3.65 erhalten wir für die Linienelemente, Flächenelemente und das Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (3.87)$$

$$ds_\rho = d\rho, \quad ds_\varphi = \rho d\varphi, \quad ds_z = dz \quad (3.88)$$

$$dA_\rho = \rho d\varphi dz, \quad dA_\varphi = d\rho dz, \quad dA_z = \rho d\rho d\varphi \quad (3.89)$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (3.90)$$

**Kugelkoordinaten.** Mit den metrischen Koeffizienten aus Gleichung 3.67 erhalten wir für die Linienelemente, Flächenelemente und das Volumenelement in Kugelkoordinaten

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (3.91)$$

$$ds_r = dr, \quad ds_\vartheta = r d\vartheta, \quad ds_\varphi = r \sin \vartheta d\varphi \quad (3.92)$$

$$dA_r = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad dA_\vartheta = r \sin \vartheta dr d\varphi, \quad dA_\varphi = r dr d\vartheta \quad (3.93)$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \quad (3.94)$$

**Beispiel.** Wir berechnen die Linienelemente, Flächenelemente und das Volumenelement in parabolischen Zylinderkoordinaten. Nach Gleichung 3.69 gilt

$$h_u = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_z = 1.$$

Damit gilt für die Linienelemente

$$ds^2 = (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) + dz^2,$$

und für die Linienelemente  $ds_u$ ,  $ds_v$ , und  $ds_z$  entlang der Koordinatenlinien  $u$ ,  $v$ , und  $z$

$$ds_u = \sqrt{u^2 + v^2} du, \quad ds_v = \sqrt{u^2 + v^2} dv, \quad ds_z = dz.$$

Die Flächenelemente an die Koordinatenflächen erhalten wir zu

$$dA_u = \sqrt{u^2 + v^2} dv dz, \quad dA_v = \sqrt{u^2 + v^2} du dz, \quad dA_z = (u^2 + v^2) du dv,$$

und für das Volumenelement finden wir

$$dV = (u^2 + v^2) du dv dz.$$

### 3.2.6 Differenzialoperatoren

Gegeben sei ein Skalarfeld  $\Phi$  und ein Vektorfeld  $\vec{F}$  als Funktionen von *orthogonalen* krummlinigen Koordinaten  $u_1, u_2, u_3$  in der Form:

$$\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3), \quad (3.95)$$

und

$$\begin{aligned} F_{u_1} &= F_{u_1}(u_1, u_2, u_3) \\ F_{u_2} &= F_{u_2}(u_1, u_2, u_3) \\ F_{u_3} &= F_{u_3}(u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Hierbei sind die  $F_{u_i}$  die physikalischen Koordinaten des Vektors  $\vec{F}$ , das heißt die Darstellungszahlen des Vektors  $\vec{F}$  im orthonormierten Dreibein  $\vec{e}^{u_1}, \vec{e}^{u_2}, \vec{e}^{u_3}$  der Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien:

$$\vec{F} = F_{u_1} \vec{e}^{u_1} + F_{u_2} \vec{e}^{u_2} + F_{u_3} \vec{e}^{u_3}$$

**a) Gradient eines Skalarfeldes  $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ .** Wir suchen nach der Darstellung des Gradientenvektors  $\text{grad } \Phi \equiv \vec{\nabla} \Phi$  in dem orthonormierten Dreibein  $\vec{e}^{u_1}, \vec{e}^{u_2}, \vec{e}^{u_3}$ :

$$\text{grad } \Phi = \{\text{grad } \Phi\}_{u_1} \vec{e}^{u_1} + \{\text{grad } \Phi\}_{u_2} \vec{e}^{u_2} + \{\text{grad } \Phi\}_{u_3} \vec{e}^{u_3}.$$

Bilden wir von obiger Gleichung das skalare Produkt mit dem Vektor  $\vec{e}^{u_1}$ , so erhalten wir

$$\{\text{grad } \Phi\}_{u_1} = (\vec{\nabla} \Phi) \vec{e}^{u_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} e_i^{u_1}.$$

Nach Anwendung der Kettenregel

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

und Einsetzen der Definition von  $\vec{e}_i^{u_1}$  (siehe Gleichung 3.57) erhalten wir

$$\{\text{grad } \Phi\}_{u_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_1}.$$

Wegen 3.40 vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\{\text{grad } \Phi\}_{u_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \delta_{1k} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}$$

Analoge Ausdrücke erhalten wir auch für  $\{\text{grad } \Phi\}_{u_2}$  und  $\{\text{grad } \Phi\}_{u_3}$  und fassen somit zusammen:

**Gradient eines Skalarfeldes  $\Phi$  in krummlinigen Koordinaten**

$$\begin{aligned} \{\text{grad } \Phi\}_{u_1} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \\ \{\text{grad } \Phi\}_{u_2} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \\ \{\text{grad } \Phi\}_{u_3} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \end{aligned} \quad (3.97)$$

b) Divergenz eines Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(u_1, u_2, u_3)$ .

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} &= \vec{\nabla} \vec{F} \\ &= \vec{\nabla} (F_{u_1} \vec{e}^{u_1} + F_{u_2} \vec{e}^{u_2} + F_{u_3} \vec{e}^{u_3}) \\ &= \vec{\nabla} (F_{u_1} \vec{e}^{u_1}) + \vec{\nabla} (F_{u_2} \vec{e}^{u_2}) + \vec{\nabla} (F_{u_3} \vec{e}^{u_3}). \end{aligned}$$

Wir formen beispielhaft den ersten Term in obigem Ausdruck um, indem wir 3.62 für  $\vec{e}^{u_1}$  verwenden

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} (F_{u_1} \vec{e}^{u_1}) &= \vec{\nabla} \left( F_{u_1} h_2 h_3 \left( \vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3 \right) \right) \\ &= \left( \vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3 \right) \vec{\nabla} (F_{u_1} h_2 h_3) + F_{u_1} h_2 h_3 \underbrace{\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3 \right)}_{=0} \\ &= \underbrace{\left( \vec{\nabla} u_2 \times \vec{\nabla} u_3 \right)}_{\substack{3.62 \\ \vec{e}^{u_1}}} \vec{\nabla} (F_{u_1} h_2 h_3) \\ &= \frac{\vec{e}^{u_1}}{h_2 h_3} \vec{\nabla} (F_{u_1} h_2 h_3) = \frac{e_i^{u_1}}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{u_1} h_2 h_3). \end{aligned}$$

Mit der Darstellung für  $\vec{e}^{u_1}$  aus Gleichung 3.57 erhalten wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} (F_{u_1} \vec{e}^{u_1}) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{u_1} h_2 h_3) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{u_1} h_2 h_3) \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_{u_1} h_2 h_3). \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung für die anderen 2 Terme führt dann auf folgenden Ausdruck für die Divergenz:

**Divergenz eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  in krummlinigen Koordinaten:**

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_{u_1} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_{u_2} h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_{u_3} h_1 h_2) \right] \quad (3.98)$$

c) **Rotation eines Vektorfeldes**  $\vec{F} = \vec{F}(u_1, u_2, u_3)$ . Wir suchen nach der Darstellung der Rotation  $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F}$  in dem orthonormierten Dreibein  $\vec{e}^{u_1}, \vec{e}^{u_2}, \vec{e}^{u_3}$ :

$$\text{rot } \vec{F} = \left\{ \text{rot } \vec{F} \right\}_{u_1} \vec{e}^{u_1} + \left\{ \text{rot } \vec{F} \right\}_{u_2} \vec{e}^{u_2} + \left\{ \text{rot } \vec{F} \right\}_{u_3} \vec{e}^{u_3}.$$

Andererseits können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{\nabla} \times (F_{u_1} \vec{e}^{u_1} + F_{u_2} \vec{e}^{u_2} + F_{u_3} \vec{e}^{u_3}) \\ &= \vec{\nabla} \times (F_{u_1} \vec{e}^{u_1}) + \vec{\nabla} \times (F_{u_2} \vec{e}^{u_2}) + \vec{\nabla} \times (F_{u_3} \vec{e}^{u_3}) \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder exemplarisch den ersten Term und verwenden  $\vec{e}^{u_1} = h_1 \vec{\nabla} u_1$  aus Gleichung 3.58

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (F_{u_1} \vec{e}^{u_1}) &= \vec{\nabla} \times (F_{u_1} h_1 \vec{\nabla} u_1) \\ &= F_{u_1} h_1 \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_1)}_{=0} + \vec{\nabla} (F_{u_1} h_1) \times \vec{\nabla} u_1 \\ &= \vec{\nabla} (F_{u_1} h_1) \times \frac{\vec{e}^{u_1}}{h_1} = \text{grad}(F_{u_1} h_1) \times \frac{\vec{e}^{u_1}}{h_1}. \end{aligned}$$

Einsetzen unserer Ergebnisse für den Gradienten in krummlinigen Koordinaten 3.97 führt dann auf

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (F_{u_1} \vec{e}^{u_1}) &= \left[ \frac{\vec{e}^{u_1}}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (F_{u_1} h_1) + \frac{\vec{e}^{u_2}}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (F_{u_1} h_1) + \frac{\vec{e}^{u_3}}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (F_{u_1} h_1) \right] \times \frac{\vec{e}^{u_1}}{h_1} \\ &= \frac{\vec{e}^{u_2}}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3} (F_{u_1} h_1) - \frac{\vec{e}^{u_3}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (F_{u_1} h_1). \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung für die verbleibenden 2 Terme führt dann auf folgende Koordinaten der Rotation in krummlinigen Koordinaten, die man auch formal als Determinante anschreiben kann:

**Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  in krummlinigen Koordinaten:**

$$\begin{aligned}\left\{\text{rot } \vec{F}\right\}_{u_1} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (F_{u_3} h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (F_{u_2} h_2) \right] \\ \left\{\text{rot } \vec{F}\right\}_{u_2} &= \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (F_{u_1} h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (F_{u_3} h_3) \right] \\ \left\{\text{rot } \vec{F}\right\}_{u_3} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_{u_2} h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (F_{u_1} h_1) \right]\end{aligned}\quad (3.99)$$

Als Determinante:

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}^{u_1} & h_2 \vec{e}^{u_2} & h_3 \vec{e}^{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_{u_1} & h_2 F_{u_2} & h_3 F_{u_3} \end{vmatrix} \quad (3.100)$$

**d) Laplace-Operator, angewendet auf ein Skalarfeld  $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ .** Die Wirkung des Laplace-Operators  $\Delta$  auf ein Skalarfeld  $\Phi$  ist definiert durch

$$\Delta \Phi = \text{div grad } \Phi.$$

Setzt man in dem Ausdruck für die Divergenz in krummlinigen Koordinaten 3.98 das entsprechende Ergebnis für den Gradienten 3.97, so erhält man

**Laplace eines skalaren Feldes in krummlinigen Koordinaten:**

$$\Delta \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (3.101)$$

**e) Laplace-Operator, angewendet auf ein Vektorfeld  $\vec{F} = \vec{F}(u_1, u_2, u_3)$ .** Die Wirkung des Laplace-Operators  $\Delta$  auf ein Vektorfeld  $\vec{F}$  ist definiert durch (siehe 2.26)

$$\Delta \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \text{rot rot } \vec{F}. \quad (3.102)$$

Während in kartesischen Koordinaten  $\left\{\Delta \vec{F}\right\}_i = \Delta F_i$  richtig ist, gilt die analoge Beziehung in *krummlinigen Koordinaten nicht!*

$$\left\{\Delta \vec{F}\right\}_{u_i} \neq \Delta F_{u_i}.$$

Daher muss die Wirkung des Laplace-Operators auf ein Vektorfeld in krummlinigen Koordinaten immer mittels berechnet 3.102 werden, wobei Gradient, Divergenz und Rotation durch Gleichungen 3.97, 3.98 und 3.99 bestimmt sind.

**Beispiel.** Wir berechnen den Laplace-Operator in parabolischen Koordinaten.<sup>1</sup> Parabolische Koordinaten sind durch folgende Koordinatentransformation definiert:

$$\begin{aligned}x_1(u, v, \varphi) &= \sqrt{uv} \cos \varphi \\x_2(u, v, \varphi) &= \sqrt{uv} \sin \varphi \\x_3(u, v, \varphi) &= \frac{1}{2}(u - v).\end{aligned}$$

Wir stellen die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien auf

$$\begin{aligned}\tau_i^u &= \left( \frac{v}{2\sqrt{uv}} \cos \varphi, \frac{v}{2\sqrt{uv}} \sin \varphi, \frac{1}{2} \right) \\ \tau_i^v &= \left( \frac{u}{2\sqrt{uv}} \cos \varphi, \frac{u}{2\sqrt{uv}} \sin \varphi, -\frac{1}{2} \right) \\ \tau_i^\varphi &= (-\sqrt{uv} \sin \varphi, \sqrt{uv} \cos \varphi, 0),\end{aligned}$$

und überprüfen leicht, dass es sich hierbei um orthogonale krummlinige Koordinaten handelt. Die metrischen Koeffizienten sind dann einfach gegeben durch

$$\begin{aligned}h_u &= \sqrt{\vec{\tau}^u \cdot \vec{\tau}^u} = \sqrt{\frac{u+v}{4u}} \\ h_v &= \sqrt{\vec{\tau}^v \cdot \vec{\tau}^v} = \sqrt{\frac{u+v}{4v}} \\ h_\varphi &= \sqrt{\vec{\tau}^\varphi \cdot \vec{\tau}^\varphi} = \sqrt{uv}\end{aligned}$$

Nach Gleichung 3.101 erhalten wir somit für den Laplace-Operator in parabolischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(u, v, \varphi) &= \frac{\sqrt{4u4v}}{(u+v)\sqrt{uv}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( u \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( v \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \frac{u+v}{4uv} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(u+v)} \left[ 4 \frac{\partial}{\partial u} \left( u \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial v} \left( v \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right) + \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \right].\end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung berechnen wir zur Übung noch  $\Delta\Phi$  für  $\Phi = |\vec{r}| = \frac{u+v}{2}$

$$\Delta \frac{u+v}{2} = \frac{1}{(u+v)} \left[ 4 \frac{\partial}{\partial u} \left( u \frac{1}{2} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial v} \left( v \frac{1}{2} \right) + 0 \right] = \frac{4}{u+v} = \frac{2}{|\vec{r}|}.$$

---

<sup>1</sup>Ein Anwendung von parabolischen Koordinaten besteht etwa in der quantenmechanischen Behandlung des Stark-Effekts. Der Starkeffekt zweiter Ordnung kann dann durch Separation des Laplace-Operators in parabolischen Koordinaten beschrieben werden.

### 3.2.7 Differenzialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Unter Berücksichtigung der metrischen Koeffizienten für Zylinderkoordinaten (3.65), leiten wir aus der allgemeinen Darstellung von Gradient (3.97), Divergenz (3.98), Rotation (3.99) und Laplace-Operator (3.101) die entsprechenden Darstellungen in Zylinderkoordinaten ab:

#### Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\{\text{grad } \Phi\}_\rho &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \\ \{\text{grad } \Phi\}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ \{\text{grad } \Phi\}_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.103}$$

#### Divergenz in Zylinderkoordinaten:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\tag{3.104}$$

#### Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\{\text{rot } \vec{F}\}_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \\ \{\text{rot } \vec{F}\}_\varphi &= \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \\ \{\text{rot } \vec{F}\}_z &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right]\end{aligned}\tag{3.105}$$

#### Laplace-Operator eines skalaren Feldes in Zylinderkoordinaten

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\tag{3.106}$$

**Beispiel.** Wir verwenden Zylinderkoordinaten um die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  außerhalb eines mit dem Strom  $I$  durchflossenen geraden Leiters im Abstand  $r$  zu berechnen. Dazu wenden wir das

Ampere'sche Gesetz an

$$I = \oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{x}.$$

Wir wählen als Fläche  $F$  eine Kreisscheibe mit dem Radius  $r$  normal zur Stromrichtung ( $\vec{e}^z$ ), das heißt, der Rand  $\partial F$  ist dann ein Kreis mit dem Radius  $r$  in der  $(x_1x_2)$ -Ebene. In Zylinderkoordinaten entspricht diese Kurve einer  $\varphi$ -Linie, dementsprechend ist das Wegelement gegeben durch (siehe 3.88)

$$d\vec{x} = ds_\varphi \vec{e}^\varphi = r d\varphi \vec{e}^\varphi.$$

In Zylinderkoordinaten ist

$$\vec{H} = H_\rho \vec{e}^\rho + H_\varphi \vec{e}^\varphi + H_z \vec{e}^z,$$

und daher

$$I = \oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi = 2\pi r H_\varphi,$$

woraus die bekannte Tatsache folgt:

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{bzw.} \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}^\varphi.$$

Zur Übung berechnen wir nun auch noch folgendes Integral (Satz von Stokes) in Zylinderkoordinaten:

$$I = \int_F \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{A}.$$

Das Flächenelement für den Kreis  $F$  ist (siehe 3.89)

$$d\vec{A} = dA_z \vec{e}^z = \rho d\rho d\varphi \vec{e}^z$$

Daher benötigen wir nur die  $z$ -Komponente der Rotation, die nach Gleichung 3.105 gegeben ist durch

$$\left\{ \text{rot } \vec{H} \right\}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi)$$

Hier haben wir berücksichtigt, dass wir aufgrund der Zylindersymmetrie eine Abhängigkeit  $H_\rho(\varphi)$  ausschließen können, wodurch die partielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial \rho}$  verschwindet. Wir erhalten somit

$$I = \int_F \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) = 2\pi [\rho H_\varphi]_0^r = 2\pi r H_\varphi(r).$$

### 3.2.8 Differenzialoperatoren in Kugelkoordinaten

Unter Berücksichtigung der metrischen Koeffizienten für Kugelkoordinaten (3.67), leiten wir aus der allgemeinen Darstellung von Gradient (3.97), Divergenz (3.98), Rotation (3.99) und Laplace-Operator (3.101) die entsprechenden Darstellungen in Kugelkoordinaten ab:

#### Gradient in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \{\text{grad } \Phi\}_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \{\text{grad } \Phi\}_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \\ \{\text{grad } \Phi\}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3.107)$$

#### Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_\vartheta) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (3.108)$$

#### Rotation in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \{\text{rot } \vec{F}\}_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \\ \{\text{rot } \vec{F}\}_\vartheta &= \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right] \\ \{\text{rot } \vec{F}\}_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r F_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \end{aligned} \quad (3.109)$$

#### Laplace-Operator eines skalaren Feldes in Kugelkoordinaten

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (3.110)$$

**Beispiel.** Zum Abschluss dieses Kapitels berechnen wir das Gravitationspotential  $\Phi$  einer kugelsymmetrischen Massenverteilung  $\rho(r)$ , die folgende Form hat:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{R} r & , r \leq R \\ 0 & , r > R. \end{cases}$$

Hierbei sind  $\rho_1$  und  $\rho_2$  Konstante, die die Massendichte im Zentrum ( $r = 0$ ) und bei ( $r = R$ ) angeben, wobei die Dichte von  $r = 0$  bis  $r = R$  linear abnimmt ( $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 > 0$ ).

Wir berechnen zunächst die Gesamtmasse  $M$  dieser Massenverteilung

$$M = \int \rho dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_{r=0}^{\infty} r^2 dr \rho(r) = 4\pi \int_0^R r^2 \left( \rho_1 - \frac{\Delta\rho}{R} r \right) dr = 4\pi \frac{R^3}{3} \left( \rho_1 - \frac{3}{4} \Delta\rho \right).$$

Um das Gravitationspotential zu berechnen, müssen wir die Poisson-Gleichung integrieren  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ . Da es sich um eine kugelsymmetrische Massenverteilung handelt,  $\rho = \rho(r)$ , wird auch das Potential nur von  $r$  und *nicht* von  $\vartheta$  und  $\varphi$  abhängen. Damit vereinfacht sich nach Gleichung 3.110 die Berechnung des Laplaceoperators und die Poisson-Gleichung wird zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho(r).$$

Wir lösen diese Gleichung durch zweimaliges Integrieren zunächst für den Innenbereich  $r \leq R$  und erhalten die Funktion  $\Phi^{(i)}(r)$ , und anschließend für den Außenbereich  $r > R$ , wo wir  $\Phi^{(a)}(r)$  erhalten. Die Integrationskonstanten wählen wir so, dass  $\Phi^{(i)}(r)$  and  $r = R$  stetig in  $\Phi^{(a)}(r)$  übergeht.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi^{(i)}}{dr} \right) &= 4\pi G \left( \rho_1 - \frac{\Delta\rho}{R} r \right) & / \times r^2 & / \int dr \\ r^2 \frac{d\Phi^{(i)}}{dr} &= 4\pi G \left( \rho_1 \frac{r^3}{3} - \frac{\Delta\rho}{R} \frac{r^4}{4} \right) + C_1^{(i)} & / \div r^2 & / \int dr \\ \Phi^{(i)}(r) &= 4\pi G \left( \rho_1 \frac{r^2}{6} - \frac{\Delta\rho}{R} \frac{r^3}{12} \right) - \frac{C_1^{(i)}}{r} + C_2^{(i)}. \end{aligned}$$

Das Potential  $\Phi^{(a)}(r)$  für  $r > R$  erhalten wir zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi^{(a)}}{dr} \right) &= 0 & / \times r^2 & / \int dr \\ r^2 \frac{d\Phi^{(a)}}{dr} &= C_1^{(a)} & / \div r^2 & / \int dr \\ \Phi^{(a)}(r) &= -\frac{C_1^{(a)}}{r} + C_2^{(a)}. \end{aligned}$$

Wir bestimmen die vier Integrationskonstanten  $C_1^{(i)}$ ,  $C_2^{(i)}$ ,  $C_1^{(a)}$ , und  $C_2^{(a)}$  durch Randbedingungen für  $r = 0$  und  $r \rightarrow \infty$ , die Stetigkeit bei  $r = R$ , und durch die Anwendung des Gauß'schen Satzes für  $r > R$ . Die Dichteverteilung  $\rho(r)$  ist regulär für  $r = 0$ , daher erwarten wir dies auch für das Potential. Aus dieser Forderung folgt, dass  $C_1^{(i)} = 0$  gelten muss. Für  $r \rightarrow \infty$  soll das Potential verschwinden, also  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi^{(a)}(r) = 0$ , woraus wir  $C_2^{(a)} = 0$  ableiten können. Um  $C_1^{(a)}$  zu bestimmen, wenden wir den Satz von Gauß für  $r > R$  an:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \text{Kugel}} \vec{g} \cdot d\vec{A} &= \int_{\text{Kugel}} \operatorname{div} \vec{g} \, dV = -4\pi GM \\ 4\pi r^2 g(r) &= -4\pi GM. \end{aligned}$$

Mit  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$  und mit Gleichung 3.107 für die  $r$ -Koordinate des Gradienten in Kugelkoordinaten folgt damit für  $\Phi^{(a)}(r)$ :

$$\Phi^{(a)}(r) = - \int dr g(r) = + \int dr \frac{GM}{r^2} = -\frac{GM}{r} + c.$$

Damit gilt für die Konstante  $C_1^{(a)} = GM$ . Die verbleibende Integrationskonstante  $C_2^{(i)}$  bestimmen wir, indem wir die Stetigkeit von  $\Phi(r)$  an der Stelle  $r = R$  fordern:

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(R) &= \Phi^{(a)}(R) \\ 4\pi G \left( \rho_1 \frac{R^2}{6} - \frac{\Delta\rho}{R} \frac{R^3}{12} \right) + C_2^{(i)} &= -\frac{GM}{R}. \end{aligned}$$

Führen wir das Volumen  $V = \frac{4}{3}R^3\pi$  einer Kugel mit dem Radius  $R$  ein, so finden wir für  $C_2^{(i)}$ :

$$C_2^{(i)} = -\frac{1}{R} \left[ 1 + \frac{V}{M} \left( \frac{\rho_1}{2} - \frac{\Delta\rho}{4} \right) \right].$$

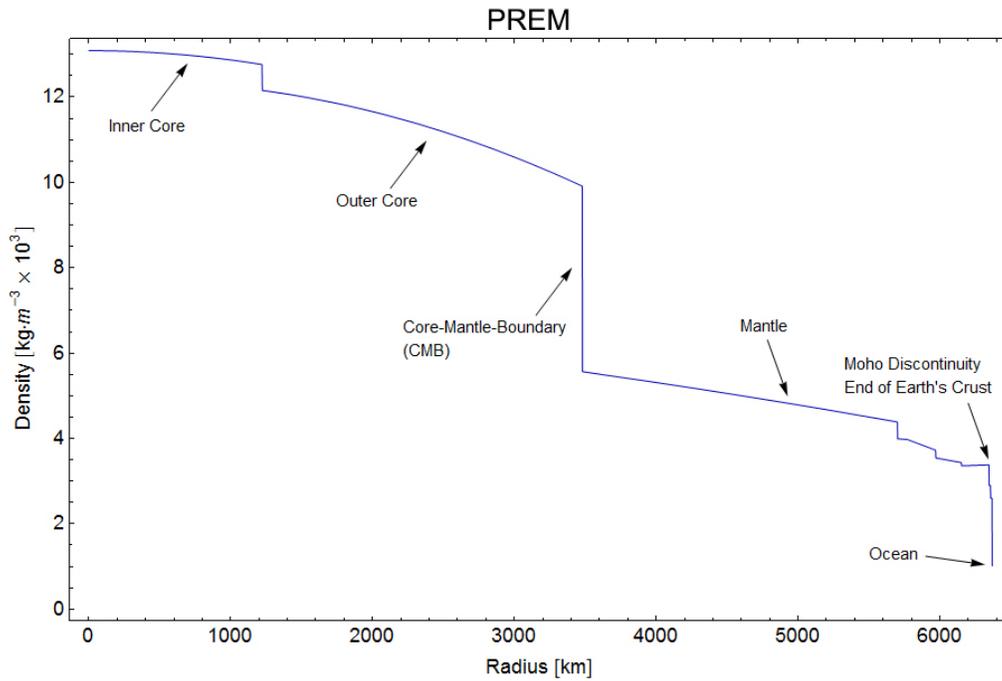
Und somit erhalten wir für das gesuchte Potential

$$\Phi(r) = \begin{cases} \Phi^{(i)}(r) = VG \left[ \rho_1 \frac{r^2}{2R^3} - \Delta\rho \frac{r^3}{4R^4} \right] - \frac{GM}{R} \left[ 1 + \frac{V}{M} \left( \frac{\rho_1}{2} - \frac{\Delta\rho}{4} \right) \right] & , r \leq R \\ \Phi^{(a)}(r) = -\frac{GM}{r} & , r > R \end{cases}$$

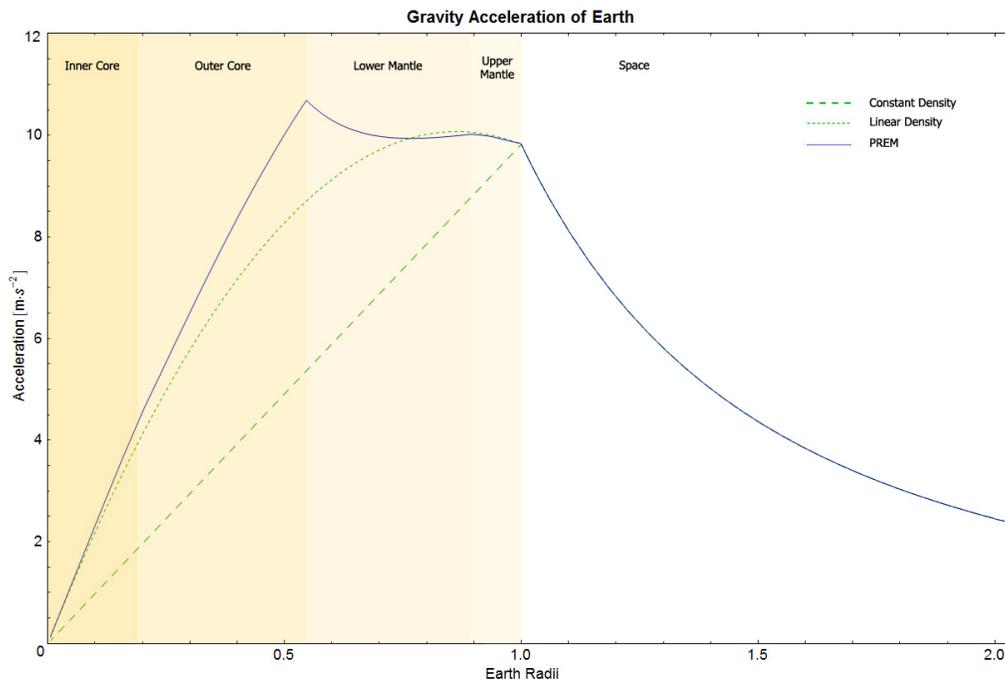
Wir berechnen noch den Gradienten des Potentials, also die Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ . Wegen 3.107 und  $\Phi = \Phi(r)$  ist nur die  $r$ -Koordinate ungleich Null, für die wir folgenden Ausdruck erhalten:

$$g_r(r) = \begin{cases} -VG \left[ \rho_1 \frac{r}{R^3} - \Delta\rho \frac{3r^2}{4R^4} \right] & , r \leq R \\ -\frac{GM}{r^2} & , r > R \end{cases}$$

Zum Abschluss noch eine realistische Darstellung der radialen Dichteverteilung der Erde ...



... sowie die daraus folgende Gravitationsbeschleunigung (siehe [Wikipedia](#)). Die grün strichlierte Linie (*constant density*) entspricht unserer Lösung für  $\Delta\rho = 0$  und die grün gepunktete Linie (*linear density*) unserer Lösung für  $\Delta\rho \neq 0$ . Die blaue Linie folgt aus der genauen Dichteverteilung im Rahmen des PREM-Modells (*Preliminary Reference Earth Model*):





# Kapitel 4

## Funktionentheorie

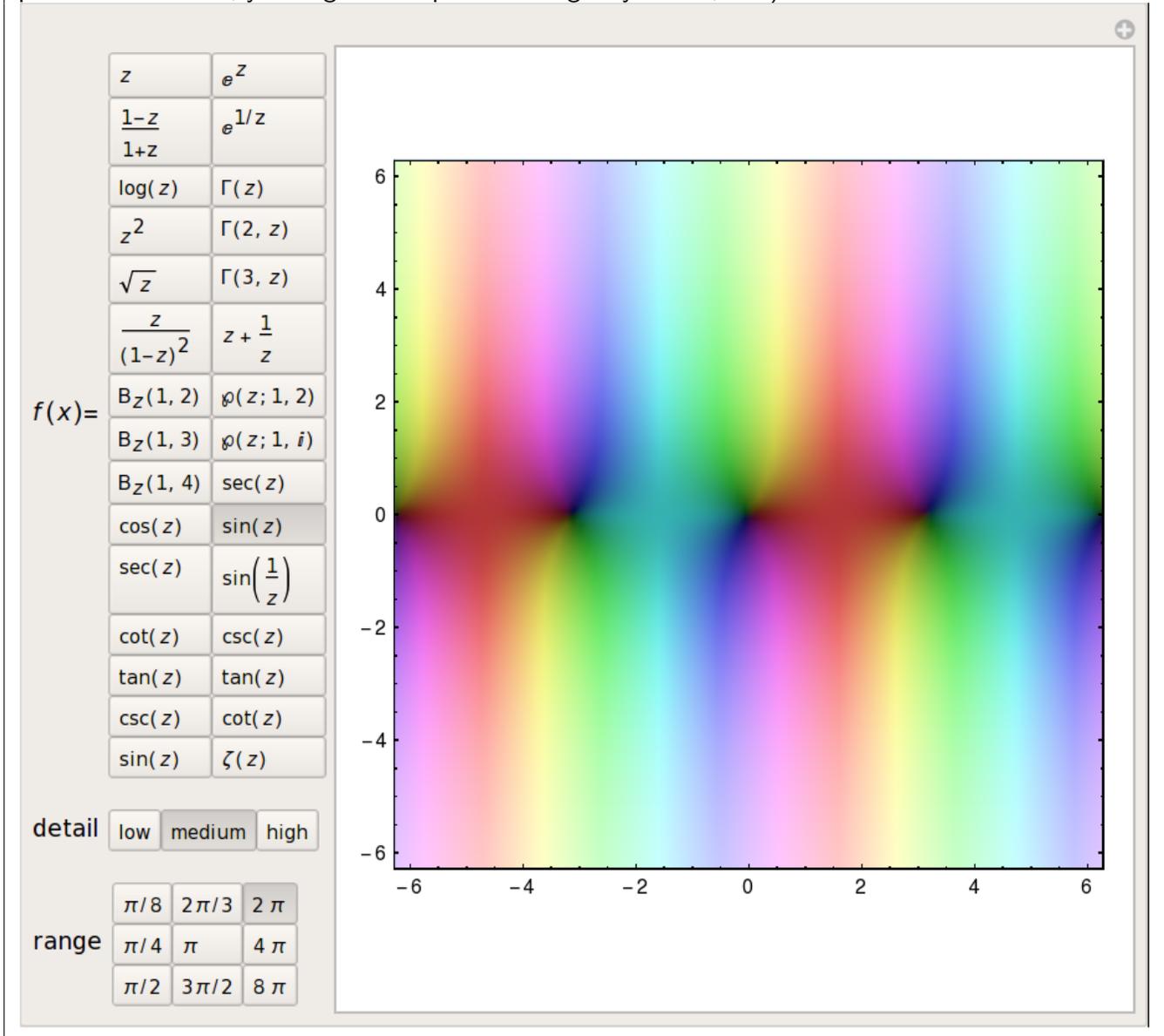
Die Funktionentheorie befasst sich mit der Theorie differenzierbarer komplexwertiger Funktionen mit einer komplexen Variablen. Eine komplexe Funktion ordnet einer komplexen Zahl eine weitere komplexe Zahl zu. Da jede komplexe Zahl durch zwei reelle Zahlen in der Form  $x + iy$  geschrieben werden kann, lässt sich eine allgemeine Form einer komplexen Funktion durch

$$x + iy \mapsto f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (4.1)$$

darstellen. Dabei sind  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  reelle Funktionen, die von zwei reellen Variablen  $x$  und  $y$  abhängen.  $u(x, y)$  heißt der Realteil und  $v(x, y)$  der Imaginärteil der Funktion. Insofern ist eine komplexe Funktion nichts anderes als eine Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  (also eine Abbildung, die zwei reellen Zahlen wieder zwei reelle Zahlen zuordnet). Tatsächlich könnte man die Funktionentheorie auch mit Methoden der reellen Analysis aufbauen. Der Unterschied zur reellen Analysis wird erst deutlicher, wenn man komplex-differenzierbare Funktionen betrachtet und dabei die multiplikative Struktur des Körpers der komplexen Zahlen ins Spiel bringt, die dem Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  fehlt. Die grafische Darstellung komplexer Funktionen ist etwas umständlicher als gewohnt, da nun vier Dimensionen wiedergegeben werden müssen. Aus diesem Grund behilft man sich mit Farbtönen oder -sättigungen wie in CDF 9 dargestellt.

**CDF 9. Darstellung komplexer Funktionen** [ComplexFunctions.cdf](#)

A domain coloring or phase portrait is a popular and attractive way to visualize functions of a complex variable. The absolute value (modulus) of the function at a point is represented by brightness (dark for small modulus, light for large modulus), while the argument (phase) is represented by hue (red for positive real values, yellow-green for positive imaginary values, etc.).



## 4.1 Analytische Funktionen

### 4.1.1 Stetigkeit von komplexen Funktionen

**Definition.** Eine komplexe Funktion  $f(z)$

$$f: z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (4.2)$$

wobei  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  reelle Funktionen seien, ist *stetig* an dem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (4.3)$$

*richtungsunabhängig* und *endlich* ist. Das heißt, für beliebig kleine Werte  $\varepsilon > 0$  existiert ein reelle Zahl  $\delta > 0$ , so dass für  $|z - z_0| < \delta$  auch  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  gilt. Die Funktion kommt also dem Wert  $f(z_0)$  beliebig nahe, wenn sich  $z$  genügend nahe  $z_0$  nähert, und zwar unabhängig von der Richtung.

**Bsp 1.** Wir untersuchen die Funktion  $f(z) = 1 - z^2$  auf Stetigkeit an der Stelle  $z_0 = i$ . Dazu wählen wir ein  $z = z_0 + \Delta z = i + \Delta z$ , wobei wir  $|z - z_0| = |\Delta z| < \delta$  beliebig klein werden lassen, und betrachten mit  $f(z) = 2 - 2i\Delta z - (\Delta z)^2$  und  $f(z_0) = 2$

$$|f(z) - f(z_0)| = |-2i\Delta z - (\Delta z)^2| = \underbrace{|\Delta z|}_{< \delta} \cdot \underbrace{|-2i - \Delta z|}_{\text{beschränkt}} < \varepsilon,$$

womit die Stetigkeit an dem Punkt  $z_0 = i$  gezeigt ist.

**Bsp 2.** Analog untersuchen wir die Funktion  $f(z) = |z|$  auf Stetigkeit an der Stelle  $z_0 = 0$ . Mit  $z = \Delta z$ , und  $f(z) = |\Delta z|$  und  $f(0) = 0$  finden wir

$$|f(z) - f(z_0)| = ||\Delta z| - 0| = \underbrace{|\Delta z|}_{< \delta} < \varepsilon,$$

womit wieder die Stetigkeit an dem Punkt  $z_0 = 0$  gezeigt ist.

**Bsp 3.** Schließlich untersuchen wir noch die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z} & \text{für } z \neq 0 \\ 1 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit in dem Punkt  $z_0 = 0$ . Dazu wählen wir  $z = \Delta z = \delta e^{i\varphi}$ , und finden

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \frac{\delta e^{-i\varphi}}{\delta e^{i\varphi}} - 1 \right| = |e^{-2i\varphi} - 1| \not\leq \varepsilon.$$

In diesem Fall kann der Abstand zwischen  $f(z)$  und  $f(z_0)$  also nicht beliebig klein gemacht werden, womit die Funktion an dem Punkt  $z_0 = 0$  nicht stetig ist.

### 4.1.2 Differenzierbarkeit von komplexen Funktionen

Nachdem wir den Stetigkeitsbegriff für komplexe Funktionen eingeführt haben, können wir nun auch definieren, was wir unter der Differenzierbarkeit einer komplexen Funktion verstehen.

**Definition.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge der komplexen Ebene und  $z \in U$  ein Punkt dieser Teilmenge. Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt komplex differenzierbar im Punkt  $z$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \equiv \frac{df(z)}{dz}. \quad (4.4)$$

mit  $\Delta z \in \mathbb{C}$  existiert. Man bezeichnet ihn dann als  $f'(z)$ . Analog zur Definition der Stetigkeit muss auch der Grenzwert unabhängig von der Richtung sein, mit der man sich dem Punkt  $z$  annähert. Die Funktion  $f$  heißt dann *analytisch* (oder auch *holomorph*) im Punkt  $z$ , falls eine Umgebung von  $z$  existiert, in der  $f$  komplex differenzierbar ist. Ist  $f$  auf ganz  $U$  holomorph, so nennt man  $f$  holomorph. Ist weiter  $U = \mathbb{C}$ , so nennt man  $f$  eine ganze Funktion.

**Bsp 1.** Wir untersuchen, ob die Funktion  $f(z) = z^2$  differenzierbar (=analytisch) ist:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 2z + \Delta z = 2z.$$

Der Grenzwert ergibt unabhängig von der Richtung der Annäherung  $\Delta z$  immer denselben Wert, womit gezeigt ist, dass die Funktion  $f(z) = z^2$  in ganz  $\mathbb{C}$  analytisch ist.

**Bsp 2.** Wir untersuchen nun die Funktion  $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$  auf Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z\overline{\Delta z} + \bar{z}\Delta z + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= \bar{z} + z \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{\Delta z} \end{aligned}$$

Während der letzte Term in obiger Rechnung für  $\Delta z \rightarrow 0$  verschwindet, ist der Grenzwert im mittleren Term von der Richtung  $\varphi$  abhängig, mit der man sich  $\Delta z \rightarrow 0$  annähert (siehe oben). Somit ist die Funktion  $f(z) = |z|^2$  nicht differenzierbar (nicht analytisch).

**Cauchy-Riemann-Bedingungen.** Eine alternative Möglichkeit die Analytizität einer Funktion  $f(z)$  zu überprüfen, bieten die sogenannten Cauchy-Riemann-Bedingungen. Wegen  $z = x + iy$  und  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  gilt ja für die partiellen Ableitung von  $f$  nach  $x$  bzw.  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

Andererseits gilt nach der Kettenregel auch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial(x + iy)}{\partial x} = \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{dz} \frac{\partial(x + iy)}{\partial y} = i \frac{df}{dz}.$$

Damit die Gleichungen miteinander verträglich sind, muss somit gelten

$$i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Da  $u$  und  $v$  reelle Funktionen sind, ergeben der reelle und der imaginäre Teil der Gleichung die sogenannten *Cauchy-Riemann-Bedingungen*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.5)$$

Man kann allgemein beweisen, dass zwei stetige reelle Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$ , die auch stetige erste partielle Ableitungen haben und die Cauchy-Riemann-Bedingungen 4.5 erfüllen, eine analytische Funktion definieren.

**Bsp 1.** Wir betrachten nochmals  $f(z) = z^2$  und untersuchen, ob die Cauchy-Riemann-Bedingungen erfüllt sind.

$$f(z) = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{=u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{=v(x,y)} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Somit ist die Funktion  $f(z) = z^2$  analytisch auf ganz  $\mathbb{C}$ .

**Bsp 2.** Wir betrachten wieder  $f(z) = |z|^2$  und untersuchen, ob die Cauchy-Riemann-Bedingungen erfüllt sind.

$$f(z) = \underbrace{x^2 + y^2}_{=u(x,y)} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \neq -2y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Somit ist die Funktion  $f(z) = |z|^2$  nicht analytisch auf ganz  $\mathbb{C}$ . Allgemein gilt, dass Funktionen des Betrags von  $z$ , also  $f(|z|)$  auf nicht analytische Funktionen führen.

**Bsp 3.** Wir untersuchen  $f(z) = \frac{1}{z}$  auf Analytizität.

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{\underbrace{x^2 + y^2}_{=u(x,y)}} + i \frac{-y}{\underbrace{x^2 + y^2}_{=v(x,y)}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Somit ist die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  analytisch in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Im Punkt  $z = 0$  ( $x = 0$  und  $y = 0$ ) ist die Funktion und damit auch ihre Ableitung nicht definiert. In diesem Zusammenhang sagen wir, die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  hat eine *Polstelle* (oder einfach: einen *Pol*) bei  $z = 0$ .

Man kann die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auch in anderen Koordinaten als den kartesischen darstellen. Im Folgenden wird die Darstellung in Polarkoordinaten erläutert. Eine Darstellung einer komplexen Zahl in Polarform ist  $z = re^{i\varphi}$ . Dies führt dazu, dass man die partiellen Ableitungen von  $f(r, \varphi)$  nach  $r$  beziehungsweise  $\varphi$  zu betrachten hat. Für diese gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial r} = e^{i\varphi} f'(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = ire^{i\varphi} f'(z).$$

Wegen  $\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$  und mit  $f(r, \varphi) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$  folgt daraus:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

Da beide Klammern verschwinden müssen, folgen daraus die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (4.6)$$

Diese Form der Cauchy-Riemannschen Bedingungen kann etwa dazu benutzt werden, um zu zeigen dass die komplexe Wurzelfunktion  $f(z) = \sqrt{z}$  in allen Punkten bis auf  $z = 0$  und  $z = \infty$  analytisch ist.

## 4.2 Komplexe Integration

### 4.2.1 Linienintegral

Wir wollen nun komplexe Funktionen  $f(z)$  integrieren. Während die Integration von reellen Funktionen entlang der reellen Achse verläuft, beschreibt der Integrationsweg für die komplexe Integration im allgemeinen eine Kurve in der komplexen Ebene. Diese Kurve  $\mathcal{C}$  beschreiben wir durch eine Parameterdarstellung in der Form:

$$\mathcal{C} : z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b].$$

Hierbei seien die reellen Funktionen  $x(t)$  und  $v(t)$  zumindest stückweise glatt, d.h. also nach  $t$  differenzierbar bis auf endlich viele Stellen  $t_i$ , an denen die Kurve einen "Knick" aufweisen darf. Wir unterscheiden in weiterer Folge zwischen *offenen* Wegen, bei denen der Anfangs- und Endpunkt nicht gleich sind ( $z(a) \neq z(b)$ ) und *geschlossenen* Wegen, bei denen Anfangs- und Endpunkt des Weges ident sind ( $z(a) = z(b)$ ). Einen geschlossenen Weg bezeichnen wir auch als *Schlinge*, und falls es dabei keine Überkreuzungen gibt als *einfache Schlinge*. Für Schlingen definieren wir die Umlaufrichtung gegen den Uhrzeigersinn als die *positive Richtung*.

**Bsp 1.** Wir berechnen das Integral der Funktion  $f(z) = z^2$  entlang des Weges  $\mathcal{C} : z(t) = t + 2it$  für  $t \in [0, 1]$ . (Skizziere den Weg in der komplexen Ebene!)

Mit  $z^2 = (t + 2it)^2 = (1 + 2i)^2 t^2$  und  $dz = dt + 2idt = (1 + 2i)dt$  finden wir

$$\int_{\mathcal{C}} z^2 dz = \int_0^1 (1 + 2i)^2 t^2 (1 + 2i) dt = \underbrace{(1 + 2i)^3}_{=-11-2i} \underbrace{\int_0^1 t^2 dt}_{=\frac{1}{3}} = -\frac{11}{3} - i\frac{2}{3}.$$

**Bsp 2.** Wir berechnen das Integral derselben Funktion  $f(z) = z^2$  über eine einfache Schlinge (einen Kreis mit dem Radius  $r = 1$ )  $\mathcal{C} : z(t) = e^{it}$  für  $t \in [0, 2\pi]$ .

Mit  $z^2 = e^{2it}$  und  $dz = ie^{it} dt$  finden wir

$$\oint_{\mathcal{C}} z^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{2it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = \frac{i}{3i} e^{3it} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Es wäre doch schön gewesen, wenn wir uns die Rechnung sparen hätten können und vorher schon gewusst hätten, dass das Integral 0 ergibt! Genau das leistet der Integralsatz von Cauchy, den wir im nächsten Kapitel kennenlernen.

### 4.2.2 Integralsatz von Cauchy

Der Cauchysche Integralsatz (nach Augustin Louis Cauchy) ist einer der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie. Er handelt von Kurvenintegralen für holomorphe (d.h. auf einer offenen Menge komplex-differenzierbare) Funktionen. Im Kern besagt er, dass zwei dieselben Punkte verbindende Wege das gleiche Wegintegral besitzen, falls die Funktion überall zwischen den zwei Wegen holomorph ist. Der Satz gewinnt seine Bedeutung unter anderem daraus, dass man ihn zum Beweis der Cauchyschen Integralformel (Kap. 4.2.3) und des Residuensatzes (Kap. 4.2.4) benutzt. Alternativ kann man den Integralsatz von Cauchy auch wie folgt definieren:

**Satz.** Wenn  $f(z)$  auf einer einfachen Schlinge  $\mathcal{C}$  und in dem darin eingeschlossenen (einfach zusammenhängenden) Gebiet analytisch  $\mathcal{F}$  ist, so gilt:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0. \quad (4.7)$$

Wir beweisen den Integralsatz von Cauchy mit Hilfe des bereits bekannten Integralsatzes von Green in der Ebene (vgl. 2.56), den wir wiederum aus dem Stokes'schen Integralsatz abgeleitet haben:

$$\oint_{\mathcal{C}} (u dx + v dy) = \iint_{\mathcal{F}} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Satz von Green})$$

Mit  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$  und  $dz = dx + idy$  berechnen wir

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \oint_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \oint_{\mathcal{C}} (v dx + u dy) \\ &= \iint_{\mathcal{F}} \underbrace{\left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{=0} dx dy + i \iint_{\mathcal{F}} \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0} dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir zunächst den Satz von Green (2.56) und anschließend die Cauchy-Riemann Bedingungen (4.5) verwendet.

**Bsp 1.** Was passiert, wenn wir über eine Schlinge integrieren, in deren Inneren eine Funktion  $f(z)$  nicht überall analytisch ist? Als erstes Beispiel wählen wir die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$ , die bei  $z = 0$  eine einfache Polstelle aufweist. Mit  $\mathcal{C} : z(t) = e^{it}$  für  $t \in [0, 2\pi]$  und  $dz = ie^{it} dt$  finden wir

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = 2\pi i.$$

**Bsp 2.** Wir wählen nun als Funktion  $f(z) = \frac{1}{z^2}$ , die bei  $z = 0$  eine doppelte Polstelle aufweist. Mit der gleichen Schlinge  $\mathcal{C} : z(t) = e^{it}$  für  $t \in [0, 2\pi]$  und  $dz = ie^{it} dt$  erhalten wir diesmal

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{2it}} = i \int_0^{2\pi} e^{-it} dt = -e^{-it} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

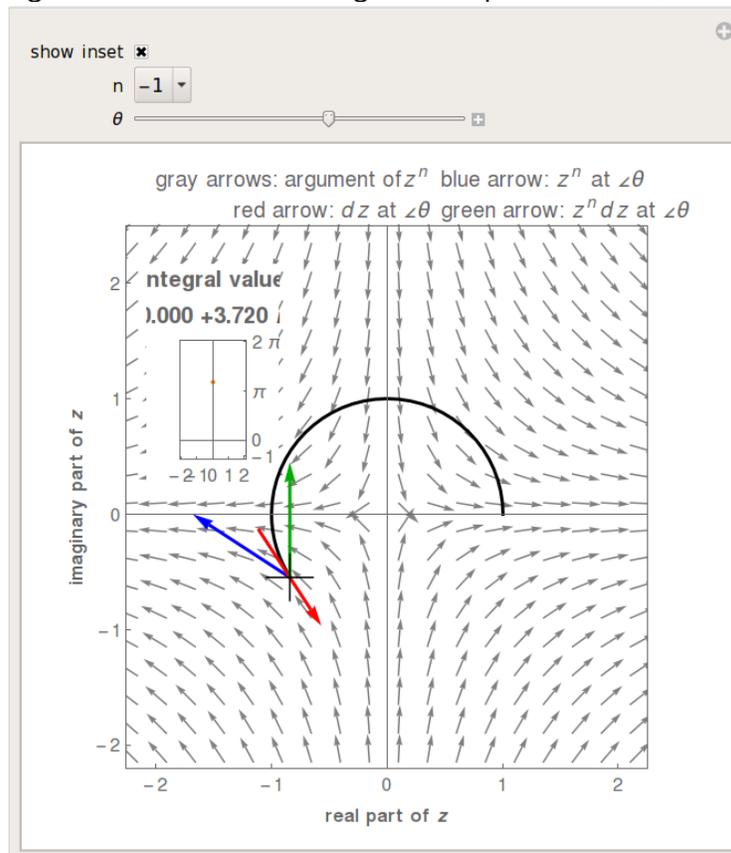
Aus diesen beiden Beispielen schließen wir dass offenbar gilt

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n \neq 1, \end{cases} \quad (4.8)$$

falls die einfache Schlinge  $\mathcal{C}$  die Polstelle bei  $z = 0$  einschließt und in positiver Richtung durchlaufen wird.

### CDF 10. Integration von $z^n$ um den Ursprung [IntegratePower.cdf](#)

This Demonstration shows some geometric relationships between terms in the contour integral around the origin of  $f(z) = z^n$ . Note in particular that the complete integral around the origin takes on a nonzero value only when  $n = -1$ . In this case the  $z^n$  term (green) and the  $dz$  term (red) rotate in such a way that their product  $z^n dz$  (green) points in a fixed direction. In all other cases, the product rotates an integer number of times along the complete contour, resulting in a zero value.

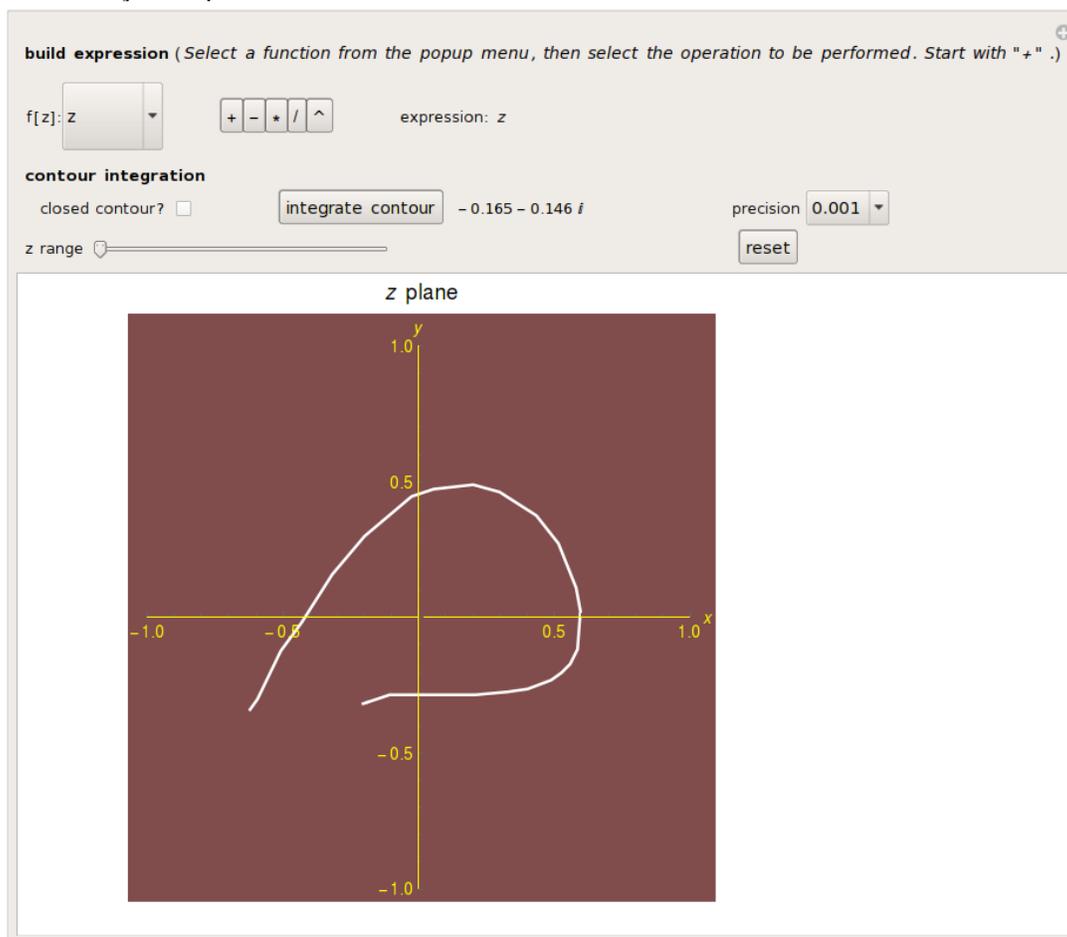


Aus dem Integralsatz von Cauchy 4.7 folgt auch die Tatsache, dass für analytische Funktionen das Integral über einen nicht geschlossenen Weg nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges abhängen. Genauer gesagt dürfen wir Integrationswege im Analytizitätsgebiet des Integranden *homotop* verformen.

**Definition.** Zwei Wege (auch: Konturen)  $C_1$  und  $C_2$  in einem Gebiet  $A \subseteq \mathbb{C}$  heißen **homotop**, wenn sie umkehrbar eindeutig ineinander deformiert werden können. Das heißt, jedem Parameterwert auf  $C_1$  entspricht genau einem Parameterwert auf  $C_2$ . Zu beachten ist die Konturen dabei nicht über etwaige Löcher in  $A$ , etwa hervorgerufen durch isolierte Singularitäten einer Funktion  $f(z)$ , verformt werden dürfen!

### CDF 11. Integration in der komplexen Ebene [ContourIntegration.cdf](#)

Functions of a complex variable can be integrated like functions of a real variable. In the complex case however, the independent variable can vary in two dimensions (real and imaginary). As a result, integration is defined over a contour or over a region rather than just a line segment in one dimension. You can build up a function, draw a contour on the graph, and then integrate it over the contour. Did it yield what you expected?



### 4.2.3 Integralformel von Cauchy

Die Cauchysche Integralformel ist eine der fundamentalen Aussagen der Funktionentheorie und besagt in ihrer schwächsten Form, dass die Werte einer holomorphen Funktion  $f$  im Inneren einer Kreisscheibe bereits durch ihre Werte auf dem Rand dieser Kreisscheibe bestimmt sind.

Wir bemerken zunächst, dass wir jede analytische Funktion  $f(z)$  an Punkten  $z_0$  in ihrem Analytizitätsgebiet in folgender Form schreiben können:

$$f(z) = f(z_0) + g(z)(z - z_0).$$

Innerhalb ihres Analytizitätsgebiets können wir die Funktion  $f(z)$  nämlich als Potenzreihe darstellen und entsprechend umformen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = f(z_0) + \underbrace{\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1} \right]}_{=g(z)} (z - z_0).$$

Bilden wir nun mittels Division durch  $(z - z_0)$  die neue Funktion

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + g(z),$$

so sehen wir, dass  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  überall analytisch ist bis auf die isolierte Polstelle 1. Ordnung am Punkt  $z_0$ . Wir nun diese Funktion über eine einfache Schlinge, die den Punkt  $z_0$  umschließt, für die wir einen Einheitskreis um mit dem Mittelpunkt  $z_0$  wählen, also  $\mathcal{C} : z(t) = z_0 + e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Mit  $dz = ie^{it} dt$  finden wir

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} g(z) dz}_{=0} = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0)}{e^{it}} ie^{it} dt = 2\pi i f(z_0).$$

Hierbei haben wir benutzt, dass  $g(z)$  überall analytisch ist und somit nach dem Integralsatz von Cauchy (4.7) das Integral über die Schlinge  $\mathcal{C}$  verschwindet. Und für die verbleibende Integration über  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  können wir jede einfache Schlinge, die  $z_0$  einschließt homotop zu dem Einheitskreis um  $z_0$  verformen. Wir fassen dieses Ergebnis als *Integralformel von Cauchy* zusammen:

**Satz.** In der **Integralformel von Cauchy** betrachtet man eine im einfach zusammenhängenden Integrationsgebiet  $A$  und an dessen Rand  $\mathcal{C} = \partial A$  analytische Funktion  $f(z)$ . Es gilt dann für jeden Punkt  $z_0$  in Inneren von  $A$ :

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (4.9)$$

Die bemerkenswerte Aussage dieser Formel ist, dass die Kenntnis der Funktionswerte am Rande eines Analytizitätsgebiets ausreicht (linke Seite von 4.9), um alle Funktionswerte im Inneren (rechte Seite von 4.9) zu bestimmen!

Andererseits können wir die Beziehung 4.9 auch dazu benutzen um Integrale zu berechnen, wie das folgende Beispiel illustriert.

**Bsp.** Welchen Wert hat das Integral

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{2z - e} dz,$$

wenn die Kurve ein Kreis um den Ursprung mit (a) dem Radius 1 oder (b) dem Radius 2 ist? Man sieht sofort, dass der Pol des Integranden bei  $z_0 = \frac{e}{2}$  liegt. D.h. im Falle (a) ist der Integrand innerhalb von  $|z| \leq 1$  analytisch und damit verschwindet nach 4.7 das Integral. Für den Kreis mit  $|z| = 2$  liegt der Pol bei  $z_0 = \frac{e}{2}$  innerhalb der Kontur, und man erhält

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{2z - e} dz = \frac{1}{2} \oint_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z - \frac{e}{2}} dz = \frac{1}{2} 2\pi i e^{-\frac{e}{2}} = \frac{i\pi}{e^{\frac{e}{2}}}.$$

Wir können die Integralformel von Cauchy (4.9) noch erweitern, indem wir die Gleichung 4.9 nach  $z_0$  partiell differenzieren. Weil es sich nach Voraussetzung bei  $f(z)$  um eine analytische Funktion handelt, ist das immer möglich, und wir erhalten:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = 2\pi i \frac{df(z_0)}{dz_0}$$

Durch weiteres Ableiten und Umstellen der Gleichung gelangen wir schließlich zu folgender erweiterter Form des Integralsatzes von Cauchy.

**Satz.** Sei  $f(z)$  eine im Integrationsgebiet  $A$  und an dessen Rand  $C = \partial A$  analytische Funktion, dann gilt für jeden Punkt  $z_0$  in Inneren von  $A$ :

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n f(z_0)}{dz_0^n}. \quad (4.10)$$

**Bsp.** Die Anwendung von 4.10 im folgenden Integral ergibt

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z - 1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2 e^{2z_0}}{dz_0^2} \right|_{z_0=1} = \frac{2\pi i}{2!} 2^2 e^2 = 4e^2 \pi i.$$

### 4.2.4 Residuensatz

Der Residuensatz ist ein wichtiger Satz der Funktionentheorie und stellt eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel dar. Seine Bedeutung liegt nicht nur in den weitreichenden Folgen innerhalb der Funktionentheorie, sondern auch in der Berechnung von Integralen über reelle Funktionen. Er besagt, dass das Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve über eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion lediglich vom Residuum in den Singularitäten im Innern der Kurve und der Windungszahl der Kurve um diese Singularitäten abhängt. Anstelle eines Kurvenintegrals muss man also nur Residuen und Windungszahlen berechnen, was in vielen Fällen einfacher ist.

**Satz.** Eine im Gebiet  $A$  meromorphe (d.h. bis auf isolierte Singularitäten analytische) und am Rand  $\mathcal{C} = \partial A$  analytische Funktion  $f(z)$  hat das Integral:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_k R(z_k), \quad (4.11)$$

wobei die Summe über die *Residuen* der Pole der Funktion in  $A$  läuft (**Residuensatz**).

Besitzt die Funktion  $f(z)$  bei  $z_0$  einen Pol erster Ordnung, so ist das Residuum durch folgenden Grenzwert gegeben:

$$R(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (4.12)$$

Handelt es sich bei der Singularität um einen Pol der Ordnung  $n$ , so kann man das Residuum nach folgender Formel berechnen

$$R(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]. \quad (4.13)$$

**Bsp 1.** Wir bestimmen das Residuum der Funktion  $f(z) = \frac{\cos z}{z}$  an der einfachen Polstelle  $z_0 = 0$ :

$$R(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\cos z}{z} = 1. \quad \Rightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos z}{z} dz = \begin{cases} 2\pi i & \mathcal{C} \text{ enthält } z = 0 \\ 0 & \mathcal{C} \text{ enthält } z = 0 \text{ nicht.} \end{cases}$$

**Bsp 2.** Die Funktion  $f(z) = \frac{e^z}{(z^2-1)}$  hat einfache Polstelle bei  $z_0 = \pm 1$ . Dem entsprechend erhalten wir für die beiden Residuen:

$$\begin{aligned} R(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} = \frac{e}{2}. \\ R(-1) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} = -\frac{e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

**Bsp 3.** Wir suchen das Residuum der Funktion

$$f(z) = \frac{z \sin z}{(z-1)^2}.$$

Diese Funktion besitzt eine Polstelle 2. Ordnung an der Stelle  $z_0 = 1$ . Nach 4.13 erhalten wir

$$R(2) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{z \sin z}{(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (\sin z + z \cos z) = \sin(1) + \cos(1).$$

**Anwendung.** Eine wichtige Anwendung des Residuensatzes besteht darin, dass mit seiner Hilfe auch viele reelle uneigentliche Integrale gelöst werden können. Betrachten wir etwa das uneigentliche Integral

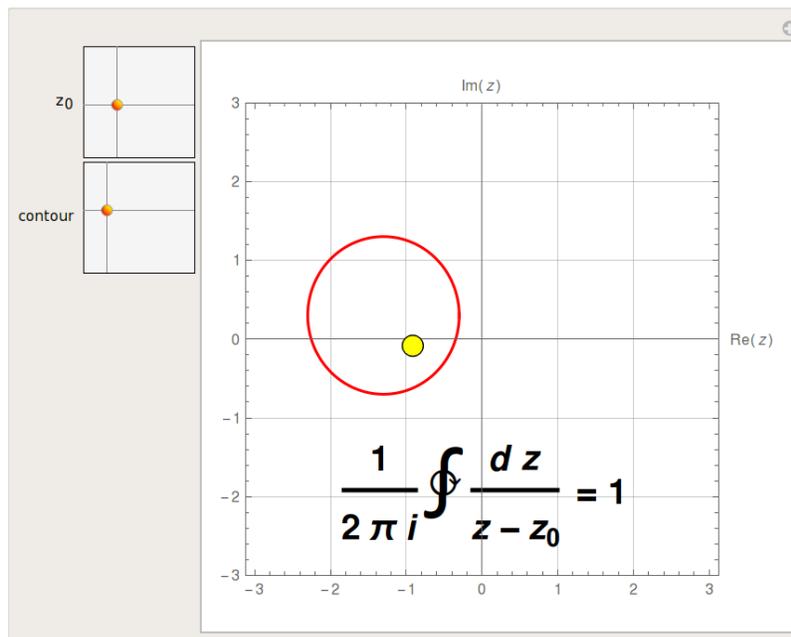
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

Zunächst bemerken wir, dass der Integrand auf der reellen Achse keine Polstelle besitzt, jedoch je einen einfachen Pol bei  $z_0 = +i$  und  $z_0 = -i$  aufweist. Wir können das Integral nun mit Hilfe von 4.11 berechnen, indem wir den Integrationsbereich auf die komplexe Ebene erweitern und die Kontur in durch einen Halbkreis  $\mathcal{K}$ , zum Beispiel, in der oberen imaginären Halbebene schließen. Mit  $\mathcal{K} : z(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{K}} \frac{dz}{z^2 + 1} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^2 e^{2it} + 1} \right] \\ 2\pi i R(i) &= \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2 + 1}}_{=I} + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^2 e^{2it} + 1}}_{\rightarrow 0} \\ 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} &= I \\ \pi &= I. \end{aligned}$$

**CDF 12. Illustration des Residuensatzes** [ContourIntegralAroundASimplePole.cdf](#)

The function  $f(z) = 1/(z - z_0)$  is analytic in the entire  $z$  plane, except for a simple pole at  $z = z_0$ . The function is to be integrated counterclockwise over a unit circle, shown in red, which you can move in the complex plane. If the singular point  $z_0$  falls outside the contour of integration, the function is analytic everywhere on and inside the contour and the integral equals zero by Cauchy's theorem. When the singularity lies within the contour, the residue theorem applies and the integral equals 1. In the intermediate case, when the simple pole lies on the contour, it can be considered to be half inside, half outside. The Cauchy principal value for this segment of the integral is implied, so that the complete integral equals  $1/2$



**CDF 13. Die Riemann'sche Zahlenkugel** [RiemannSphere.cdf](#)

The Riemann sphere is a geometric representation of the extended complex plane (the complex numbers with the added point at infinity). To visualize this compactification of the complex numbers (transformation of a topological space into a compact space), one can perform a stereographic projection of the unit sphere onto the complex plane as follows: for each point in the  $z$  plane, connect a line from  $z$  to a designated point that intersects both the sphere and the complex plane exactly once. In this Demonstration, the unit sphere is centered at  $(0,0,1)$ , and the stereographic projection is from the north pole of the sphere at  $(0,0,2)$ . You can interact with this projection in a variety of ways: unwrapping the sphere, showing stereographic projection lines, viewing the image of a set of points on the sphere under the projection, and picking a curve to view the image under the projection. The rainbow coloring on the sphere is a convenient visual tool for comparing where points on the sphere map to on the plane under the projection.

