

Mathematische Methoden 2

PHB.03208UB

Vorlesungsskriptum SS 2022

Assoz.-Prof. Dr. Peter Puschnig

Institut für Physik, Fachbereich Theoretische Physik

Karl-Franzens-Universität Graz

Universitätsplatz 5, A-8010 Graz

peter.puschnig@uni-graz.at

<https://homepage.uni-graz.at/de/peter.puschnig>

Graz, 24. Mai 2022

Inhaltsverzeichnis

- 1 Integralrechnung** **1**
- 1.1 Integral und Stammfunktion 1
 - 1.1.1 Riemannsches Integral 1
 - 1.1.2 Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung 4
- 1.2 Integrationstechniken 6
 - 1.2.1 Variablentransformation 6
 - 1.2.2 Partielle Integration 7
 - 1.2.3 Differenziation von Integralen 9
 - 1.2.4 Uneigentliche Integrale 11
 - 1.2.5 Integraltabelle 16
- 1.3 Mehrdimensionale Integrale 17
 - 1.3.1 Flächen- und Volumenintegrale 18

- 2 Vektoranalysis** **21**
- 2.1 Vektoren und ihre Algebra 21
 - 2.1.1 Schreibweisen und Definitionen 21
 - 2.1.2 Vektoralgebra 22
 - 2.1.3 Das Skalarprodukt 23
 - 2.1.4 Darstellung von Vektoren 24
 - 2.1.5 Das Vektorprodukt 26
 - 2.1.6 Analytische Geometrie 27
- 2.2 Raumkurven 29
 - 2.2.1 Veränderliche Vektoren 29
 - 2.2.2 Parametrisierung von Raumkurven 31
 - 2.2.3 Bogenelement 32
 - 2.2.4 Tangentenvektor, Krümmung, Torsion 33
 - 2.2.5 Linienintegrale 38
- 2.3 Flächen im Raum 42
 - 2.3.1 Parameterdarstellung einer Fläche 42

2.3.2	Tangentialebene, Normalenvektor und Flächenelement	43
2.3.3	Flächenintegrale	48
2.4	Differenzialoperatoren	50
2.4.1	Der Nabla-Operator	51
2.4.2	Gradient	52
2.4.3	Divergenz	54
2.4.4	Rotation	55
2.4.5	Zusammengesetzte Differentialoperatoren	56
2.4.6	Satz von Poincaré	58
2.5	Der Satz von Gauß	60
2.5.1	Beweis des Gauß'schen Integralsatzes	62
2.5.2	Weitere Anwendungen des Gauß'schen Integralsatzes	63
2.6	Der Satz von Stokes	65
2.6.1	Anwendungen des Stokes'schen Satzes	67
2.6.2	Der Integralsatz von Green in der Ebene	69
2.7	Gebräuchliche Koordinatensysteme	71
2.7.1	Zylinderkoordinaten	72
2.7.2	Kugelkoordinaten	75
2.7.3	Linienelemente, Flächenelemente, Volumenelement	78
2.7.4	Differenzialoperatoren in Zylinderkoordinaten	78
2.7.5	Differenzialoperatoren in Kugelkoordinaten	80
3	Gewöhnliche Differentialgleichungen	85
3.1	Begriffsbildungen	85
3.1.1	Motivation	86
3.1.2	Geometrische Interpretation	86
3.1.3	Klassifikation von DGL	87
3.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	89
3.2.1	Einfaches Integral	89
3.2.2	Homogener Fall	91
3.2.3	Allgemeine Lösung	92
3.3	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	93
3.3.1	Homogene DGL mit konstanten Koeffizienten	94
3.3.2	Homogene Schwingungsgleichung	98
3.3.3	Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten	101
3.3.4	Inhomogene Schwingungsgleichung	103

4	Fourierreihen	107
4.1	Motivation: Schwingende Saite	107
4.2	Orthogonale Funktionen	111
4.3	Allgemeine Fourierreihen	114
4.4	Komplexe Form der Fourierreihe	117
4.5	Von der Fourierreihe zur Fouriertransformation	118

CDF Demonstrationen

1	Riemann-Integral	3
2	Doppel-Integral	19
3	Doppel-Integral – Teil 2	20
4	Krümmung und Torsion	37
5	Linienintegral	42
6	Oberflächen-Integral	50
7	Der Satz von Stokes	71
8	Zylinderkoordinaten	74
9	Kugelkoordinaten	77
10	Richtungsfeld einer DGL	87
11	Freie gedämpfte Schwingung	100
12	Erzwungene gedämpfte Schwingung	105
13	Überlagerung von stehenden Wellen	110
14	Oberschwingungen einer Klaviersaite	110
15	Skalarprodukt von Funktionen	112
16	Fourierreihen einfacher Funktionen	115
17	Fouriertransformation eines Rechteckpulses	120
18	Fouriertransformation einfacher Funktionen	121
19	Fast Fouriertransformation zur Bildkompression	122

Kapitel 1

Integralrechnung

1.1 Integral und Stammfunktion

1.1.1 Riemannsches Integral

Das Riemannsches Integral (auch Riemann-Integral) ist eine nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann benannte Methode zur Präzisierung der anschaulichen Vorstellung des Flächeninhaltes zwischen der x -Achse und dem Graphen einer Funktion $f(x)$. Der Riemannsches Integralbegriff gehört neben dem allgemeineren Lebesgue-Integral Begriff (vgl. etwa Buch Lang-Pucker) zu den beiden klassischen der Analysis.

Das zu Grunde liegende Konzept des Riemannsches Integrals besteht darin, den gesuchten Flächeninhalt mit Hilfe des leicht zu berechnenden Flächeninhalts von *Rechtecken* anzunähern. Man geht dabei so vor, dass man in jedem Schritt zwei Familien von Rechtecken so wählt, dass der Graph der Funktion „zwischen“ ihnen liegt. Indem man sukzessive die Anzahl der Rechtecke erhöht, erhält man mit der Zeit eine immer genauere Annäherung des Funktionsgraphen durch die zu den Rechtecken gehörenden Treppenfunktionen. Entsprechend lässt sich der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x -Achse durch die Flächeninhalte der Rechtecke approximieren. Eine graphische Darstellung dieser Vorgehensweise finden wir in den folgenden beiden CDF-Anwendungen:

Intervallzerlegung. Wollen wir den Flächeninhalt zwischen dem Graphen $f(x)$ und der x -Achse in dem Intervall $[a, b]$ berechnen, so zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in viele kleine Teilintervalle und erhalten dadurch eine *Zerlegung* oder auch *Partition* P in folgender Form:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

In jedem der Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ suchen wir den größten und den kleinsten Funktionswert, den wir mit \bar{f}_k beziehungsweise mit \underline{f}_k bezeichnen

$$\bar{f}_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad \underline{f}_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Ober- und Untersummen. Für eine gegebene Intervallzerlegung P definieren wir nun die *Obersumme* \bar{S}_P bzw. die *Untersumme* \underline{S}_P in der folgenden Weise:

$$\bar{S}_P = \sum_{k=1}^n \bar{f}_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{und} \quad \underline{S}_P = \sum_{k=1}^n \underline{f}_k (x_k - x_{k-1})$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir von nun an als Intervallzerlegung eine *äquidistante* Zerlegung wählen, es soll also gelten, dass alle Teilintervalle die konstante Länge Δx haben sollen. Damit vereinfachen sich die Ausdrücke für die Ober- und Untersumme entsprechend. Mithilfe der Ober- und Untersummen können wir nun eine *obere* und *untere* Schranke für die Fläche zwischen der Kurve $f(x)$ und der x -Achse angeben, die wir in weiterer Folge als *bestimmte Integral der Funktion* $f(x)$ in dem Intervall $[a, b]$ bezeichnen, und mithilfe des Integralsymbols \int abkürzen:

$$\sum_{k=1}^n \underline{f}_k \Delta x \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \Delta x$$

Verfeinern wir nun die Zerlegung, das heißt, lassen wir die Teilintervallbreite $\Delta x \rightarrow 0$ und entsprechend die Anzahl der Intervalle $n \rightarrow \infty$ gehen, dann konvergieren – für genügend friedliche Funktionen – sowohl die Ober- als auch die Untersumme gegen den gleichen Wert. Diesem Wert wird das Integral zugewiesen:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \underline{f}_k \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \Delta x$$

Wir haben es also wieder mit dem Grenzwert einer unendlichen Reihe zu tun. Existieren sowohl der Grenzwert der Obersumme als auch der Grenzwert der Untersumme, und sind diese gleich, dann nennen wir die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ *Riemann-integrierbar*.

Riemann'sche Integrierbarkeitskriterium. Wir nennen die reellwertige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0$ eine Intervallzerlegung P_n von $[a, b]$ existiert, so dass $|\bar{S}_P - \underline{S}_P| < \varepsilon$.

Es kann gezeigt werden, dass jede auf $[a, b]$ stetige Funktion Riemann-integrierbar ist. Weiters gilt, dass wenn eine Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist, auch die folgende

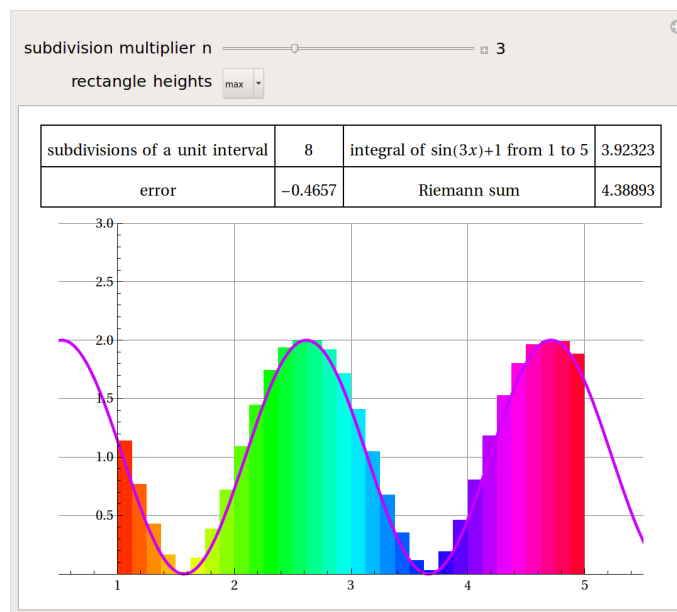
Summe konvergiert

$$S_P = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

für Zerlegungen $\max \Delta x \rightarrow 0$ gegen denselben Grenzwert, wobei ξ_k eine beliebige Stelle in dem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ bezeichnet.

CDF 1. Riemann-Integral `cdf01_Riemann_Summe.cdf`

Diese CDF-Anwendung veranschaulicht Ober- und Untersummen für eine wählbare Intervallzerlegung.



1. Mittelwertsatz der Integralrechnung. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ist ein wichtiger Satz der Analysis. Er erlaubt es, Integrale abzuschätzen, ohne den tatsächlichen Wert auszurechnen und liefert einen einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Analysis (siehe Kapitel 1.1.2). Hier wird das Riemann-Integral betrachtet. Die Aussage lautet: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sowie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und entweder $g \geq 0$ oder $g \leq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (1.1)$$

gilt. Manchmal wird die obige Aussage als *erweiterter Mittelwertsatz* und die Aussage für $g = 1$ als *erster Mittelwertsatz* bezeichnet. Für $g = 1$ erhalten wir den wichtigen Spezialfall

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a). \quad (1.2)$$

Einfache Integrationsregeln. Aus der Definition des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ als Summe unter dem Graphen $f(x)$ und der x -Achse im Intervall $[a, b]$ ergeben sich unmittelbar folgende Eigenschaften des Integrals:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (1.3)$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (1.4)$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (1.5)$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (1.6)$$

1.1.2 Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Der Fundamentalsatz der Analysis, auch bekannt als Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, bringt die beiden grundlegenden Konzepte der Analysis miteinander in Verbindung, nämlich das der Integration und das der Differenziation. Er sagt aus, dass Ableiten bzw. Integrieren jeweils die Umkehrung des anderen ist. Bevor wir diesen Hauptsatz formulieren und ihn beweisen, führen wir noch den Begriff der *Stammfunktion* ein.

Stammfunktion. Unter einer Stammfunktion einer reellen Funktion f versteht man eine differenzierbare Funktion F , deren Ableitungsfunktion F' mit f übereinstimmt. Ist also f auf einem Intervall $[a, b]$ definiert, so muss F auf $[a, b]$ definiert und differenzierbar sein, und es muss für beliebige Werte $x \in [a, b]$ gelten

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch die Funktion $G(x) = F(x) + C$ mit C gleich konstant, eine Stammfunktion von $f(x)$, da ja die Konstante C die Ableitung nicht ändert: $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

Der Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung besteht aus zwei Teilen, die manchmal als erster und zweiter Hauptsatz der Analysis bezeichnet werden. Die konkrete Formulierung des Satzes und sein Beweis variieren je nach Aufbau der betrachteten Integrationstheorie. Hier wird das im vorangegangenen Kapitel erläuterte Riemann-Integral betrachtet. Der erste Teil des Satzes ergibt die Existenz von Stammfunktionen und den Zusammenhang von Ableitung und Integral.

Fundamentalsatz der Analysis – I. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ so ist für alle $x_0 \in [a, b]$ die Integralfunktion:

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (1.7)$$

differenzierbar und eine Stammfunktion zu f . Das heißt, es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Zu beachten ist, dass die Funktion F aufgrund der Existenz des Riemann-Integrals für stetige Funktionen an allen Stellen in $[a, b]$ definiert ist.

Fundamentalsatz der Analysis – II. Der zweite Teil des Satzes erklärt, wie Integrale berechnet werden können. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt die Newton-Leibniz-Formel:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1.8)$$

Beweis. Wir bilden die Differenz der Integrale $F(x+h)$ und $F(x)$, indem wir in die Definition 1.7 einsetzen

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Der letzte Schritt folgt aus der Tatsache, dass wir das Integral von x_0 bis $x+h$ in zwei Teilschritten durchführen können, nämlich einmal von x_0 bis x und von x bis $x+h$ (siehe Gleichung 1.4). Nach dem 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung (1.2) können wir das Integral auf rechten Seite auch in folgender Weise berechnen

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi)h \quad \text{mit} \quad \xi \in [x, x+h]$$

Dividieren wir nun die obige Gleichung durch h und bilden anschließend den Grenzwert $h \rightarrow 0$, so finden wir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi \in [x, x+h]$$

Die linke Seite entspricht der Definition des *Differentialquotienten* und ist damit gleich der 1. Ableitung der Funktion $F'(x)$. Der Grenzwert der rechten Seite ergibt $f(x)$, da im Limes $h \rightarrow 0$ der Wert $\xi \rightarrow x$ geht. Damit ist der 1. Teil des Fundamentalsatzes der Analysis bewiesen.

Um den zweiten Teil des Fundamentalsatzes (1.7) zu beweisen, setzen wir $F(b)$ und $F(a)$ in die Aussage des 1. Fundamentalsatzes (1.8) ein, und bilden die Differenz $F(b) - F(a)$, wobei wir $x_0 < a < b$

annehmen wollen:

$$F(b) - F(a) = \int_{x_0}^b f(x)dx - \int_{x_0}^a f(x)dx = \int_{x_0}^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx - \int_{x_0}^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Wir haben hier wieder die Eigenschaft (1.4) verwendet, die es uns erlaubt das Integral von x_0 nach b in zwei Teilintegrationen von x_0 nach a und von a nach b aufzuteilen.

1.2 Integrationstechniken

1.2.1 Variablentransformation

Ein wichtiges Werkzeug bei der Berechnung von Integralen besteht in der *Transformation von Variablen*, was auch *Substitutionsverfahren* bezeichnet wird. Betrachten wir als einfaches Beispiel die Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 e^{3x-4} dx.$$

Hier können wir die Stammfunktion $F(x)$ des Integranden $f(x) = e^{3x-4}$ ”erahnen”, indem wir die Ableitung der Exponentialfunktion bilden, und durch die innere Ableitung $(3x - 4)' = 3$ dividieren, also

$$\int_0^1 e^{3x-4} dx = F(x)|_0^1 = \frac{1}{3} e^{3x-4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4} \right).$$

Dass $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x-4}$ tatsächlich Stammfunktion von $f(x) = e^{3x-4}$ können wir durch Rechnung leicht überprüfen. Etwas systematischer betrachtet – mithilfe von Variablentransformation – gehen wir wie folgt vor:

$$\int_0^1 e^{3x-4} dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x - 4 \\ du = 3dx \\ u_1 = -4 \\ u_2 = -1 \end{array} \right| = \int_{-4}^{-1} e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} e^u \Big|_{-4}^{-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4} \right).$$

Hierbei haben wir die (nicht zwingende) Schreibweise eingeführt, dass wir die Variablensubstitution, die Transformation des Differenzials und der Integrationsgrenzen zwischen senkrechten Strichen vermerkt haben. Wir formulieren diese wichtige Substitutionsregel in einer allgemeinen Form.

Integration durch Variablentransformation.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ dx = \frac{dx}{dt} dt = x'(t)dt \\ x_1 = x(t_1) \Rightarrow t_1 = t(x_1) \\ x_2 = x(t_2) \Rightarrow t_2 = t(x_2) \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} f(t)x'(t)dt$$

Integration durch Substitution können wir als Umkehrung der Kettenregel der Differenziation verstehen. Im folgenden wollen wir einige typische Beispiele behandeln.

Beispiele.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin y \\ dx = \cos y dy \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \cos y dy = \int dy = y + C = \arcsin x + C$$

Beachte, dass in obigen Beispiel auch die Substitution $x = \cos y$ zum Ziel führt. Das anscheinende widersprüchliche Ergebnis $-\arccos x + C$ kann dadurch verstanden werden, dass die Integrationskonstante eine andere sein muss. Zu besonders einfachem Ergebnis führt die Variablentransformation, wenn $f'(x)dx$ bereits im Integranden steht, wie in den folgenden Beispielen.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

$$\int x \sin(x^2) dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$$

$$\int \frac{x}{(a+bx^2)^n} dx = \left| \begin{array}{l} a+bx^2 = t \\ 2bxdx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2b} \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2b} \frac{1}{(-n+1)} t^{-n+1} = \frac{1}{2b(1-n)} \frac{1}{(a+bx^2)^{n-1}} + C$$

1.2.2 Partielle Integration

Das zweite Verfahren zur Bestimmung von Integralen ist das Gegenstück der Produktregel der Differenziation. Lässt sich der Integrand als Produkt zweier Funktionen ausdrücken, so gelingt es sehr oft durch *partielle Integration* das gesuchte Integral zu berechnen. Betrachten wir dazu eine Stammfunktion $F(x) = u(x)v(x)$, die als Produkt der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ angeschrieben werden kann.

Damit erhalten wir

$$\int (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x) = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx.$$

Hieraus können wir die Formel für **partielle Integration** ablesen:

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx.$$

Das heißt, ein Faktor wird integriert (v'), während der andere Faktor (u) differenziert wird. Um diese Regel sinnvoll anwenden zu können, sollten zwei Bedingungen erfüllt sein: Zum einen sollte der Faktor v' leicht integrierbar sein, und zum anderen sollte der zweite Faktor u durch die Differenzierung einfacher werden. Paradebeispiele dafür sind, wenn wir für v' eine Exponentialfunktion oder eine Winkelfunktion ansetzen können, und für die Funktion u etwa ein Polynom in x darstellt. Dazu ein Beispiel:

$$\int xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u(x) = x, u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x, v(x) = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

Mit Hilfe von partieller Integration lässt sich auch das Integral von $(\sin x)^2$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \sin x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u(x) = \sin x, u'(x) = \cos x \\ v'(x) = \sin x, v(x) = -\cos x \end{array} \right| = -\sin x \cos x + \int \cos x \cos x dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx \end{aligned}$$

und damit erhalten wir das gesuchte Integral zu

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C,$$

dessen Richtigkeit wir durch Differenzieren leicht überprüfen können.

Die Methode des partiellen Integrierens gilt natürlich auch für *bestimmte Integrale*

$$\int_a^b uv' dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v dx,$$

was wir anhand eines abschließenden Beispiels demonstrieren wollen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi x^3 \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u(x) = x^3, u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \sin x, v(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x^3 \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi 3x^2 \cos x dx \\
 &= \left| \begin{array}{l} u(x) = 3x^2, u'(x) = 6x \\ v'(x) = \cos x, v(x) = \sin x \end{array} \right| = \pi^3 + 3x^2 \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 6x \sin x dx \\
 &= \left| \begin{array}{l} u(x) = 6x, u'(x) = 6 \\ v'(x) = \sin x, v(x) = -\cos x \end{array} \right| = \pi^3 + 6x \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 6 \cos x dx = \pi^3 - 6\pi.
 \end{aligned}$$

1.2.3 Differenziation von Integralen

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie wir Integrale ableiten können. Und zwar einerseits nach den Integrationsgrenzen, die wir als variabel auffassen können, und andererseits nach einer Variable im Integranden. Das führt uns dann auf eine weitere Möglichkeit gewisse Integrale berechnen zu können.

Aus der Definition des Integralbegriffs bzw. aus dem Fundamentalsatz der Integralrechnung, siehe Gl. (1.7) ist ersichtlich, dass die Ableitung eines bestimmten Integrals nach der oberen Integrationsgrenze als Resultat ganz einfach den Integranden ergibt:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} [F(x) - F(a)] = F'(x) = f(x).$$

Ganz analog können wir auch nach der Ableitung in Bezug auf die *untere* Integrationsgrenze fragen und finden:

$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = \frac{d}{dx} [F(b) - F(x)] = -F'(x) = -f(x).$$

Ist nun die Integrationsgrenze selbst eine Funktion von x , können wir mithilfe der Kettenregel folgende Erweiterung der obigen Gleichungen herleiten:

$$\frac{d}{dx} \int_a^{v(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx} [F(v(x)) - F(a)] = F'(v(x)) = f(v(x))v'(x).$$

Wir müssen also mit der inneren Ableitung $v'(x)$ der oberen Integralgrenze multiplizieren. Ist die *untere* Grenze eine Funktion von x , so gilt analoges, allerdings müssen wir wie schon oben ein negatives Vorzeichen berücksichtigen.

Beispiel.

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt = \sqrt{1-(\sin x)^2} \cos x = \cos^2 x.$$

Hängt der Integrand nicht nur von der Integrationsvariablen ab, sondern auch noch von weiteren Variablen, so können wir fragen, wie die Ableitung des Integrals in Bezug auf diese Variablen aussieht. Für hinreichend "gutmütige" Funktionen können wir dabei Differenziation und Integration vertauschen, also

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt.$$

Leibniz'sche Regel. Eine Zusammenfassung aller drei oben erwähneter Integrationsregeln bietet die sogenannte Leibniz'sche Regel zur Ableitung von Integralen.

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt = f(x, v(x))v'(x) - f(x, u(x))u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt. \quad (1.9)$$

Eine typische Anwendung des "Hineinziehens" der Ableitung in das Integral besteht darin, um Rekursionsformeln zur Berechnung von Integralen zu berechnen. Ein Beispiel dafür ist folgender Typ von Integral, der auch bei der Partialbruchzerlegung auftauchen kann, wenn die Nullstellen des Nennerpolynoms aus mehrfachen zueinander komplex konjugierter Lösungen besteht. Es können dann Integrale der Form

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{n-1}}$$

auftreten. Differenzieren wir dieses Integral nach q , so erhalten wir nach der Leibniz'schen Regel (1.9) folgenden Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial q} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{n-1}} = \int (-n + 1) \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

Wenn wir diese Gleichung noch etwas anders anschreiben

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{1}{1 - n} \frac{\partial}{\partial q} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{n-1}},$$

so haben wir eine Rekursionsformel gefunden, mit deren Hilfe wir die Potenz n im Nenner sukzessive verkleinern können, bis wir das verbleibende Integral berechnen können.

Beispiel. Wir wollen folgendes Integral mithilfe der oben abgeleiteten Rekursionsformel berechnen

$$\int \frac{dx}{(x^2 + q)^2} = ?$$

Es gilt also

$$\int \frac{dx}{(x^2 + q)^2} = -\frac{\partial}{\partial q} \int \frac{dx}{x^2 + q}.$$

Das Integral auf der rechten Seite können wir aber durch geeignete Substitution berechnen

$$\int \frac{dx}{x^2 + q} = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{q}t \\ dx = \sqrt{q}dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{q}dt}{qt^2 + q} = \frac{1}{\sqrt{q}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan t = \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{q}} \right).$$

Und damit können wir mittels partieller Ableitung nach q auch das gesuchte Integral berechnen.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + q)^2} &= -\frac{\partial}{\partial q} \left[q^{-\frac{1}{2}} \arctan \left(q^{-\frac{1}{2}} x \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} q^{-\frac{3}{2}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{q}} \right) + q^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{q}} \frac{1}{2} x q^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\arctan \left(\frac{x}{\sqrt{q}} \right)}{q^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{x}{q(x^2 + q)} \end{aligned}$$

1.2.4 Uneigentliche Integrale

Unter einem *uneigentlichen* Integral versteht man Integrale deren Integrand einzelne Singularitäten aufweisen (der Integrand wird unendlich) oder deren Integrationsbereich unbeschränkt ist. Das uneigentliche Integral kann als Erweiterung des Riemann-Integrals aufgefasst werden. Es gibt zwei Gründe, warum uneigentliche Integrale betrachtet werden. Zum einen möchte man Funktionen auch über unbeschränkte Bereiche integrieren. Beispielsweise möchte man Funktionen von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren. So ergibt etwa das Integral über die Gauß'sche Glockenkurve trotz der Unbeschränktheit des Integrationsintervalls einen endlichen Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Dieses Ergebnis ist allerdings mit dem Riemann-Integral Begriff, wie wir ihn bis jetzt verwendet haben, ohne weiteres nicht vereinbar. Uneigentliche Integrale, die dieses Problem lösen, nennt man *uneigentliche Integrale erster Art*. Außerdem ist es auch von Interesse, Funktionen zu integrieren, die im Inneren oder am Rand ihres Definitionsbereichs eine Singularität haben, also zum Beispiel

$$\int_0^1 \ln x dx = -1.$$

Uneigentliche Integrale, die das ermöglichen, nennt man *uneigentliche Integrale zweiter Art*. Es ist möglich, dass uneigentliche Integrale an einer Grenze uneigentlich erster Art und an der anderen Grenze uneigentlich zweiter Art sind.

Wir behandeln zunächst uneigentliche Integrale *erster Art* und geben folgende Definition.

Definition. Sei $-\infty < a < b < \infty$, dann heißt die Funktion $f(x)$ *uneigentlich integrierbar* auf $[a, \infty)$, wenn f auf jedem Teilintervall $[a, b] \subseteq [a, \infty)$ Riemann-integrierbar ist, und der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx$$

existiert. Dieser Grenzwert ist dann der Wert des uneigentlichen Integrals.

Beispiele.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1$$

Allgemeiner finden wir für das Integral über $\frac{1}{x^\alpha}$, dass es nur für $\alpha > 1$ uneigentlich integrierbar ist, und dann folgenden Wert hat

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}, \quad \text{für } \alpha > 1.$$

Natürlich kann auch die untere Grenze des Integrals gegen $-\infty$ streben. In diesem Fall verwenden wir eine analoge Definition wie oben, um die Integrierbarkeit des Integrals zu entscheiden. Sind beide Grenzen unendlich, so teilen wir das Integral in zwei Teilintegrale in der Art

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx,$$

wobei wir nun für jedes der beiden Integrale die bereits bekannten Regeln anwenden können. Das gesamte Integral $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ nennen wir integrierbar, wenn beide Teilintegrale integrierbar sind. Der genaue Wert des Teilungspunktes c ist dabei irrelevant. Dazu ein Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^b \\ &= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Wir wollen noch ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angeben, das es uns erlaubt zu überprüfen, ob uneigentliche Integrale konvergieren.

Cauchy-Kriterium. Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ konvergiert *genau dann*, wenn $\forall \varepsilon > 0$ eine Zahl $X > 0$ existiert, sodass $\forall x_1, x_2 > X$ gilt:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass die Teilflächen, die zu dem Integral beitragen, für große x beliebig klein werden müssen.

Mithilfe des Cauchy-Kriteriums können wir zum Beispiel zeigen, dass das Integral $\int_0^\infty \sin x dx$ *nicht konvergiert*. Wählen wir $x_1 = 2k\pi$ und $x_2 = (2k+1)\pi$, wobei k eine beliebig große ganze Zahl darstellt, so gilt

$$\left| \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x dx \right| = \left| -\cos x \Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \right| = |+1 + 1| = 2 \not< \varepsilon.$$

In einer anderen Anwendung des Cauchy-Kriteriums wollen wir zeigen, dass das sogenannte Fresnel-Integral konvergiert¹

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Was wir zeigen müssen, ist, dass für genügend große x_1 und x_2 der Betrag des Integral

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin(x^2)dx \right| < \varepsilon$$

beliebig klein wird. Dazu führen wir mittels Substitution und anschließender partieller Integration folgende Umformungen durch:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin(x^2)dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \left| \begin{array}{l} u'(t) = \sin t \\ v(t) = t^{-\frac{1}{2}} \\ u(t) = -\cos t \\ v'(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \end{array} \right| = -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos t}{4\sqrt{t^3}} dt$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung, $|a+b| \leq |a|+|b|$, können wir nun folgende Abschätzung durchführen

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} \sin(x^2)dx \right| &\leq \frac{|\cos(x_1^2)|}{2x_1} + \frac{|\cos(x_2^2)|}{2x_2} + \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\cos t|}{\sqrt{t^3}} \leq \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{t^3}} \\ &= \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} - \frac{1}{4} \frac{2}{\sqrt{t}} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} - \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{2x_1} = \frac{1}{x_1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

¹Mit unseren Mitteln können wir nur die Existenz des Integrals beweisen, um dessen Wert zu berechnen braucht man Ergebnisse aus der Funktionentheorie, die sich mit der Integration von Funktionen in der komplexen Zahlenebene beschäftigt.

womit wir mithilfe des Cauchy-Kriteriums gezeigt haben, dass das Fresnel-Integral konvergiert.

Wir wenden uns nun *uneigentlichen Integralen zweiter Art* zu, das heißt Integralen, bei denen der Integrand gegen unendlich geht. Als Beispiel betrachten wir das bereits eingangs erwähnte Integral über den natürlichen Logarithmus, der ja bekanntlich für $x \rightarrow 0$ gegen $-\infty$ geht.

$$\int_0^1 \ln x dx = ?$$

Wenn wir die Integration statt bei $x = 0$ bei einem $x = \varepsilon > 0$ starten, erhalten wir jedenfalls einen endlichen Wert

$$\int_\varepsilon^1 \ln x dx = (x \ln x - x)|_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon,$$

und wir können den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchführen

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon) = -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = -1.$$

Das heißt wir haben gezeigt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln x dx$ den Wert -1 hat. Wir können also auch uneigentliche Integrale zweiter Art, genauso wie uneigentliche Integrale erster Art, auf die Berechnung von Grenzwerten zurückführen und gelangen zu folgender Definition.

Definition. Sei $a \leq \xi \leq b$ und $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \pm\infty$, dann existiert das uneigentliche Integral zweiter Art $\int_a^b f(x) dx$, wenn bei der Aufteilung in Teilintervalle

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \xi^-} \int_a^c f(x) dx + \lim_{d \rightarrow \xi^+} \int_d^b f(x) dx$$

beide Grenzwerte existieren, also endlich sind. Liegt der Punkt ξ an einem Rand des Integrationsintervalls $[a, b]$, so ist nur ein Grenzwert erforderlich.

Nehmen wir als Beispiel das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$, für das der Integrand am linken Rand, bei $x = 0$, eine Singularität aufweist, das heißt die Funktion gegen ∞ strebt. Nach obiger Definition erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{d \rightarrow 0^+} \int_d^1 \frac{dx}{x^2} = - \lim_{d \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \Big|_d^1 = - \lim_{d \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{d} \right) = +\infty.$$

Das heißt, das unbestimmte Integral existiert nicht. Allgemeiner finden wir für das unbestimmte

Integral vom Typ $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, dass es nur für $\alpha < 1$ existiert, und dann folgenden Wert hat

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \text{für } \alpha < 1.$$

Was passiert, wenn wir das folgende unbestimmte Integral nach obiger Definition berechnen wollen?

$$\int_{-1}^{+2} \frac{dx}{x^3} = \lim_{c \rightarrow 0^-} \int_{-1}^c \frac{dx}{x^3} + \lim_{d \rightarrow 0^+} \int_d^{+2} \frac{dx}{x^3} = \lim_{c \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{2c^2} + \frac{1}{2} \right) + \lim_{d \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2d^2} \right) = -\infty + \infty$$

Die beiden Grenzwerte existieren nicht, und daher existiert auch das unbestimmte Integral nicht. Andererseits könnte man argumentieren, dass sich die negativ gezählten Flächen auf der negativen x Achse mit den positiv gezählten Flächen auf der positive x Achse doch genau aufheben, und es daher möglich sein sollte, einen endlichen Wert des Integrals zu definieren. Dies ist tatsächlich möglich und wird *Hauptwert eines Integrals* oder auch *Cauchy'scher Hauptwert* genannt und in folgender Weise definiert.

Cauchy'scher Hauptwert. Sei $a \leq \xi \leq b$ und $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \pm\infty$, dann bezeichnen wir den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{\xi-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\xi+\varepsilon}^b f(x) dx \right\} =: \mathcal{P} \int_a^b f(x) dx$$

als den Cauchy'schen Hauptwert $\mathcal{P} \int$ des Integrals (englisch: *principal value*, deshalb das vorangestellte "P").

Im Unterschied zur bisherigen Definition, in der die links- und rechtsseitigen Grenzwerte unabhängig voneinander durchgeführt wurden, wird im Cauchy'schen Hauptwert ein *gemeinsamer* Grenzwert berechnet. Berechnen wir nun den Hauptwert des Integrals aus obigen Beispiel, so finden wir:

$$\mathcal{P} \int_{-1}^{+2} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\varepsilon}^{+2} \frac{dx}{x^3} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) = \frac{3}{8}.$$

1.2.5 Integraltabelle

In der linken Spalte steht der Integrand und in der mittleren die Stammfunktion bei unbestimmter Integration über x . Zu jeder Stammfunktion kann man eine Konstante $k \in \mathbb{R}$ addieren, die in der Tabelle nicht angeführt wird.

Wenn nicht anderes angegeben sind alle auftretenden Konstanten beliebige reelle Zahlen.

$f(x)$	$F(x)$	Anmerkungen
1	x	
ax^b	$\frac{a}{b+1} x^{b+1}$	$b \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x > 0$
$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1)$	$x > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax}$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\frac{1}{2} \ln \left(\left \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \right \right)$	
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\frac{1}{2} \ln \left(\left \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \right \right)$	
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} \equiv 1 + \tan^2(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$	$\frac{1}{\sin^2(x)} \equiv 1 + \cot^2(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot}(x)$	$0 < \operatorname{arccot}(x) < \pi$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$-1 < x < 1$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh}(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x > 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x)$	$ x < 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$ x > 1$
$\frac{a}{(x-b)^n}$	$\frac{a}{1-n} (x-b)^{(1-n)}$	$n \neq 1$
$\frac{a}{(x-b)}$	$a \ln(x-b)$	
$\frac{bx+c}{x^2+px+q}$	$\frac{b}{2} \ln(q+px+x^2) + \frac{2c-bp}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \right)$	$q > \frac{p^2}{4}$
$\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^n}$	$\frac{1}{1-n} \frac{\partial}{\partial q} \int dx \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^{(n-1)}}$	$n > 1$

1.3 Mehrdimensionale Integrale

In vielen Bereichen der Physik spielen Integrale eine große Rolle. Dabei wird oft nicht nur über eine Variable integriert, sondern über mehrere, etwa über die drei Raumkoordinaten x , y und z . Um ein Beispiel aus der Mechanik zu geben, die Schwerpunktskoordinaten $\vec{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$ eines ausgedehnten Körpers berechnen sich aus folgendem dreidimensionalen Integral:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \iiint_V dx dy dz \cdot \vec{r} \cdot \rho(x, y, z). \quad (1.10)$$

Hierbei läuft die Integration über das Raumgebiet $V \in \mathbb{R}^3$, $\rho(x, y, z)$ beschreibt die Massendichte des Körpers also Funktion des Orts $\vec{r} = (x, y, z)$, und M ist die Gesamtmasse des Körpers. Ein anderes Beispiel aus der Mechanik ist die Berechnung des Trägheitsmoments I eines Körpers in Bezug auf eine vorgegebene Drehachse:

$$I = \iiint_V dx dy dz \cdot r_{\perp}^2 \cdot \rho(x, y, z), \quad (1.11)$$

wobei r_{\perp} den Normalabstand des Volumenelements $dx dy dz$ and dem Ort $\vec{r} = (x, y, z)$ von der Drehachse bedeutet. Die Integration läuft hier wieder über das Raumgebiet $V \in \mathbb{R}^3$. Auch in anderen Bereichen der Physik sind mehrdimensionale Integrale von großer Bedeutung. In der Quantenmechanik beschreibt das Betragsquadrat der Wellenfunktion $|\psi(x, y, z)|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens. Dementsprechend muss – damit die Wahrscheinlichkeit das Teilchen irgendwo im Raum zu gleich eins ist – das Integral über $|\psi(x, y, z)|^2$ auf eins normiert sein:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} dx dy dz \cdot |\psi(x, y, z)|^2 = 1. \quad (1.12)$$

Auch in der Elektrodynamik werden viele physikalische Gesetze in Form von Integralen ausgedrückt. Das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik etwa verbindet das Integral der elektrischen Feldstärke \vec{E} über die Oberfläche ∂V eines Körpers mit der im Volumen V eingeschlossenen Ladung Q

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.13)$$

Am Rande sei noch erwähnt, dass sich auch für das Newton'sche Gravitationsgesetz ein analoges Gauß'sche Gesetz formulieren lässt

$$\iint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM, \quad (1.14)$$

wobei \vec{g} die lokale Gravitationsbeschleunigung, G die Gravitationskonstante, und M , die im Volumen V eingeschlossene Masse ist.

1.3.1 Flächen- und Volumenintegrale

Flächen- und Volumenintegrale sind Verallgemeinerungen des Integralbegriffes auf Teilmengen von \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 . Das Integrationsgebiet ist also nicht ein eindimensionales Intervall $[a, b]$ wie im eindimensionalen Fall, sondern eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (Flächenintegral) oder eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^3$ (Volumenintegral). Flächen- und Volumenintegrale stellen wiederholte Integrationen dar, wir schreiben daher für Flächenintegrale zwei, für Volumenintegrale drei Integralsymbole

$$I_A = \iint_A dx dy f(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \chi_A(x, y) f(x, y) \quad (1.15)$$

$$I_V = \iiint_V dx dy dz f(x, y, z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} dx dy dz \chi_V(x, y, z) f(x, y, z). \quad (1.16)$$

Hierbei haben wir die *charakteristische* Funktion χ eingeführt, die den Wert 1 innerhalb des Integrationsgebiets und den Wert 0 außerhalb des Integrationsgebiets annimmt.

$$\chi_A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x, y) \in A \\ 0 & \text{für } (x, y) \notin A \end{cases} \quad \text{und} \quad \chi_V(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x, y, z) \in V \\ 0 & \text{für } (x, y, z) \notin V \end{cases}$$

Zum Unterschied von eindimensionalen Integralen, bei denen das Integrationsgebiet ja einfache Intervalle $[a, b] \in \mathbb{R}^2$ darstellt, ist die Festlegung von Integrationsgebieten in \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 aufwendiger. Wir betrachten dazu ein Beispiel, um die Vorgehensweise zu erklären.

Beispiel Flächenintegral. Wir wollen die Fläche A gebildet aus der x -Achse, der Gerade $x = 2$, und der Funktion $y(x) = x^2$ mithilfe eines zweidimensionalen Integrals berechnen.

$$I_A = \iint_A dx dy.$$

Um die zweifache Integration durchzuführen, müssen wir uns zunächst überlegen, welche der zwei Integrationsvariablen x und y wir als *äußere* und welche als *innere* Integration behandeln wollen. Die innere Integration wird als erstes, die äußere zum Schluss ausgeführt. Dabei ist zu beachten, dass die bei der inneren Integration, die Integrationsgrenzen im allgemeinen Funktionen der äußeren Variable sind. In unserem Beispiel wählen wir zunächst x als *äußere* Integrationsvariable, und y als *innere* Integrationsvariable. Wenn wir das oben erwähnte Integrationsgebiet skizzieren, dann bemerken wir, dass x Werte zwischen 0 und 2 annimmt, während y zwischen 0 und x^2 integriert werden muss. Somit gilt

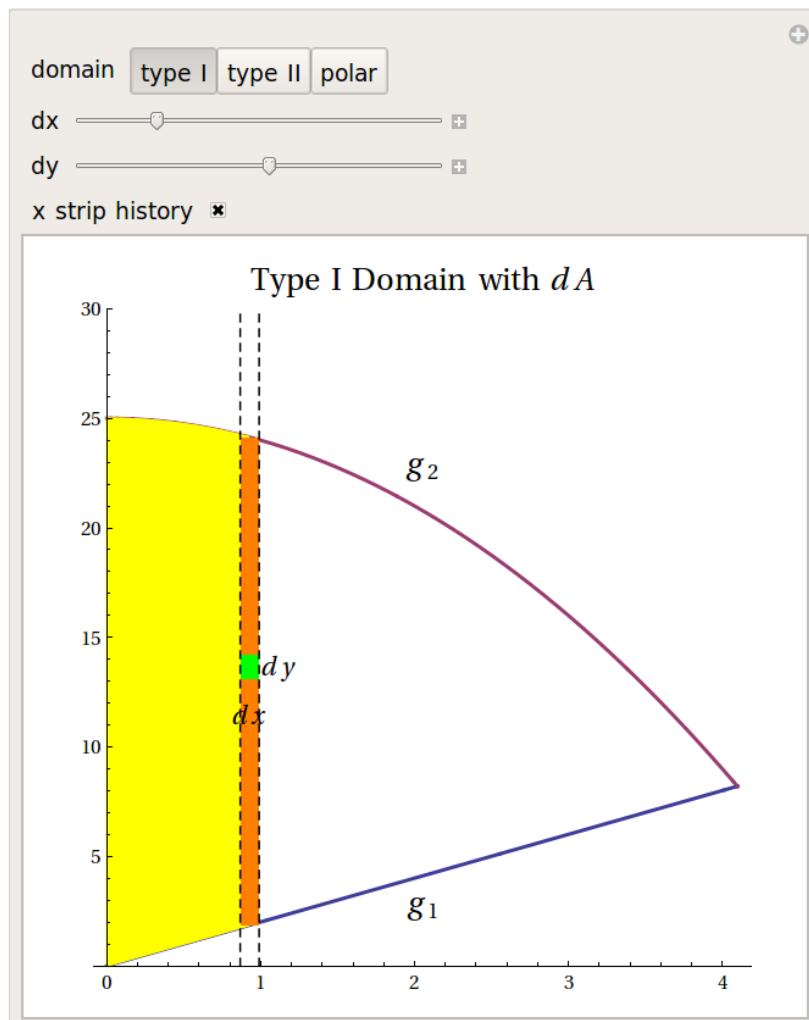
$$I_A = \int_{x=0}^2 dx \int_{y=0}^{x^2} dy = \int_{x=0}^2 dx [y]_{y=0}^{x^2} = \int_{x=0}^2 dx (x^2 - 0) = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Umgekehrt hätten wir auch y als *äußere* Integrationsvariable, und x als *innere* Integrationsvariable wählen können. Dann nimmt y Werte zwischen 0 und 4 an, während x zwischen \sqrt{y} und 2 integriert werden muss:

$$I_A = \int_{y=0}^4 dy \int_{x=\sqrt{y}}^2 dx = \int_{y=0}^4 dy [x]_{x=\sqrt{y}}^2 = \int_{y=0}^4 dy \left(2 - y^{\frac{1}{2}}\right) = \left[2y - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

CDF 2. Doppel-Integral `cdf02_Doppelintegral.cdf`

Eine grafische Darstellung der Vorgehensweise bei zweidimensionalen Integration finden Sie in dieser CDF-Anwendung.



Bei dem obigen Beispiel hätten wir die gesuchte Fläche natürlich auch einfacher als $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$ berechnen können. Eine "echte" zweidimensionale Integration ist jedenfalls erforderlich wenn wir etwa den *Schwerpunkt* einer Fläche bestimmen wollen.

Schwerpunkt einer Fläche. Sei M die Masse einer Platte, und $\rho(x, y)$ die Massendichte der Platte, dann erhalten wir die Schwerpunktskoordinaten (x_S, y_S) aus folgenden Flächenintegralen

$$x_S = \frac{1}{M} \iint_A dx dy \rho(x, y) x \quad (1.17)$$

$$y_S = \frac{1}{M} \iint_A dx dy \rho(x, y) y. \quad (1.18)$$

Handelt es sich um eine Platte mit homogener Massendichte, also konstanter Massendichte, dann vereinfacht sich die Berechnung der Schwerpunktskoordinaten in folgender Weise:

$$x_S = \frac{1}{A} \iint_A dx dy x \quad (1.19)$$

$$y_S = \frac{1}{A} \iint_A dx dy y. \quad (1.20)$$

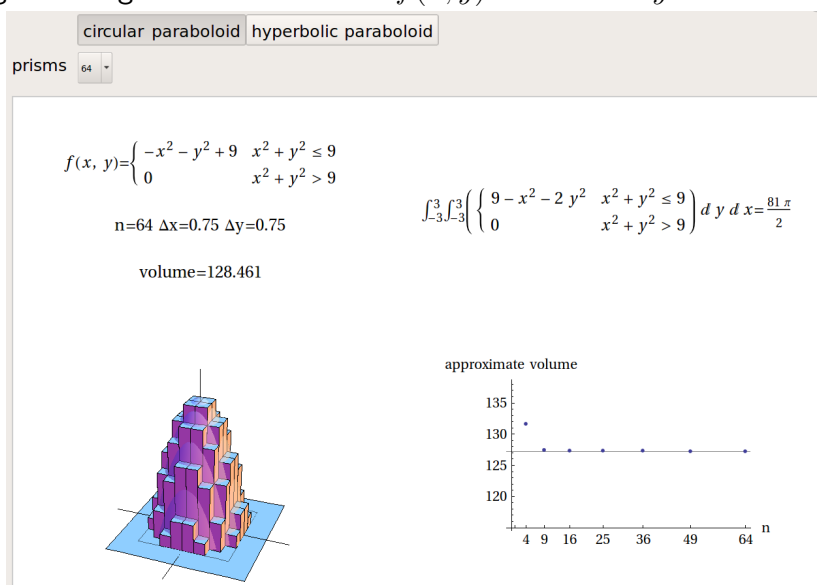
Beispiel. Wir berechnen den Schwerpunkt der oben behandelten Fläche, und wählen x als äußere Integrationsvariable.

$$x_S = \frac{1}{A} \int_{x=0}^2 dx \int_{y=0}^{x^2} dy x = \frac{3}{8} \int_{x=0}^2 dx x [y]_{y=0}^{x^2} = \frac{3}{8} \int_{x=0}^2 dx x^3 = \frac{3}{8} \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$y_S = \frac{1}{A} \int_{x=0}^2 dx \int_{y=0}^{x^2} dy y = \frac{3}{8} \int_{x=0}^2 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x^2} = \frac{3}{16} \int_{x=0}^2 dx x^4 = \frac{3}{16} \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{32}{5} = \frac{6}{5}.$$

CDF 3. Doppel-Integral – Teil 2 [cdf03_Doppelintegral.cdf](#)

Grafische Darstellung der Integration der Funktion $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ über den Bereich $x^2 + y^2 \leq 9$.



Kapitel 2

Vektoranalysis

2.1 Vektoren und ihre Algebra

Im allgemeinen Sinn versteht man unter einem Vektor ein Element eines Vektorraums, das heißt ein Objekt, das zu anderen Vektoren addiert und mit Zahlen, die als Skalare bezeichnet werden, multipliziert werden kann. Im engeren Sinne versteht man unter einem Vektor in der analytischen Geometrie ein mathematisches Objekt, das eine Parallelverschiebung in der Ebene oder im Raum beschreibt. In kartesischen Koordinaten werden Vektoren durch Zahlenpaare (in der Ebene, \mathbb{R}^2) bzw. -tripel (im Raum, \mathbb{R}^3) dargestellt, die oft untereinander (als "Spaltenvektoren") geschrieben werden. Davon ausgehend bezeichnen wir ein n -Tupel reeller Zahlen also ein Element des \mathbb{R}^n ebenfalls als Vektor. In der klassischen Physik bezeichnen wir als *Vektoren* eine physikalische Größe, die durch einen Betrag und eine Richtung gekennzeichnet ist (z.B.: Geschwindigkeit), während *Skalare* physikalisch Größen bezeichnen, die keine Richtung aufweisen (z.B.: Temperatur).

2.1.1 Schreibweisen und Definitionen

Namen und Darstellung von Vektoren. Als *symbolischen Namen* für Vektoren verwenden wir in diesem Skriptum Symbole mit darüber gestelltem Pfeil, z.B. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ oder $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ usw. Wenn wir konkret die Koordinaten eines Vektors angeben, also die *Darstellung eines Vektors* in einem bestimmten Koordinatensystem, dann verwendet wird derselben Buchstaben, allerdings mit einem *Index*, der die Werte 1, 2, oder 3 annehmen kann:

$$\left\{ \vec{A} \right\}_k = A_k, \quad k = 1, 2, 3$$

Die geschwungene Klammer mit dem Index auf der linken Seite soll ausdrücken, dass wir von dem symbolischen Ausdruck \vec{A} in die Koordinatendarstellung übergehen.

Betrag und Norm von Vektoren. Die *Länge* oder den *Betrag eines Vektors* \vec{A} bezeichnen wir mit $|\vec{A}|$ oder einfach A und es gilt:

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad (2.1)$$

Die Länge (Betrag) eines Vektors ein Skalar ist, das heißt, hängt nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab.

Einstein'sche Summenkonvention. Das häufige Auftreten von bestimmten Summationen in der Vektorrechnung hat zur Aufstellung des so genannten Summationsübereinkommens geführt. Diese Konvention macht das Schreiben von Summenzeichen überflüssig. Es besteht in der Festsetzung, dass *über jeden Index, der in einem Produkt zweimal vorkommt, von 1 bis 3 zu summieren ist*. Als Beispiel geben wir nochmals den Betrag eines Vektors nach dieser Konvention an:

$$|\vec{A}|^2 = A_i A_i = \sum_{i=1}^3 A_i A_i = A_1 A_1 + A_2 A_2 + A_3 A_3.$$

Es ist zu beachten, dass die Wahl des Summationsindex beliebig ist, also folgende Ausdrücke identisch sind:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_i A_i} = \sqrt{A_j A_j} = \sqrt{A_k A_k}.$$

Nicht zulässig wäre obigen Ausdruck in folgender Weise zu schreiben:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_i^2}, \quad (\text{falsch!}),$$

weil ja der Summationsindex i nur einmal auftaucht, und somit nicht klar ist, worüber zu summieren ist.

2.1.2 Vektoralgebra

Hier fassen wir einfache Rechenregeln für das Addieren und Subtrahieren von Vektoren sowie die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren zusammen. Es ist zu beachten, dass für die konkrete Rechnung von der symbolischen Schreibweise, z.B. $\vec{A} + \vec{B}$, immer auf die Darstellung des Vektors in einem Koordinatensystem übergegangen wird, also:

$$\left\{ \vec{A} + \vec{B} \right\}_k = A_k + B_k \quad (2.2)$$

$$\left\{ \vec{A} - \vec{B} \right\}_k = A_k - B_k. \quad (2.3)$$

Weiters lässt sich leicht zeigen, dass die Vektoraddition kommutativ und assoziativ ist:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (2.4)$$

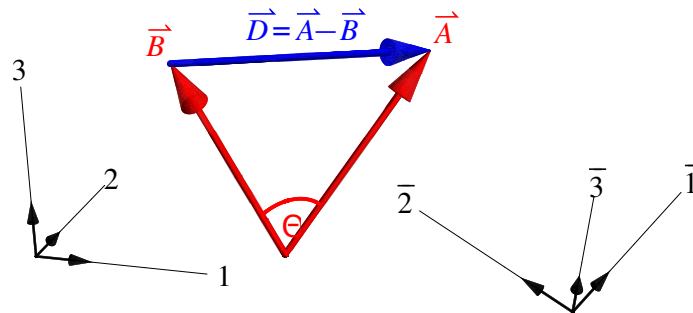
$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}). \quad (2.5)$$

Unter dem Produkt eines Vektors \vec{A} mit einem Skalar λ , symbolisch schreiben wir $\lambda\vec{A}$, verstehen wir jenen Vektor, dessen Koordinaten sich durch die Multiplikation der entsprechenden Koordinaten von \vec{A} mit λ ergeben:

$$\{\lambda\vec{A}\}_k = \lambda A_k. \quad (2.6)$$

2.1.3 Das Skalarprodukt

Wir suchen zunächst den Winkel θ zwischen zwei Vektoren \vec{A} und \vec{B} und verwenden dazu das aus den Vektoren \vec{A} , \vec{B} , und $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ gebildete Dreieck (siehe Abbildung).



Aus dem Cosinussatz folgt:

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta.$$

Andererseits folgt aus der Bildung des Betragsquadrats von $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ in einem Koordinatensystem 1,2,3:

$$\begin{aligned} D^2 &= D_i D_i = (A_i - B_i)(A_i - B_i) \\ &= A_i A_i + B_i B_i - 2A_i B_i \\ &= A^2 + B^2 - 2A_i B_i. \end{aligned}$$

Der Vergleich der obigen beiden Gleichungen zeigt, dass gilt

$$A_i B_i = AB \cos \theta, \quad (\text{Summenkonvention!})$$

In symbolischer Schreibweise führen wir für das sogenannte *skalare Produkt* folgende Schreibweise ein:

$$\vec{A}\vec{B} = AB \cos \theta. \quad (2.7)$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren $\vec{A}\vec{B}$ ist, wie der Name schon nahelegt, ein Skalar, d.h. invariant in Bezug auf Änderung des Koordinatensystems. Diese Tatsache sieht man daran, dass die rechte Seite von Gl. 2.7 das Produkt der Längen A und B der Vektoren und des Cosinus des eingeschlossenen Winkel θ ist. Alle diese Größen sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Das skalare Produkt ist kommutativ, distributiv, aber *nicht* assoziativ:

$$\vec{A}\vec{B} = \vec{B}\vec{A} \quad (2.8)$$

$$\vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{C} \quad (2.9)$$

$$\vec{A}(\vec{B}\vec{C}) \neq (\vec{A}\vec{B})\vec{C}. \quad (2.10)$$

Dass 2.10 nicht gilt, ist unmittelbar einsichtig, weil die linke Seite ja einen Vektor parallel zu \vec{A} darstellt, während die rechte Seite ein Vektor parallel zu \vec{C} ist. Für beliebige Vektoren \vec{A} und \vec{C} kann somit 2.10 nicht gelten.

Aus 2.7 folgt, dass das skalare Produkt verschwindet, wenn entweder \vec{A} oder \vec{B} der Nullvektor ist (Vektor mit Länge Null), oder der $\cos \theta = 0$, das heißt der Winkel $\theta = \frac{\pi}{2}$, gleichbedeutend mit der Aussage, dass \vec{A} senkrecht auf \vec{B} steht.

2.1.4 Darstellung von Vektoren

Mithilfe des Skalarprodukts können wir die *Koordinate* und die *Komponente* eines Vektors \vec{A} in Richtung eines Einheitsvektors \vec{e} berechnen, wobei $|\vec{e}| = 1$.

Unter der *Koordinate* des Vektors \vec{A} in Richtung eines Einheitsvektors \vec{e} verstehen wir das skalare Produkt (die Zahl)

$$\vec{A}\vec{e} = A \cos \theta = A_i e_i \quad (2.11)$$

Unter der *Komponente* des Vektors \vec{A} in Richtung eines Einheitsvektors \vec{e} verstehen wir den Vektor

$$\vec{A}' = (\vec{A}\vec{e})\vec{e} \quad (2.12)$$

$$\left\{ \vec{A}' \right\}_k = A_i e_i e_k. \quad (2.13)$$

Jeder Vektor \vec{A} lässt sich in eindeutiger Weise als Summe von zwei Vektoren \vec{A}' und \vec{A}'' darstellen,

von denen der erste parallel und der zweite senkrecht zu einem gegebenen Einheitsvektor \vec{e} ist:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}'' \quad (2.14)$$

$$\vec{A}' = (\vec{A}\vec{e})\vec{e} \quad (2.15)$$

$$\vec{A}'' = \vec{A} - (\vec{A}\vec{e})\vec{e}. \quad (2.16)$$

Definition. Wir bezeichnen eine *orthogonale Basis* als ein System von drei Einheitsvektoren \vec{e}^1 , \vec{e}^2 , und \vec{e}^3 , die paarweise aufeinander senkrecht stehen

$$\vec{e}^i \vec{e}^k = \delta_{ik}. \quad (2.17)$$

Hierbei haben wir das so genannte *Kronecker'sche Delta* verwendet, das 1 ist wenn die Indizes $i = k$ und 0 ist, wenn $i \neq k$. Zu beachten ist auch, dass die hochgestellten Indizes zum *Namen* des Vektors gehören. Schreibt man die Gleichung 2.17 ausführlicher, dann sind das die folgenden 9 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}^1 \vec{e}^1 = 1 & \vec{e}^1 \vec{e}^2 = 0 & \vec{e}^1 \vec{e}^3 = 0 \\ \vec{e}^2 \vec{e}^1 = 0 & \vec{e}^2 \vec{e}^2 = 1 & \vec{e}^2 \vec{e}^3 = 0 \\ \vec{e}^3 \vec{e}^1 = 0 & \vec{e}^3 \vec{e}^2 = 0 & \vec{e}^3 \vec{e}^3 = 1 \end{array}$$

Eine *rechtsorientierte orthogonale Basis* liegt vor, wenn \vec{e}^1 , \vec{e}^2 , und \vec{e}^3 eine orthogonale Basis bilden, und wenn eine Drehung von \vec{e}^1 in Richtung \vec{e}^2 verbunden mit einem Fortschreiten in Richtung der Orientierung von \vec{e}^3 die Bewegung einer Rechtsschraube ergibt.

Stimmen die Richtungen und Orientierungen der Einheitsvektoren einer orthogonalen Basis mit den Richtungen und Koordinatenachsen 1,2,3 eines Koordinatensystems überein, dann gilt:

$$e_i^k = \delta_{ik}. \quad (2.18)$$

Bei dieser Gleichung in Koordinatenschreibweise ist zu beachten, dass der hochgestellte Index k den Namen des Einheitsvektors bezeichnet, während der tiefgestellte Index i die i -te Koordinate anzeigt.

Satz. Die skalaren Produkte eines Vektors \vec{A} mit den Einheitsvektoren \vec{e}^k in Richtung der Koordinatenachsen liefern die Koordinaten A_k des Vektors \vec{A} bezüglich des gegebenen Koordinatensystems:

$$\vec{A} \vec{e}^k = A_i e_i^k = A_i \delta_{ik} = A_k. \quad (2.19)$$

Somit lässt sich jeder Vektor als Summe seiner drei Komponenten in Richtung der Achsen eines

Koordinatensystems darstellen:

$$\vec{A} = \vec{A}^1 + \vec{A}^2 + \vec{A}^3 = A_1 \vec{e}^1 + A_2 \vec{e}^2 + A_3 \vec{e}^3 \quad (2.20)$$

$$\vec{A}^1 = (\vec{A} \vec{e}^1) \vec{e}^1 = A_1 \vec{e}^1 \quad (2.21)$$

$$\vec{A}^2 = (\vec{A} \vec{e}^2) \vec{e}^2 = A_2 \vec{e}^2 \quad (2.22)$$

$$\vec{A}^3 = (\vec{A} \vec{e}^3) \vec{e}^3 = A_3 \vec{e}^3 \quad (2.23)$$

2.1.5 Das Vektorprodukt

Vermutlich kennen Sie das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) zweier Vektoren nach folgender Definition:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{pmatrix}$$

Wir geben hier einige wichtige Eigenschaften des Vektorprodukts an.

Satz. Bei Vertauschen der Reihenfolge der Vektoren ändert das vektorielle Produkt sein Vorzeichen (d.h. das vektorielle Produkt ist nicht kommutativ)

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (2.24)$$

Bsp. Es ist die Fläche des durch die Punkte $A_i = (1, 2, 1)$, $B_i = (2, 7, 5)$, und $C_i = (5, 4, 2)$ bestimmten Dreiecks zu berechnen.

Satz. Das vektorielle Produkt $\vec{A} \times \vec{B}$ der Vektoren \vec{A} und \vec{B} steht senkrecht auf beide Vektoren \vec{A} und \vec{B} , d.h. es gilt:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \vec{A} = 0 \quad \text{und} \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \vec{B} = 0 \quad (2.25)$$

Bsp. Wir untersuchen, ob die folgenden drei Vektoren in einer Ebene liegen: $A_i = (4, 5, 2)$, $B_i = (2, -2, 1)$, $C_i = (-1, 0, 2)$

Satz. Der Betrag des vektoriellen Produkts $\vec{A} \times \vec{B}$ der Vektoren \vec{A} und \vec{B} ist gegeben durch:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2} \quad (2.26)$$

Der Betrag des vektoriellen Produkts $\vec{A} \times \vec{B}$ der Vektoren \vec{A} und \vec{B} ist gleich der Fläche des von \vec{A} und \vec{B} gebildeten Parallelogramms

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (2.27)$$

Zum Beweis der Eigenschaften 2.24–2.27 des vektoriellen Produkts siehe z.B. mein Skriptum [Vektoranalysis](#), wo auch die folgende nützliche Relation hergeleitet wird:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (2.28)$$

Das gemischte Produkt (oder auch Spatprodukt). Das gemischte Produkt der Vektoren $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ wird symbolisch mit $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ bezeichnet und ist definiert durch

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

Das Spatprodukt ist ein Skalar, der das Volumen des durch die Vektoren $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ aufgespannten Parallelepipeds angibt.

Bsp. Berechne das Volumen des von den Vektoren $A_i = (0, 3, 0)$, $B_i = (-2, 1, 0)$, und $C_i = (0, 2, 4)$ aufgespannten Parallelepipeds.

2.1.6 Analytische Geometrie

Mit Hilfe von Vektoren kann die analytische Beschreibung von geometrischen Sachverhalten sehr einfach ausgedrückt werden. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf die Darstellung von Geraden in der Ebene (\mathbb{R}^2) und im Raum (\mathbb{R}^3) bzw. die Darstellung von Ebenen im \mathbb{R}^3 .

Der Ortsvektor. Der Vektor, der den Ursprung mit dem Punkt (x, y, z) verbindet, nennen wir den Ortsvektor (er ist somit ein *gebundener* Vektor) und ist gegeben durch

$$\vec{r} = x \vec{e}^1 + y \vec{e}^2 + z \vec{e}^3 \quad (\mathbb{R}^3) \quad (2.30)$$

$$\vec{r} = x \vec{e}^1 + y \vec{e}^2 \quad (\mathbb{R}^2) \quad (2.31)$$

Darstellung von Geraden. Die *Parameterdarstellung einer Geraden* in \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 erhalten wir,¹ indem wir den Ortsvektor als Funktion *eines* Parameters $t \in \mathbb{R}$ auffassen

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \vec{a}. \quad (2.32)$$

Hierbei ist \vec{r}_0 ein beliebiger Punkt, der auf der Geraden liegt, und \vec{a} ist ein Vektor, der die Richtung der Gerade angibt.

In \mathbb{R}^2 , können wir eine Gerade auch in folgender *impliziter* Form angeben

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.33)$$

Hierbei ist \vec{n} der Normalenvektor, also ein Vektor, der senkrecht auf die Gerade steht: $\vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} = 0$.

Schließlich gibt es im \mathbb{R}^3 noch eine weitere Möglichkeit, eine Gerade anzugeben, nämlich *implizit* als die Menge aller Punkte, die durch \vec{r}_0 gehen und parallel zu \vec{a} sind. Dementsprechend muss das Kreuzprodukt von $\vec{r} - \vec{r}_0$ mit \vec{a} verschwinden

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} = 0. \quad (2.34)$$

Diese Vektorgleichung beschreibt eigentlich ein System von 3 linearen Gleichungen, von denen 2 linear unabhängig sind, und deren Schnittgerade die dargestellte Gerade ist.

Darstellung von Ebenen. Die *Parameterdarstellung einer Ebene* im \mathbb{R}^3 erhalten wir, indem wir den Ortsvektor als Funktion von *zwei* Parametern $s \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ auffassen

$$\vec{r}(s, t) = \vec{r}_0 + s \vec{u} + t \vec{v}. \quad (2.35)$$

Hierbei ist \vec{r}_0 ein beliebiger Punkt, der sich in der Ebene befindet, und die beiden Vektoren \vec{u} und \vec{v} , die nicht parallel zueinander sein dürfen, sind zwei Richtungsvektoren, die in der Ebene liegen.

¹Diese Darstellung ist sogar in beliebig vielen Dimensionen also im \mathbb{R}^n möglich.

Die *implizite Form einer Ebenengleichung* in \mathbb{R}^3 erhalten wir als Menge aller Punkte, deren Skalarprodukt mit dem Normalenvektor \vec{n} verschwindet

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.36)$$

Hierbei ist der Normalenvektor \vec{n} ein Vektor, der senkrecht auf die Ebene steht, und z.B. über ein Vektorprodukt zweier unabhängiger Richtungsvektoren aufgestellt werden kann: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

2.2 Raumkurven

Mathematisch gesehen handelt es sich bei Raumkurven um Abbildungen der Art

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{A} : t &\mapsto \vec{A}(t) \end{aligned}$$

Das heißt der Vektor \vec{A} ist nicht konstant, sondern hängt von einem Parameter t ab. Ein in der Physik sehr häufig vorkommender Fall ist, dass dieser veränderlicher Vektor den Ortsvektor eines Teilchens beschreibt, und der Parameter t die Zeit darstellt.

2.2.1 Veränderliche Vektoren

Wenn wir nach der Bedeutung der Ableitung eines Vektors $\frac{d}{dt}\vec{A} \equiv \dot{\vec{A}}$ fragen, dann können wir das am besten in Koordinatendarstellung beantworten:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \vec{A} \right\}_i = \frac{d}{dt} A_i \equiv \dot{A}_i$$

Das heißt, die Ableitung eines Vektors nach einem Parameter ergibt wieder einen Vektor, dessen Koordinaten die Ableitungen der Koordinaten darstellen $\frac{d}{dt} A_i$, die wir – wie in der Physik üblich – auch mit \dot{A}_i abkürzen wollen. In einer gleichwertigen Schreibweise können wir diesen Sachverhalt auch so ausdrücken

$$\dot{\vec{A}} \equiv \frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{d}{dt} [A_i(t) \vec{e}^i] = \dot{A}_i(t) \vec{e}^i,$$

wobei die drei Vektoren $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$, die zeitlich nicht veränderlichen Einheitsvektoren sind, und nach der Summenkonvention über i zu summieren ist.

Von besonderem Interesse in der Physik sind zeitliche Ableitungen des Ortsvektors

$$\vec{r}(t) = x_1(t) \vec{e}^1 + x_2(t) \vec{e}^2 + x_3(t) \vec{e}^3 = x_i(t) \vec{e}^i.$$

Bekanntermaßen ergibt ja die erste Ableitung nach der Zeit die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$, die zweite Ableitung die Beschleunigung $\vec{a}(t)$.

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{x}_i(t) \vec{e}^i = v_i(t) \vec{e}^i \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \ddot{x}_i(t) \vec{e}^i & (2.38) \\ &= \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \dot{v}_i(t) \vec{e}^i. \end{aligned}$$

Beispiel: Die Bewegung eines Massenpunktes entlang einer Bahn werde durch folgenden Ortsvektor beschrieben (Welche Art von Bahn ist das?)

$$\vec{r}(t) = 2 \cos(3t) \vec{e}^1 + 2 \sin(3t) \vec{e}^2 + 5t \vec{e}^3.$$

Wir berechnen die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= -6 \sin(3t) \vec{e}^1 + 6 \cos(3t) \vec{e}^2 + 5 \vec{e}^3 \\ \vec{a}(t) &= -18 \cos(3t) \vec{e}^1 - 18 \sin(3t) \vec{e}^2. \end{aligned}$$

Was verstehen wir unter folgenden Ausdrücken: $\frac{d}{dt} (c(t) \vec{A}(t))$ und $\frac{d}{dt} (\vec{A}(t) \vec{B}(t))$? Das heißt, die Ableitung eines Produkts eines Skalars $c(t)$ mit einem veränderlichen Vektor $\vec{A}(t)$ bzw. die Ableitung des Skalarprodukts von zwei veränderlichen Vektoren $\vec{A}(t)$ und $\vec{B}(t)$. Dazu gehen wir am besten in Koordinatenschreibweise über und wenden die bekannten Rechenregeln für Differenziation an (Produktregel)

$$\left\{ \frac{d}{dt} [c(t) \vec{A}(t)] \right\}_i = \frac{d}{dt} [c(t) A_i(t)] = \dot{c}(t) A_i(t) + c(t) \dot{A}_i(t) = \left\{ \dot{c}(t) \vec{A}(t) + c(t) \dot{\vec{A}}(t) \right\}_i \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{A}(t) \vec{B}(t)] = \frac{d}{dt} [A_i(t) B_i(t)] = \dot{A}_i(t) B_i(t) + A_i(t) \dot{B}_i(t) = \dot{\vec{A}}(t) \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \dot{\vec{B}}(t) \quad (2.40)$$

Wenden wir Gleichung 2.40 auf eine Raumkurve an für die gilt $|\vec{A}(t)| = \text{const}$, das heißt für eine Kurve, die einen konstanten Abstand vom Ursprung hat, so finden wir:

$$\begin{aligned} \vec{A}(t) \vec{A}(t) &= \text{const} & / \frac{d}{dt} \\ \dot{\vec{A}}(t) \vec{A}(t) + \vec{A}(t) \dot{\vec{A}}(t) &= 0 \\ \dot{\vec{A}}(t) \vec{A}(t) &= 0, \end{aligned}$$

und somit die sehr nützliche Aussage: ein in seiner Richtung veränderlicher, aber dem *Betrag nach konstanter Vektor* liefert bei der Ableitung einen zum ursprünglichen Vektor *senkrechten* Vektor.

Beispiel: Die klassische Anwendung dieses Zusammenhangs ist die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn $|\vec{r}(t)| = r$ mit dem Radius r . Es gilt also

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{und somit} \quad \vec{r} \perp \vec{v}.$$

Handelt es sich zusätzlich um eine Bewegung mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit v , also $|\vec{v}(t)| = v$, so gilt auch

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{und somit} \quad \vec{v} \perp \vec{a}.$$

Des Weiteren finden wir wegen $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ auch

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{r} \cdot \vec{a} = -v^2.$$

Bei einer *ebenen* Bewegung liegen alle beteiligten Vektoren \vec{r} , \vec{v} , und \vec{a} in einer Ebene und es folgt aus $\vec{r} \perp \vec{v}$ und $\vec{v} \perp \vec{a}$, dass \vec{a} entweder parallel oder antiparallel auf \vec{r} steht. Aus $\vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{r}||\vec{a}| \cos \alpha = -v^2$ sehen wir, dass $\alpha = \pi$ sein muss, also \vec{a} in die entgegengesetzte Richtung weist wie \vec{r} . Schließlich gewinnen wir die bekannte Beziehung, dass für den Betrag der Zentralbeschleunigung bei einer Kreisbahn mit konstantem Betrag der Umlaufgeschwindigkeit gilt

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

2.2.2 Parametrisierung von Raumkurven

Oft sind Kurven $\vec{r}(t)$ nicht bereits explizit in dieser Form gegeben, sondern sind etwa durch den Schnitt zweier Flächen im Raum gegeben. Beispielsweise ergibt der Schnitt zweier nicht-paralleler Ebenen eine Gerade, deren Parameterdarstellung leicht gefunden werden kann, wie aus folgendem Beispiel ersichtlich wird.

Beispiel: Die zwei Ebenen

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

sind nicht parallel und besitzen daher eine Schnittgerade. Setzen wir $x_1 = t$ und berechnen anschließend $x_2(t)$ und $x_3(t)$ durch Elimination von x_3 bzw. x_2 aus den beiden Gleichungen, so erhalten wir

die Parameterdarstellung

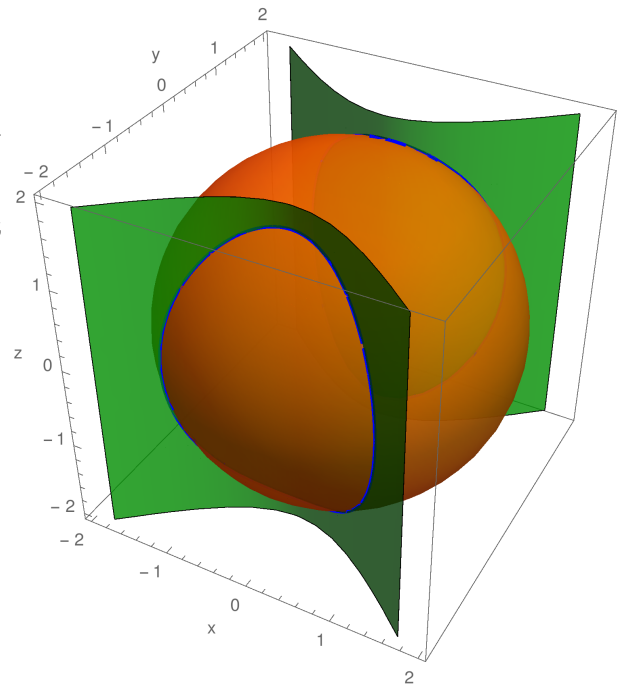
$$\vec{r}(t) = t\vec{e}^1 + \left(\frac{7}{5} - \frac{4t}{5}\right)\vec{e}^2 + \left(\frac{2}{5} + \frac{t}{5}\right)\vec{e}^3.$$

Natürlich hätten wir auch $x_2 = u$ oder $x_3 = v$ als Parameter wählen können, und wäre dann zu einer gleichwertige Parameterdarstellung der Form $\vec{r}(u) = (x_1(u), u, x_3(u))$ bzw. $\vec{r}(v) = (x_1(v), x_2(v), v)$ gelangt.

Verläuft die gesuchte Kurve in einer Ebene normal zu einer der Koordinatenachsen, ist zu beachten, dass dann die Wahl der entsprechenden Koordinate als Parameter nicht möglich ist. Verläuft etwa eine Schnittkurve parallel zur x_1x_2 -Ebene, also in einer Ebene $x_3 = \text{const.}$, dann scheidet die Wahl $x_3 = t$ als Parameter natürlich aus. Liefert der Schnitt zweier nicht-ebener Flächen mehrere Schnittkurven, so müssen diese getrennt parametrisiert werden.

Beispiel. Wir betrachten den Schnitt der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ (orange) mit dem Hyperboloid $x_1^2 - x_2^2 = -1$ (grün). Wählen wir $x_1 = t$, so finden wir die insgesamt vier Schnittkurven

$$\begin{aligned}\vec{r}^1(t) &= t\vec{e}^1 + \sqrt{1+t^2}\vec{e}^2 + \sqrt{3-2t^2}\vec{e}^3 \\ \vec{r}^2(t) &= t\vec{e}^1 + \sqrt{1+t^2}\vec{e}^2 - \sqrt{3-2t^2}\vec{e}^3 \\ \vec{r}^3(t) &= t\vec{e}^1 - \sqrt{1+t^2}\vec{e}^2 + \sqrt{3-2t^2}\vec{e}^3 \\ \vec{r}^4(t) &= t\vec{e}^1 - \sqrt{1+t^2}\vec{e}^2 - \sqrt{3-2t^2}\vec{e}^3\end{aligned}$$



2.2.3 Bogenelement

Das *vektorielle Bogenelement* $d\vec{r}$ ist, wie der Name schon sagt, ein Vektor, den wir als totales Differenzial auffassen können

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{d}{dt} [x_i \vec{e}^i] dt = \dot{x}_i \vec{e}^i dt. \quad (2.41)$$

Das *skalare Wegelement* ds erhalten wir, indem wir den Betrag von $d\vec{r}$ bilden

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\dot{x}_i \vec{e}^i dt) \cdot (\dot{x}_j \vec{e}^j dt) = \dot{x}_i \dot{x}_j (dt)^2 \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = \dot{x}_i \dot{x}_j \delta_{ij} (dt)^2 = \dot{x}_i \dot{x}_i (dt)^2 \quad (2.42)$$

bzw.

$$ds = \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i} dt \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}_i} = v. \quad (2.43)$$

Beispiel: Wir berechnen das vektorielle und skalare Bogenelement für folgende Raumkurve

$$\vec{r}(t) = t \vec{e}^1 + (t^2 - 1) \vec{e}^2 + (t - 1)^2 \vec{e}^3.$$

Damit erhalten wir

$$d\vec{r} = dt \vec{e}^1 + 2t dt \vec{e}^2 + 2(t - 1) dt \vec{e}^3,$$

und somit

$$ds = \sqrt{1 + 4t^2 + 4(t - 1)^2} dt = \sqrt{5 - 8t + 8t^2} dt.$$

2.2.4 Tangentenvektor, Krümmung, Torsion

In diesem Abschnitt charakterisieren wir Raumkurven, indem wir an jedem Punkt der Kurve ein orthogonales Dreibein definieren, das die Richtung der Tangente, der Krümmung, und der Torsion (ein Maß für die Abweichung von einer ebenen Kurve) angibt. Wir beginnen mit der Definition des Tangentenvektors \vec{T} an eine Raumkurve $\vec{r}(t)$. Er ist ein Einheitsvektor in Richtung der Tangente:

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} \equiv \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{oder} \quad T_i = \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_j \dot{x}_j}} = \frac{\dot{x}_i}{v}. \quad (2.44)$$

Schreiben wir den Vektor der Geschwindigkeit in der Form $\vec{v} = v\vec{T}$, so liefert die Differenziation Ausdrücke für die Tangentialbeschleunigung \vec{a}^T und Zentripetalbeschleunigung \vec{a}^Z .

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Da die Ableitung $\frac{d\vec{T}}{dt}$ senkrecht auf \vec{T} steht gilt also

$$\vec{a}^T = \frac{dv}{dt} \vec{T} \quad (\text{Tangentialbeschleunigung}) \quad (2.45)$$

$$\vec{a}^Z = v \frac{d\vec{T}}{dt} \quad (\text{Zentripetalbeschleunigung}) \quad (2.46)$$

Mit $ds = v dt$ können wir für den Tangentenvektor auch schreiben

$$T_i = \frac{1}{v} \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{ds} \quad \text{oder} \quad \vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (2.47)$$

Da der Tangentenvektor ein Einheitsvektor ist (also eine konstante Länge hat), steht die Ableitung des Tangentenvektors *normal* auf die Tangente, und stellt ein Maß für die *Krümmung* der Kurve in dem betrachteten Punkt dar. Definieren wir den sogenannten Hauptnormalenvektor \vec{H} (oder auch Krümmungsvektor) als Einheitsvektor, so können wir die Krümmung κ einer Kurve folgendermaßen charakterisieren

$$\kappa \vec{H} \equiv \frac{d\vec{T}}{ds} \quad \text{oder} \quad \kappa H_i = \frac{dT_i}{ds} \quad \text{bzw.} \quad \kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|. \quad (2.48)$$

Drücken wir \vec{T} durch $\vec{T} = \vec{v}/v$ aus und benützen wieder $ds = v dt$, so können wir den Hauptnormalenvektor \vec{H} auch schreiben als

$$\vec{H} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\dot{\vec{v}}}{v^2} - \frac{\dot{v}}{v^3} \vec{v} \right) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\vec{a}}{v^2} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{v^4} \vec{v} \right). \quad (2.49)$$

Eine weitere nützliche Darstellung für die Krümmung einer Kurve gewinnen wir, indem wir Gleichung 2.48 von links vektoriell mit $\vec{T} \times$ multiplizieren und anschließend den Betrag bilden

$$\kappa \vec{T} \times \vec{H} = \vec{T} \times \frac{d\vec{T}}{ds} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \left| \vec{T} \times \frac{d\vec{T}}{ds} \right|.$$

Verwenden wir nun $\vec{T} = \vec{v}/v$ und $ds = v dt$, so finden wir einen weiteren Ausdruck für die Krümmung

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{v^3}. \quad (2.50)$$

Schließlich benutzen wir die beiden Einheitsvektoren \vec{T} und \vec{H} , um einen dritten Einheitsvektor, den *Binormalenvektor* \vec{B} , aufzustellen, der dann zusammen mit \vec{T} und \vec{H} ein orthogonales Dreibein liefert

$$\vec{B} \equiv \vec{T} \times \vec{H} \quad \text{oder} \quad \vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|}. \quad (2.51)$$

Bilden wir nun die Ableitung nach ds von Gleichung 2.51, so sehen wir, dass $\frac{d\vec{B}}{ds}$ *parallel* zum Hauptnormalenvektor ist. Die Proportionalitätskonstante bezeichnen wir als *Torsion* und verwenden das Symbol τ .

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{ds} &= \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{H} + \vec{T} \times \frac{d\vec{H}}{ds} \\ &= \kappa \vec{H} \times \vec{H} + \vec{T} \times \frac{d\vec{H}}{ds} = \vec{T} \times \frac{d\vec{H}}{ds} \end{aligned}$$

Da somit $\frac{d\vec{B}}{ds}$ normal auf \vec{T} steht und $\frac{d\vec{B}}{ds}$ auch normal auf \vec{B} stehen muss, weil ja $|\vec{B}| = \text{const.}$, ist die

obige Aussage bewiesen. Wir schreiben

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{H}. \quad (2.52)$$

Schreiben wir nun weiters Gl. 2.51 um in $\vec{B} \times \vec{T} = \vec{H}$ und leiten diese nach $\frac{d}{ds}$ ab, so finden wir unter Verwendung der Definitionen für Krümmung und Torsion und der Beziehungen der Vektoren \vec{T} , \vec{H} und \vec{B} im orthogonalen Dreiein

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{ds} &= \frac{d\vec{B}}{ds} \times \vec{T} + \vec{B} \times \frac{d\vec{T}}{ds} \\ &= -\tau\vec{H} \times \vec{T} + \kappa\vec{B} \times \vec{H} \\ &= \tau\vec{B} - \kappa\vec{T}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Wir fassen die Beziehungen zwischen den Vektoren \vec{T} , \vec{H} und \vec{B} , sowie die Definitionen von Krümmung κ und Torsion τ als sogenannte *Frenet'sche Formeln* zusammen:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{H}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{H}, \quad \frac{d\vec{H}}{ds} = \tau\vec{B} - \kappa\vec{T}. \quad (2.54)$$

Bsp: Kreisbahn. Als erstes Beispiel betrachten wir die Bewegung auf einer Kreisbahn in der xy -Ebene mit dem Radius R und der Kreisfrequenz ω

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \vec{e}^1 + R \sin(\omega t) \vec{e}^2.$$

Zunächst schreiben wir $\vec{r}(t)$ in $\vec{r}(s)$ um, indem wir $ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = R\omega dt$ berechnen, und somit finden

$$\vec{r}(s) = R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^1 + R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^2.$$

Gleichung 2.47 liefert dann

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^1 + \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^2,$$

und die Ableitung $\frac{d\vec{T}}{ds}$ ergibt

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{1}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^1 - \frac{1}{R} \sin\left(\frac{s}{R}\right) \vec{e}^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \frac{1}{R}.$$

Mit dem Hauptnormalenvektor $\vec{H} = -\cos\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^1 - \sin\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^2$ finden wir schließlich für den Binormalenvektor den konstanten Vektor in z -Richtung

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{H} = \vec{e}^3.$$

Damit ist $\frac{d\vec{B}}{ds} = 0$ und die Torsion τ verschwindet für diese ebene Bahn. Wir überprüfen noch die Konsistenzbedingung der Frenet'schen Formeln (rechte Gleichung in 2.54) und finden

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{ds} &= \tau\vec{B} - \kappa\vec{T} \\ \frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^1 - \frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^2 &= 0 - \frac{1}{R}\left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^1 + \cos\left(\frac{s}{R}\right)\vec{e}^2\right) \checkmark \end{aligned}$$

Bsp: Schraubenlinie. Wir betrachten hier die Schraubenlinie gegeben durch

$$\vec{r}(t) = 3\cos(t)\vec{e}^1 + 3\sin(t)\vec{e}^2 + 4t\vec{e}^3.$$

Zunächst schreiben wir wieder $\vec{r}(t)$ in $\vec{r}(s)$ um, indem wir $ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = 5dt$ berechnen, und somit finden

$$\vec{r}(s) = 3\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 + 3\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{4}{5}s\vec{e}^3.$$

Gleichung 2.47 liefert dann

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{3}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 + \frac{3}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{4}{5}\vec{e}^3.$$

und die Ableitung $\frac{d\vec{T}}{ds}$ ergibt

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{3}{25}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{3}{25}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{3}{25}.$$

Mit dem Hauptnormalenvektor $\vec{H} = -\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2$ finden wir schließlich für den Binormalenvektor den Vektor

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{H} = \frac{4}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{4}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{3}{5}\vec{e}^3.$$

Damit ist

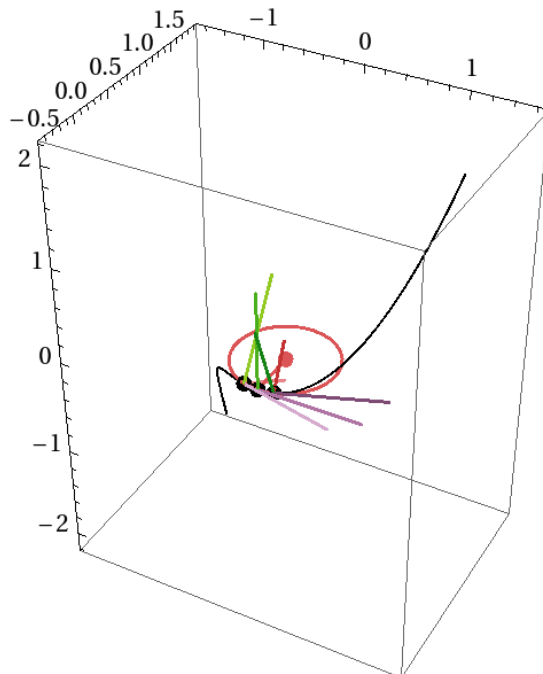
$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{4}{25}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 + \frac{4}{25}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right| = \frac{4}{25}.$$

und die Torsion τ ist dieses Mal nicht gleich Null für diese nicht ebene Bahn. Wir überprüfen noch die Konsistenzbedingung der Frenet'schen Formeln (rechte Gleichung in 2.54) und finden

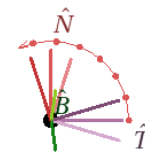
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{ds} &= \tau\vec{B} - \kappa\vec{T} \\ \frac{1}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 &= \frac{4}{25}\left[\frac{4}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{4}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{3}{5}\vec{e}^3\right] \\ &\quad - \frac{3}{25}\left[-\frac{3}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 + \frac{3}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 + \frac{4}{5}\vec{e}^3\right] \\ &= \frac{1}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^1 - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{e}^2 \checkmark \end{aligned}$$

CDF 4. Krümmung und Torsion [cdf04_Kruemmung_und_Torsion.cdf](#)

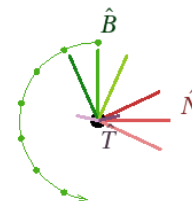
Choose among several curves and see the rotation of the Frenet-Serret frame as you move the slider. From this you can perceive the curvature and torsion of the curve. Associated objects (such as the circle of curvature, evolute, and osculating sphere, as well as two views of the Frenet frames) may be displayed.



curvature $\kappa = 2$.



torsion $\tau = 3$.



2.2.5 Linienintegrale

Das Kurven-, Linien-, oder Wegintegral erweitert den gewöhnlichen Integralbegriff für die Integration im mehrdimensionalen Raum. Es beschreibt die Integration entlang einer Kurve und führt auf ein Einfachintegral. Ein typisches Anwendungsbeispiel aus der Physik liefert einen Zusammenhang zwischen der Kraft \vec{F} , die entlang eines Weges C integriert, die geleistete Arbeit W ergibt

$$W = \int_C \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\vec{r}. \quad (2.55)$$

Durch Einsetzen des vektoriellen Wegelements $d\vec{r}$ wird das Integral in ein Einfachintegral übergeführt, für dessen Lösung die aus der Vorlesung Differenzial- und Integralrechnung bekannten Verfahren angewendet werden können. Das Ergebnis des obigen Integrals ist ein Skalar, da der Integrand das Skalarprodukt eines Vektorfeldes \vec{F} mit dem vektoriellen Wegelement ist. Andere Beispiele für Wegintegrale wären etwa

$$A = \int_C \Phi(x_1, x_2, x_3) ds \quad (2.56)$$

$$\vec{B} = \int_C \Phi(x_1, x_2, x_3) d\vec{r} \quad (2.57)$$

$$\vec{D} = \int_C \vec{F}(x_1, x_2, x_3) ds \quad (2.58)$$

Hier ist $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ein *skalares* Feld während $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ ein *Vektorfeld* darstellt. Dementsprechend führt 2.56 auf einen Skalar während 2.57 und 2.58 einen Vektoren als Ergebnis der Integration liefern. Als Spezialfall der Kategorie 2.56 berechnet sich die Länge L einer Kurve C aus:

$$L = \int_C ds. \quad (2.59)$$

Ausführlicher geschrieben bedeutet Gleichung 2.55

$$W = \int_C \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} F_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_i}{dt} dt. \quad (2.60)$$

Die Kurve C wird also durch die Parameterdarstellung $x_i(t)$ beschrieben. Der Anfangspunkt der Kurve ist bei $t = t_1$, der Endpunkt bei $t = t_2$, und das Vektorfeld F_i wird entlang der Kurve ausgewertet.

Beispiel. Wir berechnen die Länge eines Viertelkreises L mit dem Radius r . Mit

$$\vec{r}(t) = r \cos t \vec{e}^1 + r \sin t \vec{e}^2, \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = -r \sin t \vec{e}^1 + r \cos t \vec{e}^2$$

$$ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = r\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = r dt$$

erhalten wir für die gesuchte Länge der Kurve das bekannte Ergebnis

$$L = \int_C ds = \int_0^{\pi/2} r dt = \frac{r\pi}{2}.$$

Länge einer Wurfparabel. Als weiteres Anwendungsbeispiel wollen wir die Bahnlänge einer Wurfparabel berechnen. Wir nehmen an, dass eine Masse horizontal mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung aus einer Höhe h abgeworfen wird. Vernachlässigen wir den Luftwiderstand, so ergibt sich die bekannte Wurfparabel:

$$\vec{r}(t) = vt\vec{e}^1 + \left(h - \frac{g}{2}t^2\right)\vec{e}^3, \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = v dt \vec{e}^1 - g dt t \vec{e}^3,$$

$$ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \sqrt{v^2 + g^2 t^2} dt.$$

Hierbei haben wir auch gleich nach den bereits bekannten Regeln das Wegelement ds berechnet. Um die Länge L der Parabel bis zum Aufschlagen der Masse bei $z = 0$ zu berechnen, benötigen wir noch die Zeit t_2 , die wir aus der Forderung $z(t) = 0$ gewinnen, also $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, und damit gilt:

$$L = \int_0^{t_2} \sqrt{v^2 + g^2 t^2} dt.$$

Dieses Integral können wir auflösen, indem wir die Eigenschaft der hyperbolischen Winkelfunktionen, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, dazu benutzen um die Wurzel "loszuwerden". Dazu müssen wir zuerst geeignete Variablentransformationen (Substitutionen) durchführen. Das erledigen wir in zwei Schritten:

$$L = \int_0^{t_2} \sqrt{v^2 + g^2 t^2} dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{v}{g} u \\ dt = \frac{v}{g} du \\ t_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \\ t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow u_2 = \frac{g}{v} \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{array} \right| = \frac{v^2}{g} \int_0^{u_2} \sqrt{1 + u^2} du.$$

In der zweiten Substitution kommen nun die erwähnten hyperbolischen Winkelfunktionen ins Spiel,

$$L = \left| \begin{array}{l} u = \sinh w \\ du = \cosh w dw \\ u_1 = 0 \Rightarrow w_1 = 0 \\ u_2 = \sqrt{\frac{2gh}{v^2}} \Rightarrow w_2 = \operatorname{arsinh} u_2 \end{array} \right| = \frac{v^2}{g} \int_0^{w_2} \sqrt{1 + \sinh^2 w} \cdot \cosh w dw = \frac{v^2}{g} \int_0^{w_2} \cosh^2 w dw.$$

Das verbleibende Integrals lösen wir am einfachsten, wenn wir folgende Eigenschaft der hyperbolischen Cosinusfunktion benützen, $\cosh^2 w = \frac{1}{2} (1 + \cosh(2w))$. Damit erhalten wir für das gesuchte Integral

$$L = \frac{v^2}{2g} \left[w + \frac{1}{2} \sinh(2w) \right]_0^{w_2} = \frac{v^2}{2g} \left(w_2 + \frac{1}{2} \sinh(2w_2) - 0 - 0 \right)$$

Und mit

$$w_2 = \operatorname{arsinh} \left[\sqrt{\frac{2gh}{v^2}} \right],$$

und dem Zusammenhang $\sinh(2 \operatorname{arsinh}(x)) = 2x\sqrt{1+x^2}$ gelangen wir schließlich zu dem gewünschten Ausdruck für die Länge der Wurfparabel

$$L = \frac{v^2}{2g} \left[\sqrt{\frac{2gh}{v^2}} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}} + \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{2gh}{v^2}} \right].$$

Mittelwert von Funktionen entlang von Kurven. Sei $f(x, y)$ eine Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, und C eine Kurve in \mathbb{R}^2 mit der Länge L , dann ist der Mittelwert \bar{f} entlang der Kurve C durch folgendes Integral gegeben

$$\bar{f} = \frac{1}{L} \int_C f(x, y) ds.$$

In einem Beispiel nehmen wir an, dass $T(x, y) = 1 + x + y^2$ die Temperaturverteilung in der xy -Ebene beschreibt, und dass wir die mittlere Temperatur \bar{T} entlang einer Bahn C gegeben als Viertelkreis von $(x, y) = (0, 2)$ bis $(x, y) = (2, 0)$ berechnen wollen, also $L = 2r\pi/4 = \pi$. Mit dem bereits bekannten Wegelement für $y(x) = \sqrt{4-x^2}$ für eine Kreisbewegung (siehe oben)

$$ds = \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} dx, \quad \text{und} \quad T(x, y(x)) = 1 + x + 4 - x^2 = 5 + x - x^2,$$

erhalten wir für die mittlere Temperatur

$$\bar{T} = \frac{1}{\pi} \int (5 + x - x^2) \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} dx = \dots = 3 + \frac{4}{\pi}.$$

Das obige Integral lässt sich mit der Substitution $x = 2 \sin t$ in den Griff bekommen.

Beispiel: Bewegung im homogenen Gravitationsfeld. Nahe der Erdoberfläche wirkt die konstante Gravitationskraft

$$\vec{F} = -mg \vec{e}^3.$$

Wir berechnen die Arbeit W für eine *Bewegung senkrecht nach oben*, in positive z Richtung mit der Geschwindigkeit v auf die Höhe h . Diesen Integrationsweg $\vec{r}(t)$ können wir als in eine nach der Zeit t parametrisierten Form

$$\vec{r}(t) = vt \vec{e}^3$$

ausdrücken. Das vektorielle Wegelement $d\vec{r}$ ist das totale Differenzial

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = v dt \vec{e}^3,$$

womit wir für die Arbeit erhalten

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (-mgv dt) = \int_0^{h/v} (-mgv) dt = -mgv t \Big|_0^{h/v} = -mgh.$$

Wenn wir statt einer Bewegung senkrecht nach oben, eine *spiralförmige Bahn* der Masse nach oben annehmen, also

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \vec{e}^1 + R \sin(\omega t) \vec{e}^2 + vt \vec{e}^3,$$

wobei R den Radius der Spirale und ω die Kreisfrequenz bedeutet, so können wir mithilfe des totalen Differenzials

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = -R\omega \sin(\omega t) dt \vec{e}^1 + R\omega \cos(\omega t) dt \vec{e}^2 + v dt \vec{e}^3,$$

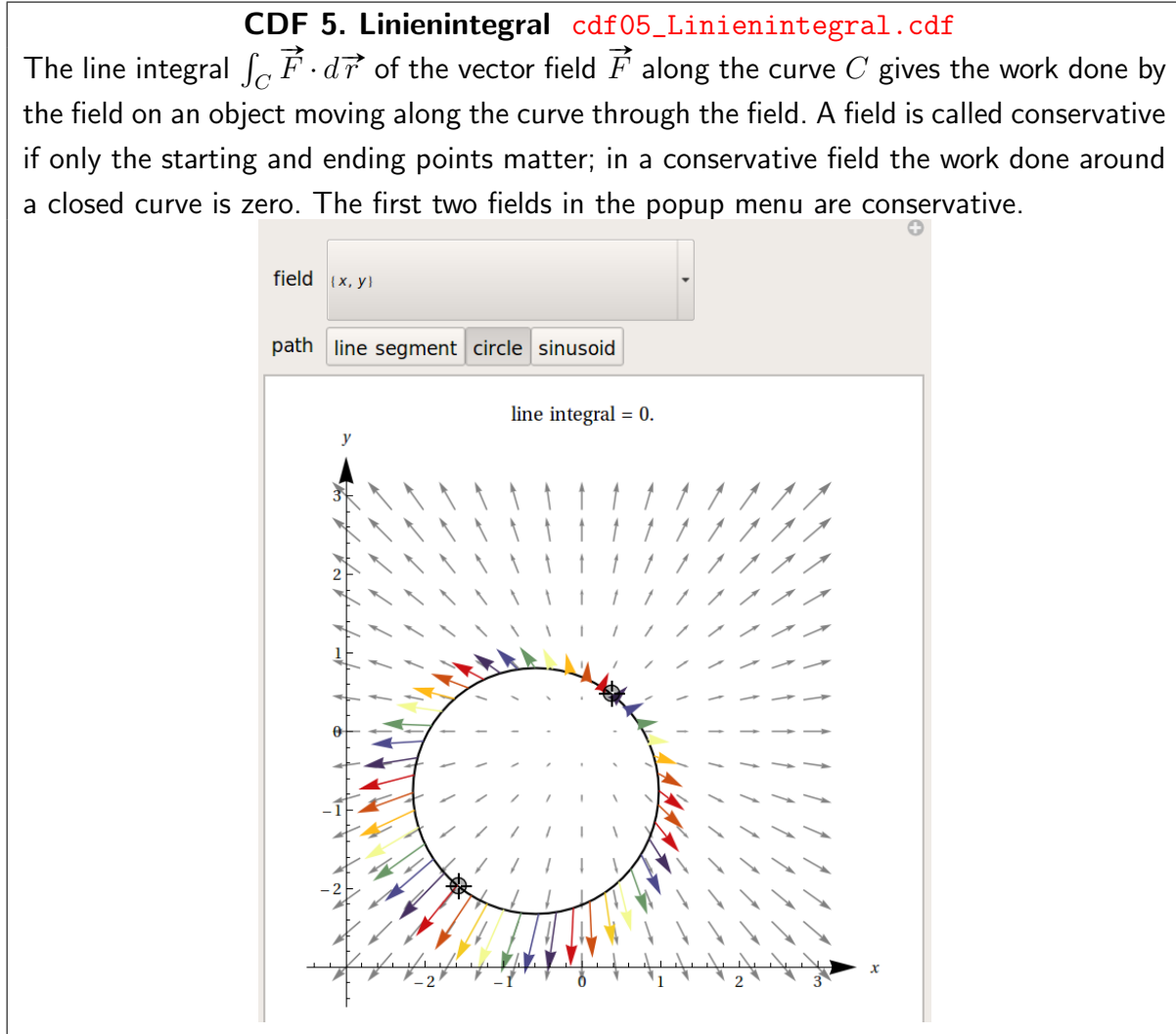
wiederum die geleistete Arbeit berechnen. Wie zu erwarten, erhalten wir das gleiche Ergebnis wie wir es bereits weiter oben für die senkrechte Bewegung nach oben erhalten haben. Mit $\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = \delta_{ik}$ erhalten wir

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{h/v} (-mgv) dt = -mgv t \Big|_0^{h/v} = -mgh.$$

Eine tiefere Begründung dafür werden wir etwas später geben (siehe Kapitel 2.4.2). Kurz gesagt hängt das Ergebnis solcher Wegintegrale $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, wenn es sich bei dem Kraftfeld \vec{F} um ein konservatives Kraftfeld handelt, das heißt, um ein Feld, das sich als Gradient eines skalaren Feldes (eines Potentials) ausdrücken lässt.

Wir wollen noch die Länge der oben verwendeten Spiralbahn berechnen. Dazu müssen wir die Länge des entsprechenden Wegelements, also $ds = |d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}$ über den Weg C aufintegrieren. Damit erhalten wir für die Länge L des Weges

$$L = \int_C ds = \int_C \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2 + R^2\omega^2 \cos^2 + v^2} dt = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2} \int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2}(t_2 - t_1).$$



2.3 Flächen im Raum

2.3.1 Parameterdarstellung einer Fläche

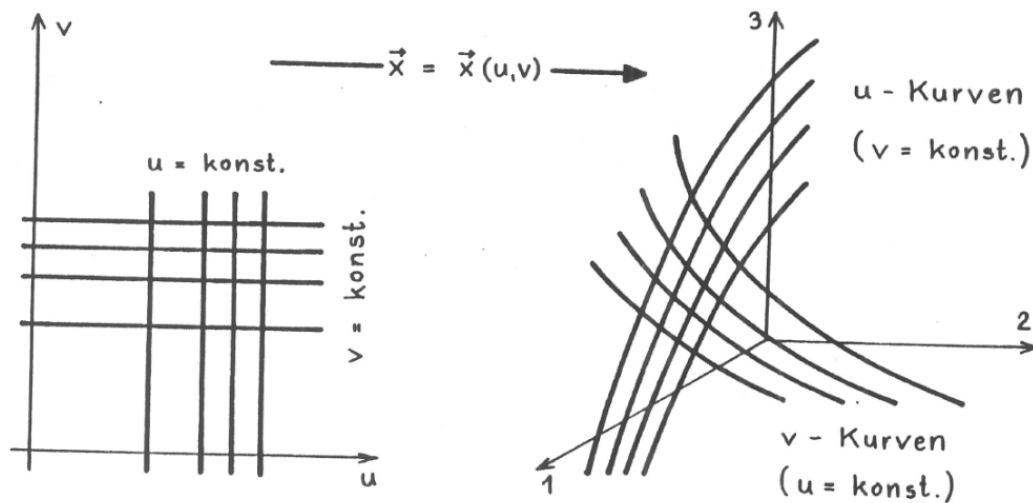
Wir gehen von der Annahme aus, dass die Koordinaten eines Punktes (Ortsvektor) \vec{x} Funktionen von zwei Parametern u und v sind

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \quad \leftrightarrow \quad x_i = x_i(u, v) \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1(u, v) \\ x_2 &= x_2(u, v) \\ x_3 &= x_3(u, v) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Die Gleichungen 2.61 besagen, dass jedem Wertepaar (u, v) ein Punkt $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zugeordnet wird. Es handelt sich also um eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Halten wir einen der Parameter, beispielsweise v , fest, setzen also $v = v_1 = \text{const.}$, so beschreiben die Punkte $\vec{x} = \vec{x}(u, v_1)$ eine Kurve auf der Fläche. Der Schar von parallelen Geraden $v = \text{const.}$ in der (u, v) -Ebene wird durch die Abbildung 2.61 eine Schar von Raumkurven zugeordnet (u -Kurven).

Ganz entsprechend wird der Schar von parallelen Geraden $u = \text{const.}$ in der (u, v) -Ebene durch die Abbildung 2.61 eine Schar von Raumkurven zugeordnet (v -Kurven). Dieser Sachverhalt ist in der Abbildung unten illustriert.



Wir wollen im folgenden voraussetzen, dass die Zuordnung $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ umkehrbar eindeutig ist, d.h. jedem Punkt der (u, v) -Ebene soll ein Punkt \vec{x} zugeordnet sein und umgekehrt. Dann folgt, dass jede u -Kurve jede v -Kurve nur in einem Punkt schneidet, und dass die beiden Kurvenscharen (u -Kurven und v -Kurven) ein geometrisches Gebilde überdecken, das wir *Fläche* nennen.

2.3.2 Tangentialebene, Normalenvektor und Flächenelement

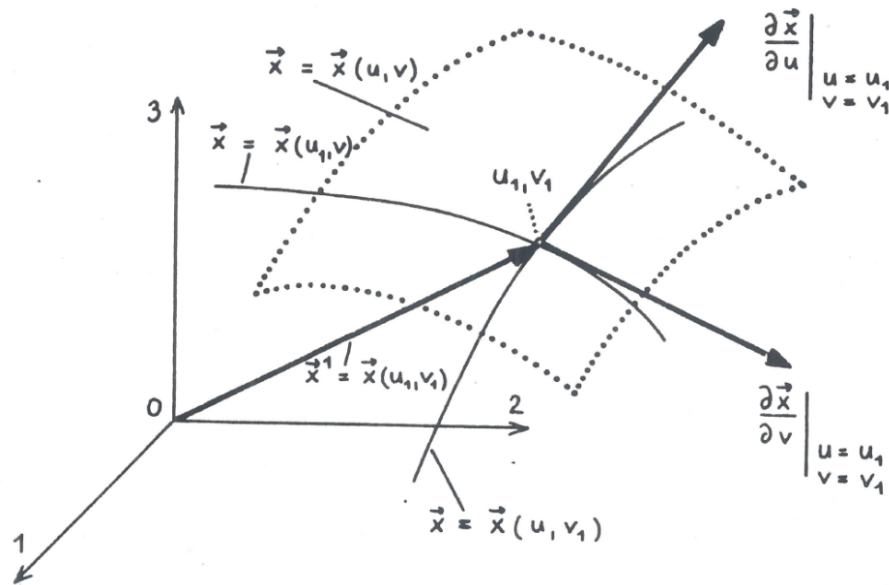
Wir wollen nun die Tangentialebene, den Normalenvektor und schließlich das differentielle Flächenelement einer Fläche $\vec{x}(u, v)$ bestimmen. Kurz gesagt bedienen wir uns der bereits bekannten Berechnung von Tangentenvektoren, und stellen Tangentenvektoren entlang der u -Kurven und der v -Kurven der Fläche auf.

Ganz analog zu Gleichung 2.44 für die Tangente an Raumkurven berechnen wir den Tangentenvektor \vec{T}^u entlang der u -Kurven indem wir die *partielle* Ableitung von \vec{x} nach u bilden

$$\vec{T}^u = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right|} \quad (2.62)$$

Ganz analog berechnen wir den Tangentenvektor \vec{T}^v entlang der v -Kurven indem wir die *partielle* Ableitung von \vec{x} nach v bilden

$$\vec{T}^v = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right|} \quad (2.63)$$



Beispiel. Wir wollen die Berechnung der Tangentenvektoren \vec{T}^u und \vec{T}^v mittels Gleichungen 2.62 und 2.63 anhand der Fläche $\vec{x}(u, v) = (u + v, u - v, uv)$ verdeutlichen.

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right|^2 = 2 + v^2, \quad \vec{T}^u = \frac{1}{\sqrt{2 + v^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right|^2 = 2 + u^2, \quad \vec{T}^v = \frac{1}{\sqrt{2 + u^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix}.$$

Die durch die Vektoren 2.62 und 2.63 bestimmte Ebene nennen wir *Tangentialebene* der Fläche $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ in einem Punkt $(u, v) \rightarrow (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$. Schneiden sich die u -Kurve und die v -Kurve in einem Punkt (u, v) rechtwinkelig, dann verschwindet das Skalarprodukt

$$\vec{T}^u \cdot \vec{T}^v = 0. \quad (2.64)$$

Gilt 2.64 auf der ganzen Fläche, so schneiden sich die u -Kurven und die v -Kurven überall rechtwinkelig und man nennt u und v *orthogonale Parameter*.

Die zur Tangentialebene, oder kurz Fläche, senkrechte Richtung \vec{n} (der *Normalenvektor*) ist gegeben durch das Vektorprodukt von $\partial_u \vec{x}$ mit $\partial_v \vec{x}$

$$\vec{n} = \pm \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right|}. \quad (2.65)$$

Wir sehen, dass \vec{n} ein Einheitsvektor ist. Durch die Wahl des Vorzeichens wird die Orientierung des Normalenvektors und damit auch der Fläche festgelegt.

Beispiel. Wir wollen die Tangentialebene und den Normalenvektor an eine Kugelfläche mit dem Radius R aufstellen. Als Parametrisierung verwenden wir zunächst die aus der Behandlung von Kugelkoordinaten bereits bekannte Form mit den zwei Parametern θ und ϕ .

$$\vec{x}(\theta, \phi) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Für die Auswertung von 2.65 benötigen wir zunächst die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Wir bemerken, dass das Skalarprodukt $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = 0$ für alle θ und ϕ , das heißt, die gewählte Parametrisierung ist orthogonal. Die Auswertung des Vektorprodukts ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} &= R^2 (\sin^2 \theta \cos \phi \vec{e}^1 + \sin^2 \theta \sin \phi \vec{e}^2 + \sin \theta \cos \theta \vec{e}^3), \\ \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right| &= R^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den Normalenvektor

$$\vec{n} = \sin \theta \cos \phi \vec{e}^1 + \sin \theta \sin \phi \vec{e}^2 + \cos \theta \vec{e}^3.$$

Dieses Ergebnis ist nicht sonderlich überraschend, ist \vec{n} doch der Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors, der – bei einer Kugelfläche – ja normal auf die Fläche steht. Des Weiteren bemerken wir, dass wir durch unsere Wahl des Vorzeichens für \vec{n} einen von der Fläche nach außen gerichteten Normalenvektor festgelegt haben.

Beispiel. Wir bleiben bei der Kugeloberfläche, wiederholen nun die Rechnung allerdings für eine andere Parametrisierung. Und zwar können wir die Kugeloberfläche ja auch durch folgende Gleichung ausdrücken

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2.$$

Um zu einer Parameterdarstellung zu kommen, drücken wir beispielsweise x_3 durch x_1 und x_2 aus $x_3 = z(x_1, x_2)$, und wählen für x_1 und x_2 zwei beliebige Funktionen $x_1(u, v)$ und $x_2(u, v)$ der Parameter u und v

$$\vec{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), z(x_1(u, v), x_2(u, v))).$$

In unserem Beispiel haben wir also

$$x_3 = z(x_1, x_2) = \pm \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Wählen wir etwa $x_1(u, v) = R \sin u \cos v$ und $x_2(u, v) = R \sin u \sin v$, dann erhalten wir genau die Parametrisierung nach Polarwinkel $u = \theta$ und Azimutalwinkel $v = \phi$. Wir wollen aber die einfache Wahl $x_1(u, v) = u$ und $x_2(u, v) = v$ treffen. Dann lautet die Parameterdarstellung der Kugeloberfläche wie folgt (genauer gesagt beschränken wir uns auf die obere Hälfte der Kugeloberfläche $x_3 \geq 0$)

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, z(u, v)) = (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}).$$

Wir können nun wieder die Tangentialvektoren und den Normalenvektor für diese Parametrisierung aufstellen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right) \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right). \end{aligned}$$

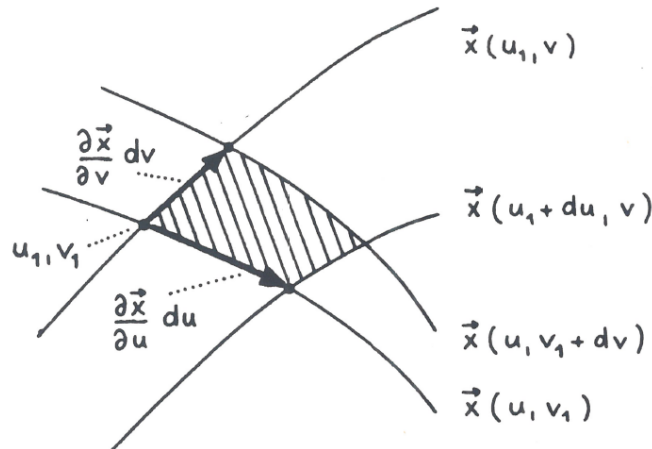
Wir bemerken, dass das Skalarprodukt $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ für allgemeine (u, v) nicht verschwindet, das heißt, die gewählte Parametrisierung ist dieses Mal nicht orthogonal. Die Auswertung des Vektorprodukts ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} &= -\frac{\partial z}{\partial u} \vec{e}_1 + -\frac{\partial z}{\partial v} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ &= \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \vec{e}_1 + \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \end{aligned}$$

Mit 2.65 erhalten wir somit für den Normalenvektor

$$\vec{n} = \frac{u}{R} \vec{e}^1 + \frac{v}{R} \vec{e}^2 + \frac{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}{R} \vec{e}^3.$$

Mit diesen Vorarbeiten können wir nun das differenzielle Flächenelement einer Fläche aufstellen, das wir für die Integration über Flächen benötigen. Analog zur Behandlung des Wegelements für Raumkurven (siehe Kapitel 2.2.3) erhalten wir das Flächenelement mit Hilfe des Vektorprodukts der vektoriellen Bogenelemente entlang der u -Kurven bzw. der v -Kurven. Das skalare Flächenelement dA gibt die Fläche des durch die Vektoren $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} du$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} dv$ aufgespannten Parallelogramms an (schraffierte Fläche in der Abbildung unten). Das vektorielle Flächenelement ist definiert durch $d\vec{A} = \vec{n} dA$ ist also ein Vektor der Länge dA , der in Richtung des Normalenvektors weist.



$$d\vec{A} = \pm \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) du dv = \vec{n} dA \quad (2.68)$$

$$dA = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv \quad (2.69)$$

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right)^2} du dv \quad (2.70)$$

$$dA = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| du dv \quad (\text{orthogonale Parameter!}) \quad (2.71)$$

Beachte, dass der Ausdruck für dA nach Gleichung 2.70 aus der Beziehung 2.26 für den Betrag des Vektorprodukts folgt. Die vereinfachte Form von dA in Gleichung 2.71 gilt nur für eine orthogonale Parametrisierung der Fläche!

2.3.3 Flächenintegrale

Das Flächenintegral beschreibt die Integration entlang einer Fläche gegeben durch $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ und führt auf ein Zweifachintegral. Ein typisches Anwendungsbeispiel aus der Physik ist Flächenintegral eines Vektorfeldes $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ über eine Fläche S , das man auch als *Flussintegral* bezeichnet.

$$\Phi = \int_S \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\vec{A}. \quad (2.72)$$

Hierbei bezeichnet $d\vec{A}$ das vektorielle Flächenelement (Gl. 2.68). Das Ergebnis dieser Integration ist ein Skalar, weil der Integrand das Skalarprodukt eines Vektorfeldes mit dem vektoriellen Flächenelement darstellt. Andere Beispiele für Flächenintegrale über ein skalares Feld $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ bzw. ein Vektorfeld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ wären etwa

$$I = \int_S \Phi(x_1, x_2, x_3) dA \quad (2.73)$$

$$\vec{J} = \int_S \Phi(x_1, x_2, x_3) d\vec{A} \quad (2.74)$$

$$\vec{K} = \int_S \vec{F}(x_1, x_2, x_3) dA. \quad (2.75)$$

Beispiel. Als erstes, einfaches Beispiel wollen wir die Oberfläche S einer Kugel berechnen. Das heißt wir berechnen folgendes Integral

$$S = \int_{\text{Kugel}} dA.$$

Dazu benötigen wir zunächst das Flächenelement dA in einer geeigneten Parametrisierung der Kugel­fläche. Dazu verwenden wir die bekannte Parametrisierung in Polar- und Azimutalwinkel θ und ϕ aus Gleichung 2.66. Mit den partiellen Ableitungen nach θ und ϕ aus Gleichung 2.67 und der Beziehung 2.71 für orthogonale Parameterdarstellungen einer Fläche erhalten wir

$$dA = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \right| \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right| d\theta d\phi = R \cdot R \sin \theta d\theta d\phi = R^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

Damit berechnen wir

$$S = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 [-\cos \theta]_0^{\pi} = 4\pi R^2.$$

Beispiel. Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2).$$

Gesucht ist das Flächenintegral $\Phi = \int_S \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot d\vec{A}$, wobei S ein Rechteck in der (x_1x_2) -Ebene mit den Kanten parallel zu den Koordinatenachsen x_1 und x_2 darstellt, dessen vier Eckpunkte bei $(2, 2, 0)$, $(3, 2, 0)$, $(3, 4, 0)$, und $(2, 4, 0)$ liegen. Die Orientierung des Normalenvektors weist in die positive x_3 -Richtung. Diese Fläche wird durch $x_3 = 0$ beschrieben, daher ist ihre naheliegende Parametrisierung $\vec{x}(u, v) = (u, v, 0)$. Damit wird

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = (1, 0, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = (0, 1, 0),$$

wodurch wir mit Gleichung 2.68 für das vektorielle Flächenelement finden

$$d\vec{A} = \vec{e}^3 du dv.$$

Damit erhalten wir für das Flussintegral

$$\Phi = \int_{u=2}^3 du \int_{v=2}^4 (u+v) dv = \int_{u=2}^3 du \left[uv + \frac{v^2}{2} \right]_{v=2}^4 = 2 \int_{u=2}^3 du (u+3) = 11.$$

Beispiel. Zum Abschluss dieses Kapitels wenden wir uns der Berechnung der *Oberfläche eines Drehkörpers* zu. Wir betrachten eine Fläche, die durch Rotation einer Kurve $x_3 = f(x_1)$ in der (x_1, x_3) -Ebene um die x_1 -Achse entsteht. Eine solche Fläche hat die folgende Parametrisierung (mit $x_1 = u$)

$$\vec{x}(u, \phi) = (u, f(u) \sin \phi, f(u) \cos \phi).$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = (1, f'(u) \sin \phi, f'(u) \cos \phi) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = (0, f(u) \cos \phi, -f(u) \sin \phi),$$

woraus wir das Flächenelement dA berechnen.

$$\begin{aligned} dA &= \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right| du d\phi \\ &= \left| -f'(u)f(u) \vec{e}^1 + f(u) \sin(\phi) \vec{e}^2 + f(u) \cos(\phi) \vec{e}^3 \right| du d\phi \\ &= f(u) \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du d\phi \end{aligned}$$

Weil der Integrand nicht von ϕ abhängt, ergibt die Integration über ϕ einfach den Faktor 2π , und die Oberfläche S eines Drehkörpers errechnet sich aus

$$S = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} f(u) \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du. \quad (2.76)$$

CDF 6. Oberflächen-Integral `cdf06_Oberflaechenintegral.cdf`

Grafische Darstellung der Berechnung der Oberfläche eines Rotationskörpers.

rotate

strip location

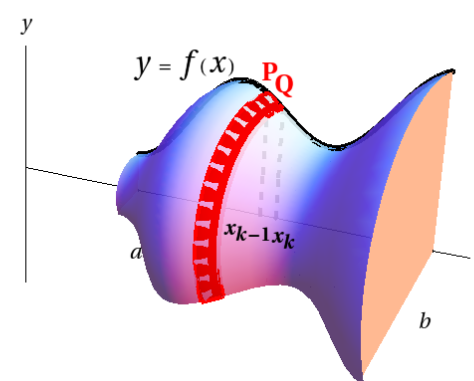
x coordinates * transparent strip *

views solid

surface area $S \approx \sum C_k \times W_k$,

where C_k and W_k are the circumference and width of the k^{th} band.

$$S = \int (2\pi) y \, ds$$

$$= \int_a^b ((2\pi) y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx.$$


2.4 Differenzialoperatoren

In der Physik spielen *klassische Feldtheorien* eine große Rolle. Diese haben sich zunächst aus der Potentialtheorie des Erdschwerefeldes entwickelt und sind die mathematische Grundlage für die Beschreibung all jener physikalischen Effekte, die durch Kräfte bzw. Wechselwirkungen hervorgerufen werden. Als solche sind sie ein zentraler Bestandteil der theoretischen Physik, der Geophysik und auch anderer Naturwissenschaften. Man unterscheidet bei Feldern zwischen so genannten *Skalarfeldern* und *Vektorfeldern*: Ein Skalarfeld ordnet jedem Raumpunkt einen Skalar, also eine reelle Zahl zu wie im Fall der Temperatur, des elektrischen Potentials, oder des Gravitationspotentials. Felder dagegen, die jedem Raumpunkt einen Vektor zuordnen, bezeichnet man als Vektorfelder wie etwa beim elektrischen Feld oder dem Geschwindigkeitsfeld einer Strömung.

Zwischen diesen einzelnen Feldern existieren diverse Querbeziehungen. Das Gravitationsfeld (Kraftfeld) beispielsweise ist die Ableitung (*Gradient*) des Gravitationspotentials, das elektrische Feld ist der

Gradient des elektrischen Potentials. Umgekehrt können aus bestimmten Vektorfeldern mittels der sogenannten *Divergenz* wieder Skalarfelder abgeleitet werden, oder schließlich mittels einer *Rotation* aus bestimmten Vektorfeldern (Vektorpotential) andere Vektorfelder, etwa die magnetische Flussdichte.

2.4.1 Der Nabla-Operator

Gegenstand dieses Kapitels ist Definition und Anwendung dieser sogenannten Differentialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation bzw. zusammengesetzter Operatoren wie dem Laplace-Operator auf Skalar- bzw. Vektorfelder. Der fundamentale Differentialoperator ist dabei der sogenannte *Nabla-Operator*²

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{e}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}^3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (2.77)$$

Wie der Vektorpfeil über dem ∇ -Symbol andeuten soll, hat der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ die Eigenschaften eines Vektors. Das heißt seine Anwendung auf ("Multiplikation mit") einem Skalarfeld $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ergibt einen Vektor, genauer ein *Vektorfeld*, das man als den *Gradienten* von Φ bezeichnet

$$\vec{\nabla}\Phi(x_1, x_2, x_3) \equiv \text{grad } \Phi(x_1, x_2, x_3) = \vec{e}^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \vec{e}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \vec{e}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \quad (2.78)$$

Weil der Nablaoperator sehr häufig verwendet wird, führen wir noch eine kompaktere Schreibweise von Gleichung 2.77 ein, indem wir für $\frac{\partial}{\partial x_i}$ einfach ∂_i schreiben

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^1 \partial_1 + \vec{e}^2 \partial_2 + \vec{e}^3 \partial_3 = \vec{e}^i \partial_i. \quad (2.79)$$

Die Koordinaten des symbolischen Nabla-Vektors schreiben wir dann also einfach als

$$\{\vec{\nabla}\}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i. \quad (2.80)$$

Beispiel. Wir berechnen die Anwendung des Nabla-Operators auf die Funktion

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_j x_j}} = (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}}.$$

Das heißt, wir finden für

$$\partial_i \Phi = \partial_i (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (x_j x_j)^{-\frac{3}{2}} (\delta_{ij} x_j + x_j \delta_{ij}) = -\frac{x_i}{(x_j x_j)^{\frac{3}{2}}}.$$

²Sein Name stammt von der Bezeichnung eines harfenähnlichen hebräischen Saiteninstruments, das in etwa die Form dieses Zeichens hatte.

Wechseln wir von der Koordinatenschreibweise in die symbolische Darstellung dieses Vektors, so finden wir mit dem Ortsvektor $\{\vec{r}\}_i = (x_1, x_2, x_3)$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

2.4.2 Gradient

In dem vorangegangenen Beispiel haben wir soeben den Gradienten der Funktion $\Phi = \frac{1}{r}$ berechnet. Wir stellen uns nun die Frage, nach der geometrischen Bedeutung des Gradienten und welche besondere Eigenschaften Gradientenfelder haben.

Betrachten wir für ein Skalarfeld $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ eine sogenannte Äquipotentialfläche

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = c = \text{const}, \quad (2.81)$$

so beschreibt diese Gleichung eine *Fläche konstanten Potentials*, also eine Fläche in \mathbb{R}^3 , auf der sich der Wert von Φ nicht ändert. Das heißt, das totale Differenzial $d\Phi$ verschwindet so lange die Änderungen $d\vec{x}$ in dieser Fläche stattfinden. Da wir das totale Differenzial aber mit Hilfe des Gradienten ausdrücken können, gilt

$$d\Phi = (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\Phi \perp d\vec{x}. \quad (2.82)$$

Diese Gleichung besagt somit, dass der Gradientenvektor $\vec{\nabla}\Phi$ *normal* auf die Äquipotentialfläche $\Phi = \text{const}$ steht, da ja $d\vec{x}$ in der Tangentialebene an diese Fläche liegt. Mit anderen Worten gibt der Gradientenvektor die Richtung der stärksten Änderung der Funktion Φ an.

Die Anwendung des Nabla-Operators auf das Skalarfeld Φ generiert ein Vektorfeld \vec{F}

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \vec{\nabla}\Phi(x_1, x_2, x_3). \quad (2.83)$$

An jedem Punkt (x_1, x_2, x_3) des Raumes weist der Vektor $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ in eine Richtung normal zu einer Äquipotentialfläche von Φ durch diesen Punkt. Vektorfelder, die sich als Gradient eines Skalarfeldes angeben lassen, nennen wir *konservative* Vektorfelder. Ein Beispiel aus der Physik ist die elektrische Feldstärke \vec{E} , die der Gradient des elektrischen Potentials ist, oder die Gravitationskraft \vec{F} , die als Gradient des Gravitationspotentials geschrieben werden kann. Der Name *konservative Kraft* kommt daher, dass die entlang eines Weges geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen, nicht aber von seiner speziellen Form. Ist die Kraft \vec{F} konservativ, also $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$, dann können wir für das Differenzial dW der Arbeit schreiben

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla}\Phi) \cdot d\vec{r} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i = d\Phi. \quad (2.84)$$

Damit lautet das Wegintegral von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2

$$\int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 d\Phi = \Phi(2) - \Phi(1). \quad (2.85)$$

Ist der Weg geschlossen, also der Anfangspunkt gleich dem Endpunkt des Weges, so folgt unmittelbar, dass Arbeitsintegral verschwindet. Für solche Linienintegrale über geschlossene Wege führen wir das Integralsymbol \oint und schreiben

$$\oint dW = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{für konservative Kräfte}). \quad (2.86)$$

Die Energie bleibt also erhalten (*conserved*) wenn man nach Durchlaufen eines beliebigen Weges wieder an den Ausgangspunkt zurückkehrt. Wie wir in Kapitel 2.4.4 sehen, ist eine weitere Eigenschaft von konservativen Feldern, dass ihre Rotation verschwindet.

Beispiel. Wir betrachten das Kraftfeld $\vec{F} = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2^2, 0)$. Zunächst überlegen wir, ob wir ein Potenzial finden, dessen Gradient \vec{F} ergibt? Mit $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 - \frac{x_2^3}{3}$ finden wir tatsächlich

$$\vec{\nabla}\Phi = (\partial_1\Phi, \partial_2\Phi, \partial_3\Phi) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2^2, 0) = \vec{F}.$$

Damit ist gezeigt, dass \vec{F} eine konservative Kraft ist, und somit jedes Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg verschwinden muss. Als Übung zeigen wir das explizit für eine geschlossene Kurve C , wobei C das Quadrat in der (x_1, x_2) -Ebene mit den Eckpunkte $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, und $(0, 1)$ bezeichnet. Als Richtung der Integration entscheiden wir uns gegen den Uhrzeigersinn. Damit gilt

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 2x_1 dx_1 + \int_0^1 (1 - x_2^2) dx_2 + \int_1^0 (2x_1 + 1) dx_1 - \int_1^0 x_2^2 dx_2 = 0.$$

Beispiel. Wir berechnen den Gradienten einer Funktion $f(r)$, die nur vom Betrag des Ortsvektors $r = |\vec{r}|$ abhängt. Die Anwendung der Kettenregel $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i}$ führt mit $r = (x_j x_j)^{\frac{1}{2}}$ auf

$$\partial_i f(r) = \frac{df}{dr} \partial_i (x_j x_j)^{\frac{1}{2}} = f'(r) \frac{1}{2} (x_j x_j)^{-\frac{1}{2}} (\delta_{ij} x_j + x_j \delta_{ij}) = f'(r) \frac{x_i}{(x_j x_j)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wir finden also das wichtige Resultat, dass der Gradient einer Funktion, die nur vom Betrag des Ortsvektors abhängt, immer parallel oder antiparallel zum Ortsvektor orientiert ist

$$\vec{\nabla} f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.87)$$

2.4.3 Divergenz

Interpretiert man ein Vektorfeld $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$ als Strömungsfeld, so gibt die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{A}(x_1, x_2, x_3) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \equiv \partial_i A_i. \quad (2.88)$$

für jeden Raumpunkt an, wie viel mehr aus einer Umgebung dieses Punkts hinausfließt als in sie hineinfließt. Mithilfe der Divergenz lässt sich also herausfinden, ob und wo das Vektorfeld Quellen (Divergenz größer als Null) oder Senken (Divergenz kleiner als Null) hat. Ist die Divergenz überall gleich Null, so bezeichnet man das Feld $\vec{A} = 0$ als *quellenfrei*. In der Physik wird die Divergenz zum Beispiel bei der Formulierung der Maxwell-Gleichungen oder der Kontinuitätsgleichung verwendet.

Beispiel. Gegeben ist das Vektorfeld $A_i = (x_1, x_2, x_3)$, von dem wir die Divergenz berechnen wollen.

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Unter Zuhilfenahme der Summenkonvention und mit $A_i = x_i$ können wir die gleiche Rechnung auch ein wenig eleganter bewerkstelligen

$$\operatorname{div} \vec{A} = \partial_i A_i = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3.$$

Das Feld \vec{A} hat also die räumlich konstante Quellendichte von 3.

Beispiel. Wir berechnen die Divergenz für das Feld der Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}(\vec{r})$, die von einer Punktmasse M im Ursprung unseres Koordinatensystems verursacht wird. Nach Newton gilt ja

$$\vec{g}(\vec{r}) = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Die Kraft \vec{F} auf eine Masse m am Ort \vec{r} wäre dann eben $\vec{F} = m\vec{g}$. Unter Verwendung der Koordinatenschreibweise und der Ableitungsregeln (Quotientenregel, Kettenregel) finden wir für Divergenz von \vec{g}

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{g} &= \partial_i g_i = -GM \partial_i \frac{x_i}{(x_j x_j)^{\frac{3}{2}}} = -GM \frac{\delta_{ii} (x_j x_j)^{\frac{3}{2}} - x_i \frac{3}{2} (x_j x_j)^{\frac{1}{2}} (\delta_{ij} x_j + x_j \delta_{ij})}{(x_j x_j)^3} \\ &= -GM \frac{3r^3 - 3r x_i x_i}{r^6} = -GM \frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} = 0 \quad \text{für } r \neq 0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Das heißt das Gravitationsfeld einer Punktmasse ist quellenfrei für alle $r \neq 0$, weil die Quelle des Feldes ja nur im Ursprung sitzt und nirgendwo sonst. Mit unseren Mitteln können wir die Quellendichte für $r = 0$, die dort singulär wird, noch nicht angeben, da wir dazu die Theorie der Distributionen benötigen (Stichwort: Dirac'sche Deltafunktion oder genauer Deltadistribution).

2.4.4 Rotation

Als Rotation bezeichnet man das Vektorprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A}(x_1, x_2, x_3) &\equiv \operatorname{rot} \vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}^1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \vec{e}^2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \vec{e}^3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right). \quad (2.90) \end{aligned}$$

Wenn \vec{A} ein Strömungsfeld ist, dann gibt die Rotation von \vec{A} für jeden Ort das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit an, mit der ein mitschwimmender Körper rotiert, also wie schnell und um welche Achse er sich dreht. Dieser Zusammenhang ist namensgebend, obwohl es sich aber nicht immer um ein Geschwindigkeitsfeld und eine Drehbewegung handeln muss. Beispielsweise betrifft das Induktionsgesetz der Elektrodynamik die Rotation des elektrischen Feldes. Ein Vektorfeld, dessen Rotation in einem Gebiet überall gleich null ist, nennt man *wirbelfrei*.

Beispiel: Wir berechnen die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v}

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

das eine Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}|$ um eine Drehachse durch den Ursprung in Richtung ω beschreibt. Hierzu benutzen wir die Beziehung 2.28 und finden

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}$$

Diesen Ausdruck werten am besten in Koordinatenschreibweise aus

$$\left\{ (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} \right\}_i = \partial_j x_j \omega_i - \partial_j \omega_j x_i = \delta_{jj} \omega_i - \omega_j \delta_{ij} = 3\omega_i - \omega_i = 2\omega_i.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass ω_j konstant ist, die Ableitung $\partial_j x_i$ ein Kronecker δ_{ij} ergibt, und $\delta_{ii} = 3$ liefert. Damit haben wir die obige Aussage bewiesen, dass die Rotation eines Strömungsfeldes das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit ergibt.

2.4.5 Zusammengesetzte Differentialoperatoren

In diesem Unterkapitel beschäftigen wir uns mit der mehrfachen Anwendung des Nabla-Operators bzw. der Anwendung des Nabla-Operators auf zusammengesetzte Felder, die das skalare bzw. vektorielle Produkt von Teilfeldern darstellen. Eine besondere Bedeutung in der Physik hat die Divergenz eines Gradienten.

Der Laplace-Operator. Die Divergenz eines Gradienten nennen wir auch den Laplace-Operator, den wir mit dem "Δ"-Symbol abkürzen bzw. manchmal auch als $\vec{\nabla}^2$ ("Nabla-Quadrat") notieren wollen

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi \equiv \Delta \Phi. \quad (2.91)$$

In Koordinatenschreibweise lautet Gleichung 2.91, somit

$$\Delta \Phi = \partial_i \partial_i \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \quad (2.92)$$

Der Laplace-Operator findet in sehr vielen Gebieten der Physik Verwendung, unter anderem in der Wellengleichung, in der Wärmeleitungsgleichung, oder in der Schrödingergleichung.

Beispiel. Wir berechnen $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi$ für das Skalarfeld $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^3 x_2^2 x_3^4$

$$\Delta \Phi = 18x_1 x_2^2 x_3^4 + 6x_1^3 x_3^4 + 36x_1^3 x_2^2 x_3^2.$$

Eine weitere häufig auftretende Kombination des Nabla-Operators ist die Berechnung der *Rotation einer Rotation* eines Vektorfeldes

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \quad (2.93)$$

Zum Unterschied von 2.91 wirkt der Laplace-Operator auf der rechten Seite dieser Gleichung auf ein Vektorfeld!³ Wir bemerken also den Unterschied zwischen $\Delta \Phi$ und $\Delta \vec{A}$:

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi \quad (2.94)$$

$$\Delta \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (2.95)$$

³In der Elektrodynamik führt man analog zum elektrischen Potenzial ein Vektorpotential \vec{A} ein, dessen Rotation die magnetische Flussdichte \vec{B} ergibt, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Die vierte Maxwellgleichung $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$ führt dann eben auf die Rotation der Rotation des Vektorpotentials \vec{A} .

Beispiel. Gegeben sei das Vektorfeld $A_i = (x_1^2 x_2, -2x_1 x_3, 2x_2 x_3)$. Berechne a) $\text{grad div } \vec{A}$, b) $\text{rot rot } \vec{A}$, und c) $\Delta \vec{A}$. Überprüfe die Gültigkeit von 2.95.

Wir berechnen zunächst a)

$$\text{div } \vec{A} = 2x_1 x_2 + 0 + 2x_2, \quad \text{grad div } \vec{A} = 2x_2 \vec{e}^1 + 2(x_1 + 2) \vec{e}^2,$$

dann b)

$$\text{rot } \vec{A} = 2(x_1 + x_3) \vec{e}^1 - (x_1^2 + 2x_3) \vec{e}^3, \quad \text{rot rot } \vec{A} = 2(x_1 + 2) \vec{e}^2.$$

Schließlich c)

$$\Delta \vec{A} = 2x_2 \vec{e}^1,$$

wodurch die Gleichung 2.95 erfüllt ist.

Wir betrachten die Wirkung des Nabla-Operators auf zusammengesetzte Felder. Seien Φ und Ψ skalare Felder, und \vec{A} und \vec{B} Vektorfelder, dann gelten folgende Identitäten

$$\text{grad}(\Phi\Psi) = \Psi \text{grad } \Phi + \Phi \text{grad } \Psi \quad (2.96)$$

$$\text{div}(\Phi\vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad } \Phi + \Phi \text{div } \vec{A} \quad (2.97)$$

$$\text{rot}(\Phi\vec{A}) = \Phi \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \times \text{grad } \Phi \quad (2.98)$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} \quad (2.99)$$

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{div } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (2.100)$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (2.101)$$

Um die Gleichungen 2.96–2.101 zu beweisen, schreiben wir die Identitäten in Koordinatenschreibweise und benutzen die Produktregel der Differentialrechnung. Beispielsweise lautet Gleichung 2.96

$$\{\text{grad}(\Phi\Psi)\}_i = \partial_i \Phi\Psi = \Psi \partial_i \Phi + \Phi \partial_i \Psi = \{\Psi \text{grad } \Phi + \Phi \text{grad } \Psi\}_i.$$

Beachte: Alle Ausdrücke, die rechts vom Operator ∂_i stehen werden differenziert, alle Größen, die links von ∂_i stehen werden nicht differenziert.

Beispiel: Wir berechnen die Rotation des Vektorfeldes $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$, d.h. des Einheitsvektors in Richtung des Ortsvektors. Dazu benutzen wir die Gleichung 2.98 mit $\Phi = \frac{1}{r}$ und $\vec{A} = \vec{r}$ und erhalten:

$$\text{rot } \vec{r} = \vec{0}, \quad \text{grad} \frac{1}{r} = \text{grad} f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \text{rot} \frac{\vec{r}}{r} = \vec{0} + \frac{1}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}.$$

2.4.6 Satz von Poincaré

Die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet. Ist das Vektorfeld \vec{E} der Gradient eines skalaren Feldes Φ , gilt also $\vec{E} = \vec{\nabla}\Phi$, so verschwindet die Rotation von \vec{E} . Oder anderes ausgedrückt: Ein konservatives Vektorfeld ist wirbelfrei.

$$\text{rot grad } \Phi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0. \quad (2.102)$$

Es gilt sogar die wichtige Umkehrung: Die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet dann und nur dann, wenn das Vektorfeld ein Gradientenfeld ist

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \iff \quad \vec{E} = \text{grad } \Phi. \quad (2.103)$$

Den ersten Teil der obigen Aussage (Schluss von rechts nach links) kann man zeigen unter Voraussetzung die Vertauschbarkeit der gemischten zweiten partiellen Ableitungen im Falle der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit der Funktion Φ (vgl. Satz von Schwarz, Vorlesung Mathematische Methoden 1), und die Tatsache, dass das Vektorprodukt das Vorzeichen wechselt, wenn die zwei Vektoren vertauscht werden:

Wollen wir die *Quellen* $q = \text{div } \vec{E}$ für das wirbelfreie Vektorfeld $\vec{E} = -\text{grad } \Phi^4$ berechnen, so gelangen wir zur sogenannten *Poisson'schen Gleichung*

$$\text{div grad } \Phi = \Delta\Phi = -q. \quad (2.104)$$

Ist auch $q = 0$, das heißt liegen keine Quellen und Senken für das Vektorfeld \vec{E} vor, so erhalten wir die *Laplace'sche Gleichung* für das skalare Potential

$$\Delta\Phi = 0. \quad (2.105)$$

Alle Lösungen der partiellen Differenzialgleichungen 2.104 führen auf wirbelfreie Felder, während Lösungen von 2.105 immer quellen- und wirbelfreie Felder liefern. Bei den in den physikalischen Anwendungen auftretenden Problemen handelt es sich immer darum, in einem gegebenen räumlichen Bereich B eine partikuläre Lösung von 2.104 oder 2.105 zu ermitteln, die durch gewisse zusätzliche Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Diese Bedingungen sind in der Regel *Randbedingungen*, bei denen entweder die Werte von Φ auf der Randfläche F des betrachteten Bereichs B vorgeschrieben sind (Randwertproblem erster Art), oder die Werte der Normalableitung (d.h. die Projektion des Feldvektors auf die Flächennormale (Randwertproblem zweiter Art).

⁴Das Minuszeichen entspricht der in der Physik gängigen Konvention.

Wir betrachten nun ein *quellenfreies* Vektorfeld \vec{B} , dessen Wirbeldichte *nicht* verschwindet:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{w},$$

wobei das Vektorfeld \vec{w} die Wirbeln des Feldes \vec{B} bezeichnet. Die Form von \vec{w} ist nicht beliebig, da \vec{w} *quellenfrei* sein muss, oder anders ausgedrückt:

Die Divergenz einer Rotation verschwindet. Die Rotation eines Vektorfeldes \vec{A} ist quellenfrei

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0. \quad (2.106)$$

Weiters gilt der wichtige Satz: Die Divergenz eines Vektorfeldes verschwindet dann und nur dann, wenn das Vektorfeld die Rotation eines Feldes ist.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \iff \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (2.107)$$

Die Gleichung 2.106 kann ebenfalls unter der Voraussetzung der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit und den Eigenschaften des Spatprodukts gezeigt werden.

Wir nennen das Feld \vec{A} , aus dem sich das gesuchte quellenfreie Feld \vec{B} durch Bildung der Rotation ergibt, $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, das *Vektorpotential* des Vektorfeldes \vec{B} . Wir sehen also, dass sich das Vektorpotential \vec{A} aus den Wirbeln \vec{w} des Feldes \vec{B} wie folgt berechnet

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{w}.$$

Diese Gleichung können wir mit 2.95 auch schreiben als

$$-\Delta \vec{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = \vec{w}$$

Da wir über die Divergenz des Feldes \vec{A} frei verfügen können – bei der Berechnung des gesuchten Feldes \vec{B} nach $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ fallen etwaige Quellen in \vec{A} ohnehin heraus – setzen wir $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Wir erhalten dann folgende, einfachere, Differenzialgleichung für das Vektorpotential

$$\Delta \vec{A} = -\vec{w}, \quad (2.108)$$

die uns erlaubt das Vektorpotential \vec{A} aus Kenntnis der Wirbeldichte \vec{w} abzuleiten.

Gleichungen 2.102 und 2.106 werden auch *Satz von Poincaré* oder *Poincaré-Lemma* genannt.⁵

⁵Wir haben diese Aussagen hier für den \mathbb{R}^3 kennengelernt, diese Aussagen lassen sich auch für höherdimensionale Räume verallgemeinern (siehe z.B. Kapitel 11 im Buch "Mathematische Methoden" von Lang und Pucker).

2.5 Der Satz von Gauß

Der Integralsatz von Gauß stellt einen Zusammenhang zwischen einem Volumsintegral und einem Flächenintegral längs der das Volumen V berandenden Fläche ∂V dar. Für ein skalares Feld lautet der Gauß'sche Satz in seiner allgemeinsten Form

$$\int_V \partial_i F dV = \oint_{\partial V} F dA_i \quad (2.109)$$

Der Satz von Gauß gilt auch, wenn wir in der obigen Gleichung das skalare Feld F durch ein Vektorfeld F_j (oder auch durch ein Tensorfeld F_{jk} ersetzen)

$$\int_V \partial_i F_j dV = \oint_{\partial V} F_j dA_i \quad (2.110)$$

Bilden wir von diesem Ausdruck die Spur der Matrix (anders gesagt: verjüngen wir den Tensor zweiter Stufe), so erhalten wir eine Form des Gauß'schen Satzes, der in der physikalischen Anwendung wohl am häufigsten auftritt:

$$\int_V \partial_i F_i dV = \oint_{\partial V} F_i dA_i \quad (2.111)$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (2.112)$$

Die Gleichungen 2.109–2.112 gelten unter folgenden Voraussetzungen:

- Die Fläche ∂V (die Berandung des Volumens V) sei stückweise glatt. Das heißt sie besteht aus endlich vielen Flächenstücken, die jeweils eine stetig partiell differenzierbare Parameterdarstellung aufweisen. Daraus folgt, dass auf diesen Flächenstücken ein Normalvektor existiert, der definitionsgemäß nach außen gerichtet ist.
- Das Feld $F(x_1, x_2, x_3)$ sei in V und auf der ganzen Fläche ∂V definiert und stetig differenzierbar. Punkte in V , wo das nicht gilt, müssen durch geeignete "Lochdefinitionen" ausgeschlossen werden.
- Falls es im umschlossenen Gebiet solche Löcher gibt, müssen diese bei der Bestimmung des Randes berücksichtigt werden.

Beispiel. Wir wollen die Gleichung 2.112 auf das Feld $\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ anwenden, also (bis auf die fehlenden Konstanten $G M m$) das Gravitationsfeld einer Punktmasse M , die im Ursprung des Koordinatensy-

stems sitzt. Als Bereich V wählen wir eine Kugel mit dem Radius R , das heißt, die Berandung ∂V ist dementsprechend die Kugeloberfläche mit dem Radius R . Wir werten zunächst die rechte Seite von 2.112, also das Flächenintegral aus, und erhalten unter Verwendung von Kugelkoordinaten (siehe 2.3.2)

$$d\vec{A} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

und

$$\vec{F} = \frac{1}{R^3} (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta).$$

Damit erhalten wir

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta \frac{R}{R^3} 1 = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi.$$

Wir wenden uns nun der linken Seite von 2.112 zu und berechnen das Volumnsintegral. Dazu benötigen wir die Divergenz des Feldes \vec{F} , von der wir bereits gezeigt haben (2.89), dass sie verschwindet:

$$\operatorname{div} \vec{F} = -\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0.$$

Damit verschwindet auch das Integral

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 0,$$

und der Gauß'sche Satz stimmt damit scheinbar nicht?! Was wir in unserer Rechnung falsch gemacht haben ist, dass die Divergenz nur für alle $r \neq 0$ verschwindet, aber im Punkt $r = 0$ ist das Feld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ nicht stetig differenzierbar, weil $r = 0$ ein singulärer Punkt des Feldes ist. Um den Satz von Gauß trotzdem anwenden zu können, müssen wir den Punkt $r = 0$ also aus dem betrachteten Volumen herausnehmen, zum Beispiel indem wir ein kugelförmiges Loch um den Ursprung mit dem Radius ϵ aus der Kugel herausschneiden. Dieses neue Gebiet V' hat nun 2 Randflächen, nämlich die innere Kugelschale K_ϵ mit dem Radius ϵ und die äußere Kugelschale K_R mit dem Radius R , und der Satz von Gauß nimmt folgende Gestalt an:

$$\int_{V'} \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_{K_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_{K_R} \vec{F} \cdot d\vec{A} = -4\pi + 4\pi = 0.$$

Die linke Seite ist nun tatsächlich 0, und für die rechte Seite ist zu beachten, dass der Normalvektor im Bezug auf das betrachtete Volumen nach außen gerichtet ist, also für die innere Kugelschale zum Ursprung bzw. für die äußere Kugelschale vom Ursprung weg zeigt. Somit ist die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes wieder hergestellt!

2.5.1 Beweis des Gauß'schen Integralsatzes

Wir wollen den Beweis von Gleichung 2.112 hier nur skizzieren. Zunächst bemerken wir, dass die zentrale Aussage des Gauß'schen Satzes eine Bilanzgleichung ist: Was hinein geht, kommt auch wieder hinaus. Wenn wir ein betrachtetes Volumen V in zwei Teilvolumina V_1 und V_2 mit der gemeinsamen Trennfläche A zerlegen, so trägt diese gemeinsame Fläche A nichts zum Fluss durch die Berandung von V bei, weil der Fluss, der von V_1 nach V_2 geht, gleich dem negativen Fluss im umgekehrter Richtung ist (die Normalenvektoren zeigen ja immer vom Volumen nach außen). Damit können wir jedes betrachtete Volumen in beliebig viele kleinere Teilvolumina zerlegen.

Wir zeigen den Satz von Gauß daher hier nur für ein quaderförmiges Volumen $V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$. Der Mittelpunkt dieses Quaders habe die Koordinaten (x_1, x_2, x_3) . Das Integral über den Rand des Quaders setzt sich somit aus den 6 Begrenzungsflächen des Quaders zusammen, das wir für kleine Größen $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ folgendermaßen annähern können

$$\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} \approx \sum_{i=1}^6 \vec{F} \cdot \Delta \vec{A}^i.$$

Die 6 Flächen $\Delta \vec{A}^i$ sind dabei

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}^1 &= \Delta x_2 \Delta x_3 \vec{e}^1 & \Delta \vec{A}^2 &= \Delta x_2 \Delta x_3 (-\vec{e}^1) \\ \Delta \vec{A}^3 &= \Delta x_1 \Delta x_3 \vec{e}^2 & \Delta \vec{A}^4 &= \Delta x_1 \Delta x_3 (-\vec{e}^2) \\ \Delta \vec{A}^5 &= \Delta x_1 \Delta x_2 \vec{e}^3 & \Delta \vec{A}^6 &= \Delta x_1 \Delta x_2 (-\vec{e}^3) \end{aligned}$$

Den Wert des Feldes F_i an den Flächenmitten dieser Quaderflächen erhalten wir aus einer Taylorreihenentwicklung, um den Punkt (x_1, x_2, x_3) im Mittelpunkt des Quaders, wobei wir nur den linearen Term berücksichtigen

$$\begin{aligned} F_1(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) &= F_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{2} + \dots \\ F_1(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) &= F_1(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{2} + \dots \\ F_2(x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3) &= F_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \frac{\Delta x_2}{2} + \dots \\ F_2(x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3) &= F_2(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \frac{\Delta x_2}{2} + \dots \\ F_3(x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}) &= F_3(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\Delta x_3}{2} + \dots \\ F_3(x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}) &= F_3(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\Delta x_3}{2} + \dots \end{aligned}$$

Setzen wir diese Taylorentwicklungen zusammen mit den Darstellungen der Flächenvektoren ein, so erhalten wir für das Integral über die Quaderflächen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \vec{F} \cdot \Delta \vec{A}^i &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \\ &= (\operatorname{div} \vec{F}) \Delta V. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für das betrachtete Quadervolumen gezeigt. Da wir uns ein beliebig geformtes Volumen aus lauter kleinen Quadern zusammengesetzt denken können, gilt der Gauß'sche Satz auch für beliebig geformte Volumina. Für einen genaueren Beweis sei auf die mathematische Literatur verwiesen (siehe Buch Lang, Pucker bzw. Referenzen darin).

2.5.2 Weitere Anwendungen des Gauß'schen Integralsatzes

Beispiel 1. Wir verifizieren den Gauß'schen Satz in der Form 2.112 für das Vektorfeld $\vec{F} = \vec{x}$, wenn V das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen a , b , und c bedeutet, dessen Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt.

Wir werten zunächst das Volumensintegral auf der linken Seite von 2.112 aus. Mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{x} = 3$ erhalten wir

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = 3 \int_V dV = 3abc.$$

Das Flächenintegral auf der rechten Seite von 2.112 zerlegen wir in insgesamt 6 Teilintegrale über die Begrenzungsflächen des Quaders

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left(-\frac{c}{2}\right) (-1) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left(+\frac{c}{2}\right) (+1) \\ &+ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \left(-\frac{b}{2}\right) (-1) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \left(+\frac{b}{2}\right) (+1) \\ &+ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \left(-\frac{a}{2}\right) (-1) + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \left(+\frac{a}{2}\right) (+1) \\ &= 3abc. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Beispiel 2. Eine Anwendung des Gauß'schen Satzes in der Form 2.109 findet sich in dem Beweis des *archimedischen Prinzips*. Das archimedische Prinzip wurde vor über 2000 Jahren von dem griechischen Gelehrten Archimedes formuliert, und lautet bekanntermaßen: Der statische Auftrieb eines Körpers in einem Medium ist genauso groß wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten Mediums.

Die gesamte Auftriebskraft \vec{F} kann dadurch erklärt werden, indem wir die durch den hydrostatischen Druck p verursachten Kräfte $d\vec{F}$ über die Berandung ∂V des eingetauchten Körpers aufsummieren:

$$\vec{F} = - \oint_{\partial V} p d\vec{A}.$$

Das Minuszeichen rührt daher, dass die Kraft $d\vec{F} = -p d\vec{A}$ ja nach "innen" wirkt, während die Flächennormale $d\vec{A}$ definitionsgemäß nach "außen" weist. Nach dem Gauß'schen Satz kann das Integral über den Rand des Volumens ∂V übergeführt werden in ein Volumsintegral über das Volumen V :

$$\vec{F} = - \int_V \text{grad } p dV = - \int_V \text{grad } (\rho g z) dV = -\rho g \vec{e}^3 \int_V dV = -\rho V g \vec{e}^3.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass der hydrostatische Druck (für inkompressible Flüssigkeiten) linear mit der Tiefe z ansteigt, also $p(z) = \rho g z$, wobei ρ die Dichte, und g die Erdbeschleunigung darstellt. Das Ergebnis $\vec{F} = -\rho V g \vec{e}^3$ spiegelt somit genau das Archimedische Prinzip wider, wobei das negative Vorzeichen, die nach oben gerichtete Kraft angibt (positive z Richtung nach unten gewählt).

Aus dieser Herleitung sehen wir also, dass das archimedische Prinzip streng genommen nur gilt, wenn der Druck *linear* mit der Tiefe zunimmt. An Luft gilt etwa die barometrische Höhenformel $p(z) = p(0)e^{-\frac{z}{z_s}}$, und somit das archimedische Prinzip nur näherungsweise. Allerdings in sehr guter Näherung, weil die charakteristische Länge $z_s = \frac{RT}{Mg}$ (Gaskonstante R , absolute Temperatur T , molare Gasmasse M , und Erdbeschleunigung g) mit $z_s \approx 8.4$ km deutlich größer ist, als typische Objekte, deren Auftrieb uns interessieren könnte ...

Beispiel 3. Wir betrachten eine homogene, kugelförmige Massenverteilung mit der Gesamtmasse M und der Dichte $\rho(r)$ in der Form

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Wir zeigen mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass auf eine Masse m im Abstand r vom Zentrum der Massenverteilung die Gravitationskraft $\vec{F} = m \vec{g}$ wirkt, wobei (G ist die Gravitationskonstante)

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -GM \frac{\vec{r}}{R^3}, & r \leq R \\ -GM \frac{\vec{r}}{r^3}, & r > R. \end{cases}$$

Wir berechnen zunächst die Divergenz des Kraftfeldes zu (vgl. 2.89)

$$\text{div } \vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -GM \frac{3}{R^3} = -4\pi G \rho_0, & r \leq R \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Wählen wir als Integrationsbereich V eine Kugel mit dem Radius r , dann liefert das Volumsintegral

$$\int_V \operatorname{div} \vec{g} \, dV = \begin{cases} -4\pi GM \frac{r^3}{R^3} = -4\pi G\tilde{M}(r), & r \leq R \\ -4\pi GM, & r > R. \end{cases}$$

Das Integral liefert also die in der Kugelschale eingeschlossene Masse als Quelle des Feldes.⁶ Für $r > R$ ist das die Gesamtmasse M , während für $r \leq R$ die Masse $\tilde{M}(r) = M \frac{r^3}{R^3}$ entsprechend des Verhältnisses $\frac{r^3}{R^3}$ relevant ist. Das negative Vorzeichen drückt aus, dass es sich um eine anziehende Kraft handelt, das heißt die Feldlinien verlaufen in Richtung der Masse. Für die Auswertung des Flächenintegrals über die Kugelschale ∂V mit dem Radius r berücksichtigen wir, dass aufgrund der Kugelsymmetrie und der anziehenden Natur der Gravitation, die Gravitationsbeschleunigung eine Zentralkraft ist, also in der Form $\vec{g}(\vec{r}) = -g(r) \frac{\vec{r}}{r}$ geschrieben werden kann. Damit liefert der Gauß'sche Satz:

$$\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} -4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM \frac{r^3}{R^3}, & r \leq R \\ -4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM, & r > R, \end{cases}$$

womit wir unsere ursprüngliche Annahme bewiesen haben

$$g(r) = \begin{cases} GM \frac{r}{R^3}, & r \leq R \\ GM \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

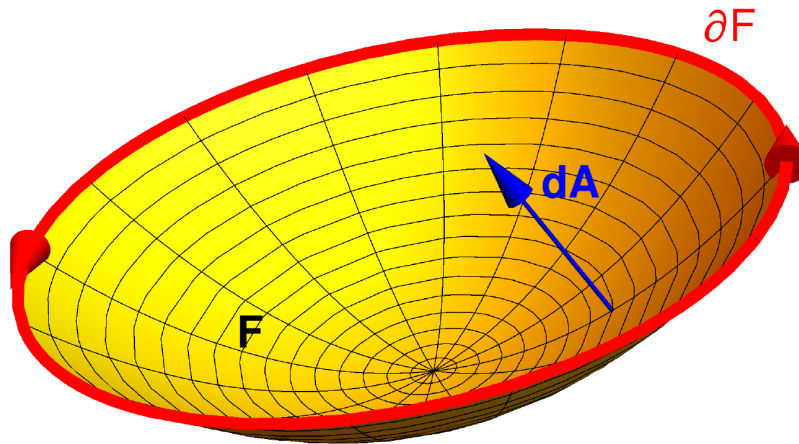
2.6 Der Satz von Stokes

Der Integralsatz von Stokes stellt einen Zusammenhang zwischen einem Flächenintegral über eine Fläche F und einem Kurvenintegral längs der geschlossenen Kurve ∂F dar, die den Rand der Fläche bildet. Für ein Vektorfeld $\vec{B}(x_1, x_2, x_3)$ lautet der Stokes'sche Satz:

$$\int_F d\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{x} \quad (2.114)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass das Feld $\vec{B}(x_1, x_2, x_3)$ eine im Integrationsgebiet stetig differenzierbare Funktion darstellt. Der Umlaufsinn der Integration entlang der Kurve ∂F und die Orientierung des Flächenelement $d\vec{A}$ ist so festzulegen, dass sie zusammen die Bewegung einer Rechts-schraube ergeben.

⁶Bis auf eine numerische Konstante $4\pi G$, deren Wahl im Prinzip willkürlich ist und historisch so entstanden ist.



Mithilfe des Satzes von Stokes können wir auch eine bereits bekannte Tatsache in einem anderen Licht betrachten: Das Wegintegral eines Vektorfeldes \vec{B} über einen geschlossenen Weg verschwindet, falls das Vektorfeld \vec{B} wirbelfrei ist ($\text{rot } \vec{B} = 0$). Und das bedeutet ja nichts anderes als, dass das Feld \vec{B} konservativ ist (vgl. Kapitel 2.4.6)

Beispiel. Wir verifizieren den Stokes'schen Satz in der Form 2.114 für das Vektorfeld $B_i = (-2x_2, 3x_1, 0)$ für eine Fläche F , die ein Rechteck in der (x_1, x_2) -Ebene mit den Seitenlängen a und b darstellt.

Wir berechnen zunächst das linke Integral über die Fläche. Das Flächenelement lautet $d\vec{A} = dx dy \vec{e}_3$, und für die Rotation des Feldes finden wir den konstanten Term $\text{rot } \vec{B} = 5\vec{e}_3$. Damit ergibt die Integration über die das Rechteck ganz einfach zu

$$\int_F d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = 5 \int_0^a dx_1 \int_0^b dx_2 = 5ab.$$

Das Wegintegral über den Rand des Rechtecks zerlegen wir in 4 Teilstrecken C_1 bis C_4 , die wir einzeln berechnen müssen:

$$\begin{aligned} C_1 : \vec{x} &= (at, 0, 0), & d\vec{x} &= (a, 0, 0)dt, & \vec{B} \cdot d\vec{x} &= -2x_2adt, & \int_0^1 0 dt &= 0 \\ C_2 : \vec{x} &= (a, bt, 0), & d\vec{x} &= (0, b, 0)dt, & \vec{B} \cdot d\vec{x} &= 3x_1bdt, & \int_0^1 3ab dt &= 3ab \\ C_3 : \vec{x} &= (a - at, b, 0), & d\vec{x} &= (-a, 0, 0)dt, & \vec{B} \cdot d\vec{x} &= -2x_2adt, & \int_0^1 2ab dt &= 2ab \\ C_4 : \vec{x} &= (0, b - bt, 0), & d\vec{x} &= (0, -b, 0)dt, & \vec{B} \cdot d\vec{x} &= -3x_1bdt, & \int_0^1 0 dt &= 0 \end{aligned}$$

Und somit haben wir den Stokes'schen Satz für dieses Beispiel verifiziert:

$$\oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{x} = 0 + 3ab + 2ab + 0 = 5ab.$$

2.6.1 Anwendungen des Stokes'schen Satzes

Beispiel. Wir überprüfen die Gültigkeit des Stokes'schen Satzes 2.114 für das Vektorfeld $\vec{B} = (3x_2, -x_1x_3, x_2x_3^2)$ und für die Fläche F gebildet aus dem Paraboloid $x_3(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ für $0 \leq x_3 \leq 2$.

Wir berechnen zunächst das Integral über den Rand ∂F , der durch den Kreis $\vec{x}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ gegeben ist. Damit erhalten wir

$$\oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \vec{B}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt = \int_0^{2\pi} (-12 \sin^2 t - 8 \cos^2 t) dt = -20\pi.$$

Nun bestimmen wir das Flächenintegral, wobei zu beachten ist, dass mit unserer Wahl des Umlaufsinnnes der Wegintegration (nämlich gegen den Uhrzeigersinn), der Normalvektor nach "oben" (in die positive x_3 -Richtung) weisen muss. Als Parameterdarstellung wählen wir Zylinderkoordinaten $x_1 = \rho \cos \phi$, $x_2 = \rho \sin \phi$, und $x_3 = x_3$ wodurch die Fläche F gegeben ist durch

$$\vec{x}(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ \frac{1}{2}\rho^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ \rho \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für das Flächenelement $d\vec{A}$, und berechnen für die Rotation von \vec{B} folgende Ausdrücke

$$d\vec{A} = \begin{pmatrix} -\rho \cos \phi \\ -\rho \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} \rho d\rho d\phi, \quad \text{rot } \vec{B} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3^2 \\ 0 \\ -3 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi + \frac{\rho^4}{4} \\ 0 \\ -3 - \frac{\rho^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen schließlich

$$\int_F d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 \rho d\rho \left[-\rho^2 \cos^2 \phi - \frac{\rho^5}{4} \cos \phi - 3 - \frac{\rho^2}{2} \right] = -4\pi - 0 - 12\pi - 4\pi = -20\pi.$$

Beispiel. Die magnetische Feldstärke eines geraden, in x_3 -Richtung orientierten, und mit dem Strom I durchflossenen Leiter ist gegeben durch

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)} (-x_2 \vec{e}^1 + x_1 \vec{e}^2) = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}^\phi.$$

Hierbei wurden für die erste Darstellung kartesische Koordinaten, und für die zweite Zylinderkoordinaten mit $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$ und $\vec{e}^\phi = -\sin\phi \vec{e}^1 + \cos\phi \vec{e}^2$ verwendet. Wir werten den Satz von Stokes für eine Kreisscheibe mit dem Radius R aus, und berechnen zunächst das Wegintegral über den Kreis ∂F

$$\vec{x}(\phi) = R(\cos\phi, \sin\phi, 0), \quad \frac{d\vec{x}}{d\phi} = R(-\sin\phi, \cos\phi, 0),$$

und erhalten

$$\oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{I}{2\pi R} R = I.$$

Nun berechnen wir die Rotation des Feldes

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{I}{2\pi} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x_1^2+x_2^2-2x_1^2}{x_1^2+x_2^2} + \frac{x_1^2+x_2^2-2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.115)$$

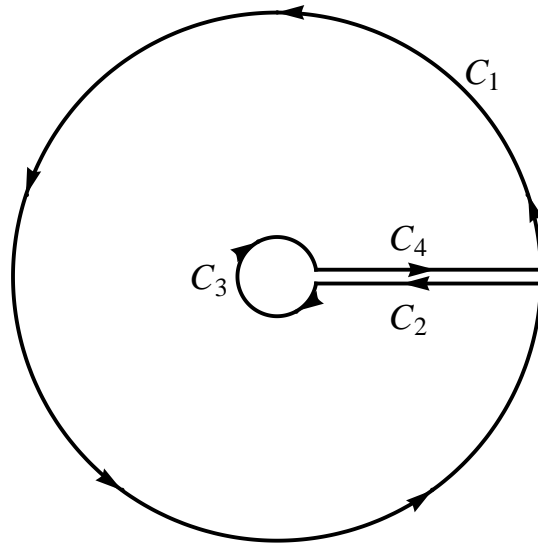
Mit dem Verschwinden der Rotation wird auch das Integral

$$\int_F d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = 0$$

und der Satz von Stokes gilt scheinbar nicht? Wie schon in Kapitel 2.5.2 für den Gauß'schen Satz gezeigt, hat auch dieser scheinbare Widerspruch mit der Tatsache zu tun, dass das Feld \vec{H} für $\rho \rightarrow 0$ divergiert. Damit ist die Rotation im Punkt $\rho = 0$ nicht definiert⁷ und der Punkt $\rho = 0$ muss bei der Anwendung des Stokes'schen Satzes ausgespart werden. Das Ergebnis 2.115 gilt also nur für $\rho \neq 0$.

Um den Satz von Stokes auf dieses Problem anwenden zu können, wählen wir als Fläche F' eine Kreisscheibe mit dem Radius R mit einem Loch in der Mitte mit dem Radius ϵ (siehe Abbildung unten). Innerhalb dieser Fläche ist die Rotation identisch null und das Integral $\int_{F'} d\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} = 0$ verschwindet. Um das entsprechende Wegintegral entlang der Berandung von F' berechnen zu können, müssen wir die Kreisscheibe entlang der Achse "aufschneiden" und den Weg entlang der 4 Kurven C_1 , C_2 , C_3 , und C_4 berechnen.

⁷Später werden Sie dann lernen, dass man mithilfe der Dirac'schen Deltadistribution auch für $\rho = 0$ die Rotation angeben kann.



$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial F'} \vec{H} \cdot d\vec{x} &= \int_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{x} + \int_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{x} + \int_{C_3} \vec{H} \cdot d\vec{x} + \int_{C_4} \vec{H} \cdot d\vec{x} \\
 &= \int_0^{2\pi} d\phi \frac{I}{2\pi R} R + \int_R^\epsilon dx_1 \frac{I \cdot 0}{2\pi x_1^2} + \int_{2\pi}^0 d\phi \frac{I}{2\pi \epsilon} \epsilon - \int_\epsilon^R dx_1 \frac{I \cdot 0}{2\pi x_1^2} \\
 &= I + 0 - I + 0 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

2.6.2 Der Integralsatz von Green in der Ebene

Einen wichtigen Spezialfall des Satzes von Stokes erhält man, indem man eine Kurve betrachtet, die völlig in der (x_1, x_2) -Ebene liegt. Dann kann auch die eingeschlossene Fläche in dieser Ebene gewählt werden, und man erhält folgenden Integralsatz für den (je nach Quelle) verschiedene Bezeichnungen in Verwendung sind: Satz von Green-Riemann, Satz von Green-Gauß, Satz von Green in der Ebene, Satz von Stokes in der Ebene, oder Satz von Gauß in der Ebene.

Sei $C = \partial F$ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in der Ebene, die mathematisch positiv durchlaufen wird und einen Bereich F begrenzt, dann gilt für die stetig differenzierbaren Funktionen $f(x_1, x_2)$ und $g(x_1, x_2)$:

$$\oint_C (f dx_1 + g dx_2) = \iint_F \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \tag{2.117}$$

Dass 2.117 ein Spezialfall des allgemeineren Stokes'schen Satzes 2.114 darstellt, sehen wir ganz einfach,

indem wir für das Vektorfeld in 2.114 ansetzen

$$B_i = (f(x_1, x_2), g(x_1, x_2), 0).$$

Damit wird

$$\left\{ \operatorname{rot} \vec{B} \right\}_i = \left(0, 0, \frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \quad dA_i = (0, 0, dx_1 dx_2), \quad \vec{B} \cdot \vec{x} = f dx_1 + g dx_2,$$

und die Gleichung 2.117 ist somit bewiesen.

Der Satz von Green in der Ebene kann beispielsweise dazu benutzt werden um Flächeninhalte zu berechnen. Wählen wir die Funktionen f und g zu $f(x_1, x_2) = -x_2$ und $g(x_1, x_2) = x_1$, erhalten wir aus 2.117

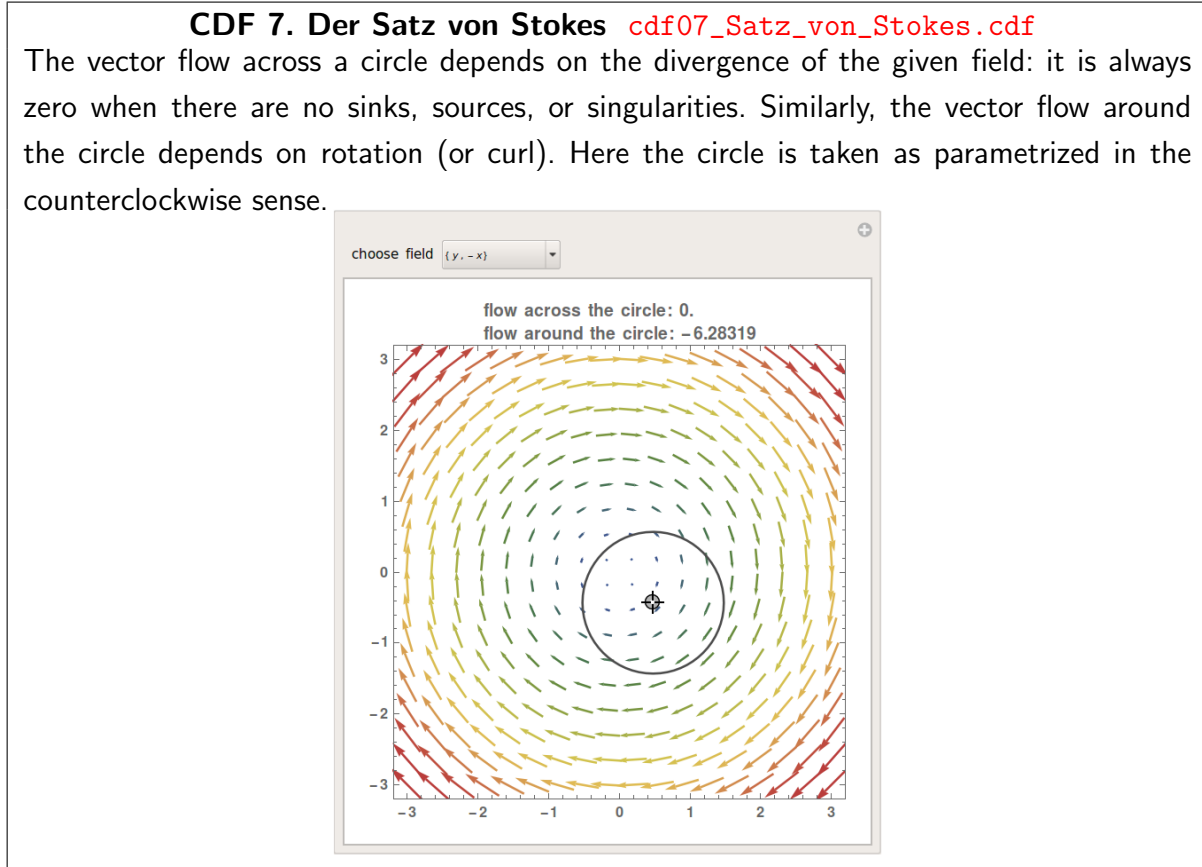
$$\oint_C (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) = \iint_F 2 dx_1 dx_2 = 2A_F.$$

Somit können wir den Flächeninhalt A_F eines Bereiches F aus dem Linienintegral über den Rand der Fläche erhalten. Dieser Sachverhalt wird auch als *Sektorformel* bezeichnet:

$$A_F = \frac{1}{2} \oint_{\partial F} (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) \tag{2.118}$$

Beispiel. Mit der Sektorformel 2.118 wollen wir den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b berechnen. Begrenzt wird diese von der Kurve $C : x_1 = a \cos t, x_2 = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Man erhält also mit $dx_1 = -a \sin t$ und $dx_2 = b \cos t$ für den Flächeninhalt A der Ellipse:

$$\begin{aligned} A_F &= \frac{1}{2} \oint_{\partial F} (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = ab\pi. \end{aligned}$$



2.7 Gebräuchliche Koordinatensysteme

Wir haben unseren bisherigen Untersuchungen kartesische Koordinatensysteme zugrunde gelegt. Wie wir bereits wissen, gibt es aber noch andere Koordinatensysteme, die man unter Umständen mit Vorteil an Stelle der rechtwinkligen kartesischen Koordinaten zur Darstellung geometrischer oder physikalischer Beziehungen verwenden wird. Es sind dies insbesondere zum Beispiel Zylinder- und Kugelkoordinaten. Es gibt aber noch eine Reihe weitere Koordinatensysteme, die man allgemein in orthogonale und nicht-orthogonale unterteilen kann. Wir werden uns in diesem Kapitel den so genannten orthogonalen krummlinigen Koordinatensystemen widmen, und insbesondere ableiten, welche Gestalt die in den vorangegangenen Kapiteln besprochenen Größen wie Gradient, Divergenz, Rotation in solchen Koordinatensystemen annehmen.

Hier wollen wir kurz die zwei gebräuchlichsten Koordinatensysteme, nämlich die Zylinderkoordinaten und die Kugelkoordinaten, definieren.

2.7.1 Zylinderkoordinaten

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen $x_1 = x$, $x_2 = y$, und $x_3 = z$. Die Koordinaten eines Punktes (Ortsvektor) seien Funktionen von drei unabhängigen Parametern, die wir mit ρ , φ , und z bezeichnen:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (2.119)$$

Lösen wir die Gleichungen 2.119 nach ρ , φ , und z auf, so erhalten wir ρ , φ , und z als Funktion der kartesischen Koordinaten x , y , und z .

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z \quad (2.120)$$

Die Gleichungen 2.119 und 2.120 besagen, dass jedem Zahlentripel ρ, φ, z in eindeutiger Weise ein Zahlentripel x, y, z zugeordnet ist und umgekehrt. Hierzu gelten folgende Bereiche $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, und $-\infty < z < \infty$. Die drei Parameter ρ, φ, z dienen uns also wie die kartesischen Koordinaten x, y, z zur Festlegung der Punkte des Raumes. Je drei Zahlen ρ, φ, z bestimmen eindeutig einen Punkt P , und umgekehrt, jeder Punkt P eindeutig drei Zahlen ρ, φ, z , die wir als *Zylinderkoordinaten des Punktes P* bezeichnen.

Koordinatenlinien. Halten wir jeweils zwei der drei Zylinderkoordinaten fest, so erhalten wir die drei *Koordinatenlinien* \vec{x}^ρ , \vec{x}^φ , und \vec{x}^z , die wir geometrisch in folgender Weise interpretieren können:

- **ρ -Linien:** Halbstrahlen senkrecht von der z -Achse weg ($\vec{x}^\rho(\rho, \varphi = \varphi_0, z = z_0)$)
- **φ -Linien:** Kreise um die z -Achse ($\vec{x}^\varphi(\rho = \rho_0, \varphi, z = z_0)$)
- **z -Linien:** Geraden parallel zur z -Achse ($\vec{x}^z(\rho = \rho_0, \varphi_0, z)$)

Die Tangentenvektoren $\vec{\tau}^\rho$, $\vec{\tau}^\varphi$, und $\vec{\tau}^z$ und die dazugehörigen Einheitsvektoren \vec{e}^ρ , \vec{e}^φ , und \vec{e}^z lauten

$$\vec{\tau}^\rho = \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \varphi \vec{e}^y \quad (2.121)$$

$$\vec{\tau}^\varphi = -\rho \sin \varphi \vec{e}^x + \rho \cos \varphi \vec{e}^y \quad (2.122)$$

$$\vec{\tau}^z = \vec{e}^z \quad (2.123)$$

$$\vec{e}^\rho = \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \varphi \vec{e}^y \quad (2.124)$$

$$\vec{e}^\varphi = -\sin \varphi \vec{e}^x + \cos \varphi \vec{e}^y \quad (2.125)$$

$$\vec{e}^z = \vec{e}^z \quad (2.126)$$

Wir überprüfen leicht, dass die drei Einheitsvektoren \vec{e}^ρ , \vec{e}^φ , und \vec{e}^z in jedem Punkt des Raumes orthogonal aufeinander stehen

$$\vec{e}^\rho \cdot \vec{e}^\varphi = 0, \quad \vec{e}^\rho \cdot \vec{e}^z = 0, \quad \vec{e}^\varphi \cdot \vec{e}^z = 0 \quad (2.127)$$

und der Reihenfolge \vec{e}^ρ , \vec{e}^φ , und \vec{e}^z ein orthogonales Dreibein mit Rechtsorientierung aufspannen

$$\vec{e}^\rho \times \vec{e}^\varphi = \vec{e}^z. \quad (2.128)$$

Den Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e}^x + y\vec{e}^y + z\vec{e}^z$ können wir nun auch in dem Dreibein \vec{e}^ρ , \vec{e}^φ , und \vec{e}^z darstellen und erhalten

$$\vec{r} = \rho\vec{e}^\rho + z\vec{e}^z. \quad (2.129)$$

Wir können die Gleichungen 2.124–2.126 auch umkehren und die kartesischen Einheitsvektoren durch die Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten ausdrücken.

$$\vec{e}^x = \cos \varphi \vec{e}^\rho - \sin \varphi \vec{e}^\varphi \quad (2.130)$$

$$\vec{e}^y = \sin \varphi \vec{e}^\rho + \cos \varphi \vec{e}^\varphi \quad (2.131)$$

$$\vec{e}^z = \vec{e}^z \quad (2.132)$$

Beispiel. Wir nehmen an der Ortsvektor \vec{r} sei von der Zeit t abhängig. Dann liefert die Ableitung von 2.129

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho}\vec{e}^\rho + \rho\dot{\vec{e}}^\rho + \dot{z}\vec{e}^z \\ &= \dot{\rho}\vec{e}^\rho + \rho(-\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{e}^x + \dot{\varphi}\cos\varphi\vec{e}^y) + \dot{z}\vec{e}^z \\ &= \dot{\rho}\vec{e}^\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}^\varphi + \dot{z}\vec{e}^z. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Koordinatenflächen. Halten wir in $\vec{x}(\rho, \varphi, z)$ nur eine der Koordinaten fest und variieren die beiden anderen, so erhalten wir die *Koordinatenflächen*

- **ρ -Flächen:** Drehzylinder mit dem Radius ρ um die z -Achse
- **φ -Flächen:** Halbebenen durch die z -Achse
- **z -Flächen:** Ebenen senkrecht zur z -Achse

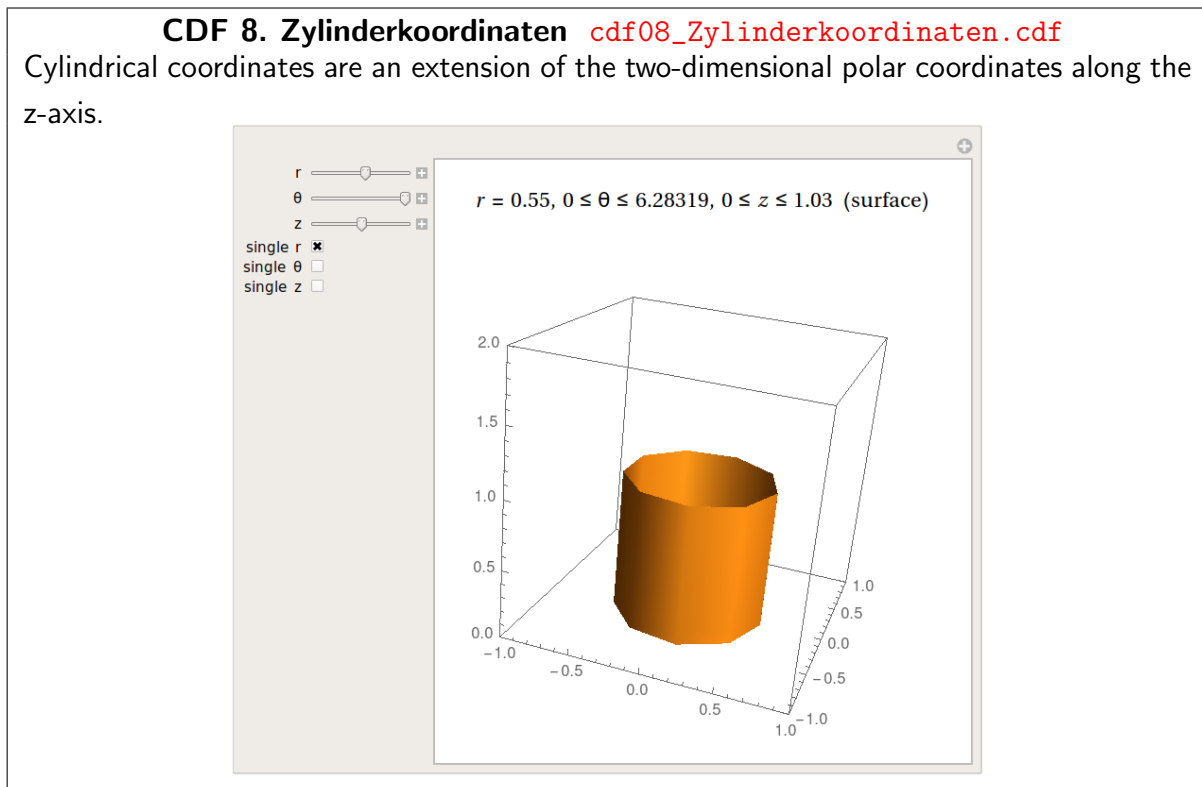
Die Koordinatenflächen sind also Äquipotenzialflächen, deren Flächennormalen mithilfe des Gradienten und Gleichungen 2.120 berechnet werden können:

$$\vec{\gamma}^\rho = \vec{\nabla}\rho(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}^x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}^y = \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \varphi \vec{e}^y \quad (2.134)$$

$$\vec{\gamma}^\varphi = \vec{\nabla}\varphi(x, y, z) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}^x + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}^y = -\frac{1}{\rho} \sin \varphi \vec{e}^x + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \vec{e}^y \quad (2.135)$$

$$\vec{\gamma}^z = \vec{\nabla}z(x, y, z) = \vec{e}^z. \quad (2.136)$$

Der Vergleich mit 2.121–2.123 zeigt, dass die Normalenvektoren auf die Koordinatenflächen $\vec{\gamma}^\rho$, $\vec{\gamma}^\varphi$, und $\vec{\gamma}^z$ parallel zu den entsprechenden Tangentenvektoren $\vec{\tau}^\rho$, $\vec{\tau}^\varphi$, und $\vec{\tau}^z$ sind, und damit ebenfalls ein orthogonales Dreibein definieren.



2.7.2 Kugelkoordinaten

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen $x_1 = x$, $x_2 = y$, und $x_3 = z$. Die Koordinaten eines Punktes (Ortsvektor) seien Funktionen von drei unabhängigen Parametern, die wir mit r , ϑ , und φ bezeichnen:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta \quad (2.137)$$

Lösen wir die Gleichungen 2.137 nach r , ϑ , und φ auf, so erhalten wir r , ϑ , und φ als Funktion der kartesischen Koordinaten x , y , und z .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2.138)$$

Die Gleichungen 2.137 und 2.138 besagen, dass jedem Zahlentripel r, ϑ, φ in eindeutiger Weise ein Zahlentripel x, y, z zugeordnet ist und umgekehrt. Hierzu gelten folgende Bereiche $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Die drei Parameter r, ϑ, φ dienen uns also wie die kartesischen Koordinaten x, y, z zur Festlegung der Punkte des Raumes. Je drei Zahlen r, ϑ, φ bestimmen eindeutig einen Punkt P , und umgekehrt, jeder Punkt P eindeutig drei Zahlen r, ϑ, φ , die wir als *Kugelkoordinaten des Punktes P* bezeichnen.

Koordinatenlinien. Halten wir jeweils zwei der drei Kugelkoordinaten fest, so erhalten wir die drei *Koordinatenlinien* \vec{x}^r , \vec{x}^ϑ , und \vec{x}^φ , die wir geometrisch in folgender Weise interpretieren können:

- **r -Linien:** Halbstrahlen vom Koordinatenursprung weg ($\vec{x}^r(r, \vartheta = \vartheta_0, \varphi = \varphi_0)$)
- **ϑ -Linien:** Halbkreise um den Koordinatenursprung ("Längenkreise" $\vec{x}^\vartheta(r = r_0, \vartheta, \varphi = \varphi_0)$)
- **φ -Linien:** Kreise um die z -Achse ("Breitenkreise" $\vec{x}^\varphi(r = r_0, \vartheta = \vartheta_0, \varphi)$)

Die Tangentenvektoren $\vec{\tau}^r$, $\vec{\tau}^\vartheta$, und $\vec{\tau}^\varphi$, und die zugehörigen Einheitsvektoren \vec{e}^r , \vec{e}^ϑ , und \vec{e}^φ lauten:

$$\vec{\tau}^r = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y + \cos \vartheta \vec{e}^z \quad (2.139)$$

$$\vec{\tau}^\vartheta = r \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + r \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y - r \sin \vartheta \vec{e}^z \quad (2.140)$$

$$\vec{\tau}^\varphi = -r \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^x + r \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^y \quad (2.141)$$

$$\vec{e}^r = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y + \cos \vartheta \vec{e}^z \quad (2.142)$$

$$\vec{e}^\vartheta = \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y - \sin \vartheta \vec{e}^z \quad (2.143)$$

$$\vec{e}^\varphi = -\sin \varphi \vec{e}^x + \cos \varphi \vec{e}^y \quad (2.144)$$

Wir überprüfen leicht, dass die drei Einheitsvektoren \vec{e}^r , \vec{e}^ϑ , und \vec{e}^φ in jedem Punkt des Raumes orthogonal aufeinander stehen

$$\vec{e}^r \cdot \vec{e}^\vartheta = 0, \quad \vec{e}^r \cdot \vec{e}^\varphi = 0, \quad \vec{e}^\vartheta \cdot \vec{e}^\varphi = 0 \quad (2.145)$$

und der Reihenfolge \vec{e}^r , \vec{e}^ϑ , und \vec{e}^φ ein orthogonales Dreibein mit Rechtsorientierung aufspannen

$$\vec{e}^r \times \vec{e}^\vartheta = \vec{e}^\varphi. \quad (2.146)$$

Den Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e}^x + y\vec{e}^y + z\vec{e}^z$ können wir nun auch in dem Dreibein \vec{e}^r , \vec{e}^ϑ , und \vec{e}^φ darstellen und erhalten

$$\vec{r} = r\vec{e}^r. \quad (2.147)$$

Wir können die Gleichungen 2.142–2.144 auch umkehren und die kartesischen Einheitsvektoren durch die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten ausdrücken.

$$\vec{e}^x = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^r + \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}^\vartheta - \sin \varphi \vec{e}^\varphi \quad (2.148)$$

$$\vec{e}^y = \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^r + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}^\vartheta + \cos \varphi \vec{e}^\varphi \quad (2.149)$$

$$\vec{e}^z = \cos \vartheta \vec{e}^r - \sin \vartheta \vec{e}^\vartheta \quad (2.150)$$

Beispiel. Wir nehmen an der Ortsvektor \vec{r} sei von der Zeit t abhängig. Dann liefert die Ableitung von 2.147

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}^r + r\dot{\vec{e}}^r \\ &= \dot{r}\vec{e}^r + r(\dot{\vartheta}\vec{e}^\vartheta + \dot{\varphi}\sin\vartheta\vec{e}^\varphi) \\ &= \dot{r}\vec{e}^r + r\dot{\vartheta}\vec{e}^\vartheta + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\vec{e}^\varphi \end{aligned} \quad (2.151)$$

Koordinatenflächen. Halten wir in $\vec{x}(r, \vartheta, \varphi)$ nur eine der Koordinaten fest und variieren die beiden anderen, so erhalten wir die *Koordinatenflächen*

- **r -Flächen:** Konzentrische Kugel mit dem Radius r um den Koordinatenursprung
- **ϑ -Flächen:** Drehkegel um die z -Achse mit dem Scheitel im Koordinatenursprung
- **φ -Flächen:** Halbebenen durch die z -Achse

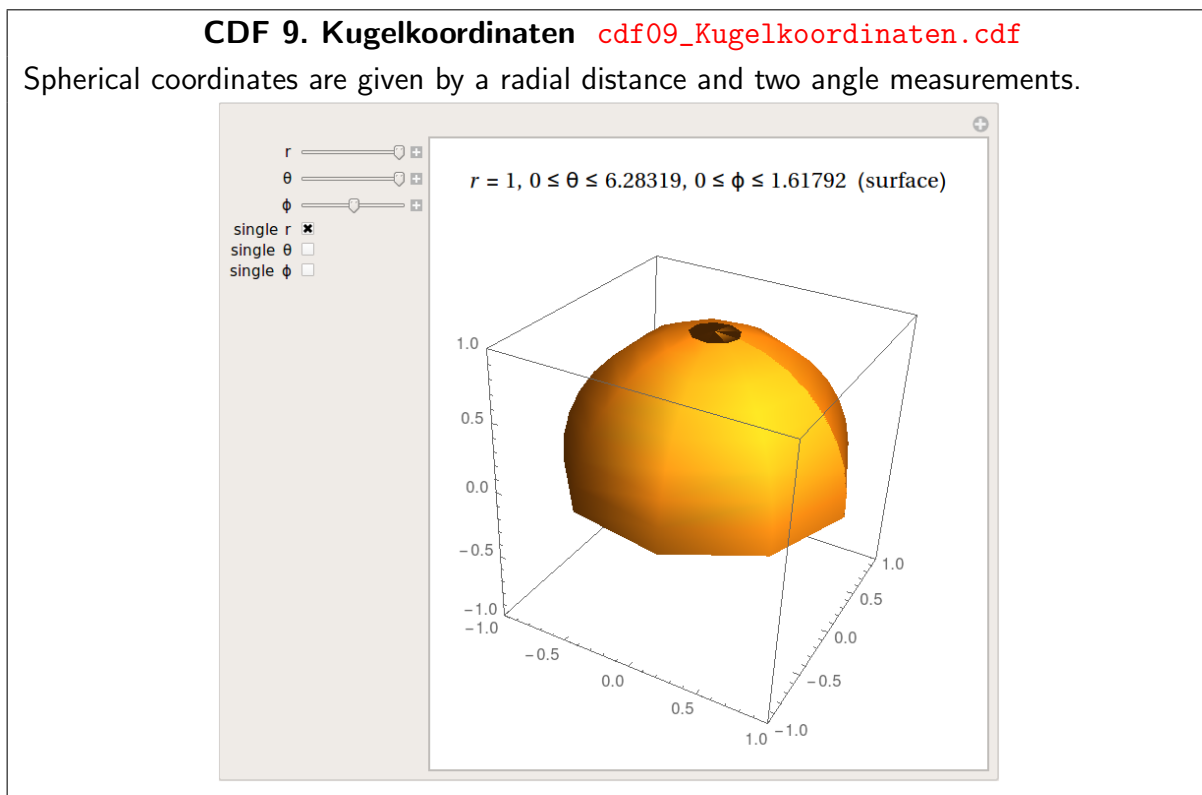
Die Koordinatenflächen sind also Äquipotenzialflächen, deren Flächennormalen mithilfe des Gradienten und Gleichungen 2.138 berechnet werden können:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}^r = \vec{\nabla}r(x, y, z) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{e}^x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{e}^y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{e}^z \\ &= \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y + \cos \vartheta \vec{e}^z\end{aligned}\quad (2.152)$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}^\vartheta = \vec{\nabla}\vartheta(x, y, z) &= \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} \vec{e}^x + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + z^2)} \vec{e}^y - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{e}^z \\ &= \frac{1}{r} \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}^x + \frac{1}{r} \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}^y - \frac{1}{r} \sin \vartheta \vec{e}^z\end{aligned}\quad (2.153)$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}^\varphi = \vec{\nabla}\varphi(x, y, z) &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}^x + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{e}^y \\ &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \sin \varphi \vec{e}^x + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cos \varphi \vec{e}^y\end{aligned}\quad (2.154)$$

Der Vergleich mit 2.139–2.141 zeigt, dass die Normalenvektoren auf die Koordinatenflächen $\vec{\gamma}^r$, $\vec{\gamma}^\vartheta$, und $\vec{\gamma}^\varphi$ parallel zu den entsprechenden Tangentenvektoren $\vec{\tau}^r$, $\vec{\tau}^\vartheta$, und $\vec{\tau}^\varphi$ sind, und damit ebenfalls ein orthogonales Dreibein definieren.



2.7.3 Linienelemente, Flächenelemente, Volumselement

Zylinderkoordinaten. Mit den metrischen Koeffizienten (siehe z.B. mein Skriptum **Vektoranalysis**) erhalten wir für die Linienelemente, Flächenelemente und das Volumselement in Zylinderkoordinaten

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (2.155)$$

$$ds_\rho = d\rho, \quad ds_\varphi = \rho d\varphi, \quad ds_z = dz \quad (2.156)$$

$$dA_\rho = \rho d\varphi dz, \quad dA_\varphi = d\rho dz, \quad dA_z = \rho d\rho d\varphi \quad (2.157)$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (2.158)$$

Kugelkoordinaten. Mit den metrischen Koeffizienten (siehe z.B. mein Skriptum **Vektoranalysis**) erhalten wir für die Linienelemente, Flächenelemente und das Volumselement in Kugelkoordinaten

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (2.159)$$

$$ds_r = dr, \quad ds_\vartheta = r d\vartheta, \quad ds_\varphi = r \sin \vartheta d\varphi \quad (2.160)$$

$$dA_r = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad dA_\vartheta = r \sin \vartheta dr d\varphi, \quad dA_\varphi = r dr d\vartheta \quad (2.161)$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \quad (2.162)$$

2.7.4 Differenzialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Ohne Herleitung (siehe z.B. mein Skriptum **Vektoranalysis**) geben wir hier die Form des Gradienten, der Divergenz, der Rotation und des Laplace-Operators in Zylinderkoordinaten an:

Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \{\text{grad } \Phi\}_\rho &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \\ \{\text{grad } \Phi\}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ \{\text{grad } \Phi\}_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.163)$$

Divergenz in Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2.164)$$

Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{rot} \vec{F} \right\}_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \\ \left\{ \operatorname{rot} \vec{F} \right\}_\varphi &= \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \\ \left\{ \operatorname{rot} \vec{F} \right\}_z &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (2.165)$$

Laplace-Operator eines skalaren Feldes in Zylinderkoordinaten

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (2.166)$$

Beispiel. Wir verwenden Zylinderkoordinaten um die magnetische Feldstärke \vec{H} außerhalb eines mit dem Strom I durchflossenen geraden Leiters im Abstand r zu berechnen. Dazu wenden wir das Ampere'sche Gesetz an

$$I = \oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{x}.$$

Wir wählen als Fläche F eine Kreisscheibe mit dem Radius r normal zur Stromrichtung (\vec{e}^z), das heißt, der Rand ∂F ist dann ein Kreis mit dem Radius r in der $(x_1 x_2)$ -Ebene. In Zylinderkoordinaten entspricht diese Kurve einer φ -Linie, dementsprechend ist das Wegelement gegeben durch (siehe 2.156)

$$d\vec{x} = ds_\varphi \vec{e}^\varphi = r d\varphi \vec{e}^\varphi.$$

In Zylinderkoordinaten ist

$$\vec{H} = H_\rho \vec{e}^\rho + H_\varphi \vec{e}^\varphi + H_z \vec{e}^z,$$

und daher

$$I = \oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi = 2\pi r H_\varphi,$$

woraus die bekannte Tatsache folgt:

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{bzw.} \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}^\varphi.$$

Zur Übung berechnen wir nun auch noch folgendes Integral (Satz von Stokes) in Zylinderkoordinaten:

$$I = \int_F \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{A}.$$

Das Flächenelement für den Kreis F ist (siehe 2.157)

$$d\vec{A} = dA_z \vec{e}^z = \rho d\rho d\varphi \vec{e}^z$$

Daher benötigen wir nur die z -Komponente der Rotation, die nach Gleichung 2.165 gegeben ist durch

$$\left\{ \text{rot } \vec{H} \right\}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi)$$

Hier haben wir berücksichtigt, dass wir aufgrund der Zylindersymmetrie eine Abhängigkeit $H_\rho(\varphi)$ ausschließen können, wodurch die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \rho}$ verschwindet. Wir erhalten somit

$$I = \int_F \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) = 2\pi [\rho H_\varphi]_0^r = 2\pi r H_\varphi(r).$$

2.7.5 Differenzialoperatoren in Kugelkoordinaten

Ebenfalls ohne Herleitung (siehe z.B. mein Skriptum **Vektoranalysis**) geben wir auch noch die Form des Gradienten, der Divergenz, der Rotation und des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten an:

Gradient in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \{\text{grad } \Phi\}_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \{\text{grad } \Phi\}_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \\ \{\text{grad } \Phi\}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \end{aligned} \tag{2.167}$$

Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_\vartheta) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (2.168)$$

Rotation in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{rot} \vec{F} \right\}_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \\ \left\{ \operatorname{rot} \vec{F} \right\}_\vartheta &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right] \\ \left\{ \operatorname{rot} \vec{F} \right\}_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \end{aligned} \quad (2.169)$$

Laplace-Operator eines skalaren Feldes in Kugelkoordinaten

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (2.170)$$

Beispiel. Zum Abschluss dieses Kapitels berechnen wir das Gravitationspotential Φ einer kugelsymmetrischen Massenverteilung $\rho(r)$, die folgende Form hat:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{R} r & , r \leq R \\ 0 & , r > R. \end{cases}$$

Hierbei sind ρ_1 und ρ_2 Konstante, die die Massendichte im Zentrum ($r = 0$) und bei ($r = R$) angeben, wobei die Dichte von $r = 0$ bis $r = R$ linear abnimmt ($\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 > 0$).

Wir berechnen zunächst die Gesamtmasse M dieser Massenverteilung

$$M = \int \rho dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_{r=0}^{\infty} r^2 dr \rho(r) = 4\pi \int_0^R r^2 \left(\rho_1 - \frac{\Delta\rho}{R} r \right) dr = 4\pi \frac{R^3}{3} \left(\rho_1 - \frac{3}{4} \Delta\rho \right).$$

Um das Gravitationspotential zu berechnen, müssen wir die Poisson-Gleichung integrieren $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$. Da es sich um eine kugelsymmetrische Massenverteilung handelt, $\rho = \rho(r)$, wird auch das Potential nur von r und *nicht* von ϑ und φ abhängen. Damit vereinfacht sich nach Gleichung 2.170 die Berechnung des Laplaceoperators und die Poisson-Gleichung wird zu einer gewöhnlichen Differen-

zialgleichung:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r).$$

Wir lösen diese Gleichung durch zweimaliges Integrieren zunächst für den Innenbereich $r \leq R$ und erhalten die Funktion $\Phi^{(i)}(r)$, und anschließend für den Außenbereich $r > R$, wo wir $\Phi^{(a)}(r)$ erhalten. Die Integrationskonstanten wählen wir so, dass $\Phi^{(i)}(r)$ and $r = R$ stetig in $\Phi^{(a)}(r)$ übergeht.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi^{(i)}}{dr} \right) &= 4\pi G \left(\rho_1 - \frac{\Delta\rho}{R} r \right) && / \times r^2 && / \int dr \\ r^2 \frac{d\Phi^{(i)}}{dr} &= 4\pi G \left(\rho_1 \frac{r^3}{3} - \frac{\Delta\rho}{R} \frac{r^4}{4} \right) + C_1^{(i)} && / \div r^2 && / \int dr \\ \Phi^{(i)}(r) &= 4\pi G \left(\rho_1 \frac{r^2}{6} - \frac{\Delta\rho}{R} \frac{r^3}{12} \right) - \frac{C_1^{(i)}}{r} + C_2^{(i)}. \end{aligned}$$

Das Potential $\Phi^{(a)}(r)$ für $r > R$ erhalten wir zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi^{(a)}}{dr} \right) &= 0 && / \times r^2 && / \int dr \\ r^2 \frac{d\Phi^{(a)}}{dr} &= C_1^{(a)} && / \div r^2 && / \int dr \\ \Phi^{(a)}(r) &= -\frac{C_1^{(a)}}{r} + C_2^{(a)}. \end{aligned}$$

Wir bestimmen die vier Integrationskonstanten $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$, $C_1^{(a)}$, und $C_2^{(a)}$ durch Randbedingungen für $r = 0$ und $r \rightarrow \infty$, die Stetigkeit bei $r = R$, und durch die Anwendung des Gauß'schen Satzes für $r > R$. Die Dichteverteilung $\rho(r)$ ist regulär für $r = 0$, daher erwarten wir dies auch für das Potential. Aus dieser Forderung folgt, dass $C_1^{(i)} = 0$ gelten muss. Für $r \rightarrow \infty$ soll das Potential verschwinden, also $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi^{(a)}(r) = 0$, woraus wir $C_2^{(a)} = 0$ ableiten können. Um $C_1^{(a)}$ zu bestimmen, wenden wir den Satz von Gauß für $r > R$ an:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\text{Kugel}} \vec{g} \cdot d\vec{A} &= \int_{\text{Kugel}} \operatorname{div} \vec{g} \, dV = -4\pi GM \\ 4\pi r^2 g(r) &= -4\pi GM. \end{aligned}$$

Mit $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ und mit Gleichung 2.167 für die r -Koordinate des Gradienten in Kugelkoordinaten folgt damit für $\Phi^{(a)}(r)$:

$$\Phi^{(a)}(r) = - \int dr g(r) = + \int dr \frac{GM}{r^2} = -\frac{GM}{r} + c.$$

Damit gilt für die Konstante $C_1^{(a)} = GM$. Die verbleibende Integrationskonstante $C_2^{(i)}$ bestimmen wir, indem wir die Stetigkeit von $\Phi(r)$ an der Stelle $r = R$ fordern:

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(R) &= \Phi^{(a)}(R) \\ 4\pi G \left(\rho_1 \frac{R^2}{6} - \frac{\Delta\rho}{R} \frac{R^3}{12} \right) + C_2^{(i)} &= -\frac{GM}{R}. \end{aligned}$$

Führen wir das Volumen $V = \frac{4}{3}R^3\pi$ einer Kugel mit dem Radius R ein, so finden wir für $C_2^{(i)}$:

$$C_2^{(i)} = -\frac{1}{R} \left[1 + \frac{V}{M} \left(\frac{\rho_1}{2} - \frac{\Delta\rho}{4} \right) \right].$$

Und somit erhalten wir für das gesuchte Potential

$$\Phi(r) = \begin{cases} \Phi^{(i)}(r) = VG \left[\rho_1 \frac{r^2}{2R^3} - \Delta\rho \frac{r^3}{4R^4} \right] - \frac{GM}{R} \left[1 + \frac{V}{M} \left(\frac{\rho_1}{2} - \frac{\Delta\rho}{4} \right) \right] & , r \leq R \\ \Phi^{(a)}(r) = -\frac{GM}{r} & , r > R \end{cases}$$

Wir berechnen noch den Gradienten des Potentials, also die Gravitationsbeschleunigung $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$. Wegen 2.167 und $\Phi = \Phi(r)$ ist nur die r -Koordinate ungleich Null, für die wir folgenden Ausdruck erhalten:

$$g_r(r) = \begin{cases} -VG \left[\rho_1 \frac{r}{R^3} - \Delta\rho \frac{3r^2}{4R^4} \right] & , r \leq R \\ -\frac{GM}{r^2} & , r > R \end{cases}$$

Kapitel 3

Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Begriffsbildungen

Eine Differentialgleichung (DGL) ist ein Zusammenhang zwischen einer unbekanntem Funktion und ihren Ableitungen. Handelt es sich bei der gesuchten Funktion um eine Funktion, die nur von *einer* unabhängigen Variable abhängt, dann spricht man von einer *gewöhnlichen* DGL. Sei etwa $y = y(x)$ die gesuchte Funktion und y' , y'' usw. ihre Ableitungen dann beschreiben die nachfolgenden Gleichungen gewöhnliche DGL

$$y' + y^2 = x \quad \text{oder} \quad y'' - \sqrt{y'} + e^y = \sin x \quad \text{oder} \quad y'''y - (y'')^2 + y'y = e^{-x}.$$

Bei einer *partiellen* DGL ist hingegen die gesuchte Funktion f eine Funktion von *mehreren* unabhängigen Variablen. Es werden also die partiellen Ableitungen miteinander in Zusammenhang gesetzt wie in dem nachfolgendem Beispiel:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = x y.$$

In dieser Vorlesung wollen wir uns auf die Lösung von *gewöhnlichen* DGL beschränken. Es sei jedoch erwähnt, dass sich sehr viele Zusammenhänge in der Physik durch partielle DGL ausdrücken lassen. Beispiele wäre etwa die Diffusions- und Wärmeleitungsgleichung, die Wellengleichung oder die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik.

3.1.1 Motivation

Es gibt jedoch auch sehr viele Zusammenhänge in der Physik, die auf eine *gewöhnliche* DGL führen. Paradebeispiel dafür ist etwa die Newton'schen Bewegungsgleichung

$$my''(t) = F(t). \quad (3.1)$$

Hier gilt ja bekanntermaßen, dass Masse mal Beschleunigung ($y''(t)$) gleich der wirkenden Kraft (F) ist. Je nach Wahl der wirkenden Kraft führt diese Gleichung auf eine gleichförmige Bewegung ($F = 0$), oder eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ($F = -mg$), oder eine Schwingung ($F = -ky$). Wie man die Lösungen dieser Gleichungen systematisch berechnen kann, werden wir in dem Kapitel 3.3 sehen.

Zuvor wenden wir uns aber einfacheren DGL zu, bei denen nur die 1. Ableitung der Funktion vorkommt, die man entsprechend DGL erster Ordnung bezeichnet. Auf eine solche DGL stößt man zum Beispiel bei der Beschreibung des radioaktiven Zerfalls, bei dem ja die zeitliche Änderung der Teilchenanzahl dN/dt der gerade vorhandenen Teilchenanzahl proportional ist, was man wie folgt ausdrückt

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t). \quad (3.2)$$

3.1.2 Geometrische Interpretation

Eine besonders einfache DGL 1. Ordnung könnte etwa wie folgt aussehen

$$y'(x) = 1. \quad (3.3)$$

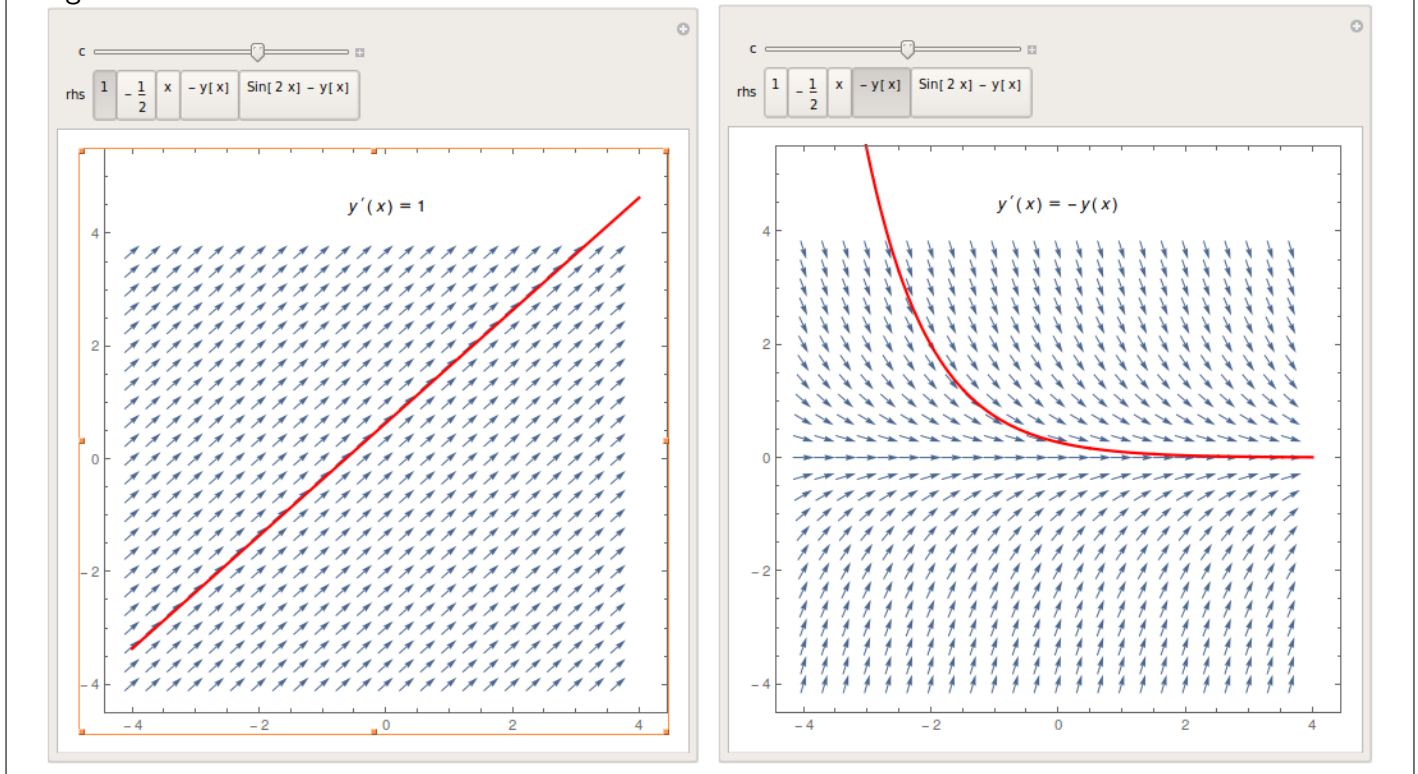
Jedem Punkt in der (x, y) -Ebene ist mit dieser Gleichung somit eine Richtung zugeordnet, in unserem einfachen Beispiel ist das immer eine konstante Richtung mit der Steigung +1 also. Dieses *Richtungsfeld* ist im linken Teil der Abbildung CDF 10 durch die blauen Pfeile dargestellt. Eine Lösung $y(x)$ der DGL 3.3 muss also diesen vorgegeben Richtungen folgen. In diesem Fall lässt sich die DGL sehr einfach lösen, indem wir beide Seiten der Gleichung 3.3 integrieren. Die linke Seite ergibt dann $y(x)$ und die rechte Seite x , also

$$y(x) = x + C, \quad (3.4)$$

wobei wir noch die beliebige reelle *Integrationskonstante* C berücksichtigt haben. Wir bemerken also, dass die Lösung von 3.3 nicht nur auf eine einzige Kurve führt, sondern zu einer ganzen *Kurvenschar* mit dem Parameter C . Um eine spezielle Lösung ermitteln zu können benötigt man noch eine zusätzliche Angabe, etwa einen Punkt in der Ebene, durch den die Lösung verlaufen soll: $(x_0, y(x_0))$. Diese Bedingung nennt man auch *Anfangsbedingung*.

CDF 10. Richtungsfeld einer DGL [cdf10_Richtungsfeld.cdf](#)

Das Richtungsfeld einer DGL wird dargestellt und Lösungen zu verschiedenen Anfangsbedingungen können ausgewählt werden.



Im rechten Teil der Abbildung zur CDF 10 ist noch das Richtungsfeld einer weiteren einfachen DGL dargestellt

$$y'(x) = -y(x). \quad (3.5)$$

Diese DGL weist die gleiche Struktur auf, die uns schon beim radioaktiven Zerfall (siehe oben) begegnet ist. Wie wir in Kapitel 3.2 lernen werden, hat diese DGL die Lösung $y(x) = C e^{-x}$, und wie man aus der obigen Abbildung folgt eine spezielle Lösung (rote Kurve) wieder dem durch die DGL vorgegebenem Richtungsfeld.

3.1.3 Klassifikation von DGL

Bevor wir uns nun konkreten Lösungsverfahren von DGL zuwenden, wollen wir eine Reihe von Begriffen einführen, die uns dabei helfen sollen DGL einzuteilen.

Gewöhnlich. Eine DGL, bei der die gesuchte Funktion nur von einer unabhängigen Variable abhängt, nennt man gewöhnlich. Wir beschränken uns in dieser Vorlesung auf solche gewöhnliche DGL.

Partiell. Eine DGL, bei der die gesuchte Funktion von mehreren unabhängigen Variablen abhängt, bezeichnet man als partielle DGL.

Die Ordnung der DGL ist durch die höchste vorkommende Ableitung definiert.

$$\begin{aligned} y' + y^2 &= x && \text{(DGL 1. Ordnung)} \\ y'' - \sqrt{y'} + e^y &= \sin x && \text{(DGL 2. Ordnung)} \\ y'''y - (y'')^2 + y'y &= e^{-x}. && \text{(DGL 3. Ordnung)} \end{aligned}$$

Linear. Eine lineare DGL ist linear in der unbekannteten Funktion $y(x)$ und in all ihren Ableitungen $y'(x), y''(x), \dots$. Beispiele für lineare DGL wären etwa

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + \sin x \\ x y'' + y' \sin x + e^x y &= x^3 \\ x^2 y''' + y' \cos x + e^{-x^2} y &= 0 \end{aligned}$$

Allgemein lässt sich jede lineare DGL der Ordnung n in folgender Weise schreiben

$$L^{(n)}(x)y(x) = b(x), \quad (3.6)$$

wobei die Wirkung des *lineare Differentialoperators* $L^{(n)}(x)$ auf die Funktion $y(x)$ wie folgt definiert ist

$$\underbrace{\left[\sum_{k=0}^n f_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \right]}_{=L^{(n)}(x)} y(x) = f_0(x)y(x) + f_1(x)y'(x) + f_2(x)y''(x) + \dots + f_n(x)y^{(n)}(x). \quad (3.7)$$

Nichtlinear. DGL, die *nicht* in der Form 3.6 geschrieben werden können, nennt man nichtlinear. Einige Beispiele für nichtlineare DGL sind etwa:

$$\begin{aligned} y y' &= 0 \\ y' + \sin y &= x \\ y'' + y' + y^2 &= 2 \end{aligned}$$

Explizit / Implizit. DGL, bei denen man die höchste Ableitung $y^{(n)}$ als Funktion von $y^{(n-1)}, \dots, y$ und x ausdrücken kann, nennt man explizit. Ist das nicht möglich bezeichnet man die DGL als implizit,

wie in einem der beiden unten angeführten Beispiele.

$$\begin{aligned} y' + y^2 &= x && \text{(explizit)} \\ \sin(y') + y' + y &= x && \text{(implizit)} \end{aligned}$$

Insbesondere ist jede lineare DGL auch explizit.

Homogen / Inhomogen. Die Unterscheidung zwischen einer homogenen bzw. einer inhomogenen DGL ist wie folgt definiert

$$\begin{aligned} f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) &= 0 && \text{(homogen)} \\ f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) &= b(x) && \text{(inhomogen)} \end{aligned}$$

3.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir wollen uns in dieser Vorlesung auf lineare Differentialgleichungen beschränken. Im Gegensatz zu nichtlinearen DGL haben lineare DGL den Vorteil, dass (i) immer eine Lösung existiert, dass (ii) die gefundene Lösung auch eindeutig ist (bei zusätzlicher Angabe einer Anfangsbedingung), und dass es (iii) ein Standardverfahren zur Lösung gibt. Einen kleinen Einblick in nichtlineare DGL und verschiedene Lösungsansätze für diese DGL bietet das Buch von Lang und Pucker.

Wir betrachten hier also *lineare* DGL *erster* Ordnung, die sich allgemein in folgender Form anschreiben lassen

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x). \quad (3.8)$$

Bevor wir uns der allgemeinen Lösung der Gleichung 3.8 zuwenden, betrachten wir 2 Spezialfälle.

3.2.1 Einfaches Integral

Ist die Funktion $a(x) = 0$, so vereinfacht sich die Gleichung 3.8 zu

$$y'(x) = b(x). \quad (3.9)$$

und die Lösung kann durch einfaches Integrieren gewonnen werden, d.h. beide Seiten der Gleichung 3.9 werden integriert

$$\int y'(x)dx = \int b(x)dx + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \underbrace{\int b(x)dx}_{=B(x)} + C.$$

Hierbei haben wir berücksichtigt, dass bei dem unbestimmten Integral noch eine beliebige Integrationskonstante C anfällt. Diese Konstante wird mithilfe der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ durch Einsetzen bestimmt und führt somit auf die spezielle Lösung:

$$y_0 = B(x_0) + C \quad \Rightarrow \quad C = y_0 - B(x_0) \quad \Rightarrow \quad y(x) = y_0 + B(x) - B(x_0).$$

Bsp. Wir lösen die DGL $y'(x) = \sin(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ nach dem obigen Schema:

$$B(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x, \quad B(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 - \cos x - (-1) = 2 - \cos x.$$

Durch Ableiten überprüfen wir leicht, dass tatsächlich $y'(x) = \sin x$ und $y(0) = 1$ gilt.

Alternativ können wir die DGL 3.9 auch integrieren, indem wir ein bestimmtes Integral bilden, und die Anfangsbedingung sofort berücksichtigen:

$$\int_{y_0}^{y(x)} y'(t) dt = \int_{x_0}^x b(t) dt \quad \Rightarrow \quad y(x) - y_0 = B(x) - B(x_0).$$

Wir finden natürlich wieder das gleiche Resultat. Da wir als obere Grenze des Integrals x bzw. $y(x)$ gesetzt haben, haben wir die Integrationsvariable in t umbenannt. Das obige Beispiel lautet dann in dieser Vorgehensweise:

$$\int_{y_0}^{y(x)} y'(t) dt = \int_{x_0}^x \sin(t) dt \quad \Rightarrow \quad y(x) - \underbrace{y_0}_{=1} = -\cos t \Big|_0^x = -(\cos x - 1),$$

führt also natürlich wieder auf das schon bekannte Ergebnis $y(x) = 1 - \cos x - (-1) = 2 - \cos x$. Wir rechnen noch ein typisches Beispiel aus der Mechanik:

Bsp. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung, sei konstant, und zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Geschwindigkeit v_0 , also:

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad \text{und} \quad v(0) = v_0.$$

Diese Gleichung ist von dem oben besprochenen Typ, und wir finden durch einfache Integration

$$\int_{v_0}^{v(t)} v'(\tau) d\tau = \int_0^t g d\tau \quad \Rightarrow \quad v(t) - v_0 = g(t - 0) \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + gt.$$

Wollen wir auch den zurückgelegten Weg $s(t)$ berechnen, müssen wir noch einmal integrieren, da ja gilt

$$\frac{ds}{dt} = v(t), \quad \text{und} \quad s(0) = s_0,$$

und wir finden

$$\int_{s_0}^{s(t)} s'(\tau) d\tau = \int_0^t (v_0 + g\tau) d\tau \Rightarrow s(t) - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

3.2.2 Homogener Fall

Wir betrachten nun einen weiteren Spezialfall der DGL 3.8 und nehmen an, dass die Funktion $b(x)$ verschwindet, wir untersuchen also eine lineare, homogene DGL erster Ordnung:

$$y'(x) = a(x)y(x). \quad (3.10)$$

Auch diese DGL kann nach einer einfachen Umformung leicht integriert werden. Dazu schreiben wir y' als $\frac{dy}{dx}$ und formen so um, dass alle Terme mit y links, und alle Terme mit x rechts stehen. Das führt auf die folgende Gleichung, die wir wieder durch beidseitiges Integrieren lösen:

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \underbrace{\int a(x)dx}_{=A(x)} + \tilde{C} \Rightarrow \ln y = A(x) + \tilde{C}.$$

Um die Funktion $y(x)$ zu erhalten, müssen wir nun noch "e hoch" beide Seiten der Gleichung bilden und finden

$$e^{\ln y} = e^{A(x) + \tilde{C}} \Rightarrow y(x) = e^{A(x)} \underbrace{e^{\tilde{C}}}_{=C} \Rightarrow y(x) = C e^{A(x)}.$$

Hierbei haben wir am Ende noch die beliebige Integrationskonstante von \tilde{C} auf C umbenannt, die aus der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ bestimmt werden kann.

Alternativ, und analog zur Vorgehensweise, die schon oben erläutert wurde, hätten wir die DGL auch mit bestimmten Integralgrenzen lösen können:

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx \Rightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^x a(t)dt \Rightarrow \ln y(x) - \ln y_0 = A(x) - A(x_0),$$

und durch Umformen $\ln y(x) - \ln y_0 = \ln \frac{y(x)}{y_0}$ und "e hoch"-Nehmen finden wir

$$e^{\ln \frac{y(x)}{y_0}} = e^{A(x) - A(x_0)} \Rightarrow \frac{y(x)}{y_0} = \frac{e^{A(x)}}{e^{A(x_0)}} \Rightarrow y(x) = y_0 \frac{e^{A(x)}}{e^{A(x_0)}} \Rightarrow$$

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x dt a(t)\right) \quad (3.11)$$

Bsp. Wir wenden die oben besprochene Vorgehensweise auf die folgende lineare, homogene DGL 1. Ordnung an:

$$y'(x) = (x^2 + 1)y(x), \quad \text{und} \quad y(0) = 2.$$

Verwenden wir die hergeleitete "Formel", so ergibt sich

$$A(x) = \int a(x)dx = \frac{x^3}{3} + x \Rightarrow y(x) = 2 \frac{e^{x^3/3+x}}{e^0} = 2e^{\frac{x^3}{3}+x}$$

Machen wir die Probe, indem wir die gefundene Funktion $y(x)$ ableiten, so finden wir, dass die DGL tatsächlich erfüllt ist, und auch der Anfangsbedingung ist durch unser $y(x)$ Genüge getan.

3.2.3 Allgemeine Lösung

Wir wenden uns nun der anfangs erwähnten allgemeinen Form 3.8 einer linearen DGL 1. Ordnung zu

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \quad (3.12)$$

wobei $a(x)$ und $b(x)$ stetige Funktionen sein sollen. Man kann auch für diese inhomogene Gleichung eine allgemeine und eindeutige Lösung ableiten (siehe auch Buch Lang-Pucker). Dazu wählt man einen Lösungsansatz, der sich von der homogenen Lösung 3.11 nur dadurch unterscheidet, dass der Vorfaktor eine Funktion $c(x)$ und keine Konstante ist:

$$y(x) = c(x) \exp\left(\int_{x_0}^x dt a(t)\right), \quad \text{mit} \quad c(x_0) = y_0. \quad (3.13)$$

Wir bilden die Ableitung von 3.13

$$y' = c'e^A + cA'e^A = c'e^A + cae^A,$$

und setzen in 3.12 ein und finden ein einfaches Integral für die noch unbekannte Funktion $c(x)$:

$$c'e^A + cae^A = a(ce^A) + b \Rightarrow c'(x) = b(x)e^{-A(x)}.$$

Damit ergibt sich für $c(x)$ unter Berücksichtigung von $c(x_0) = y_0$

$$c(x) = y_0 + \int_{x_0}^x ds b(s) e^{-A(s)}. \quad (3.14)$$

Die Kombination mit dem Ansatz 3.13 führt dann zur allgemeinen Form der Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x) \exp \left(\underbrace{\int_{x_0}^x dt a(t)}_{=A(x)} \right) = \underbrace{\left(y_0 + \int_{x_0}^x ds b(s) e^{-A(s)} \right)}_{=c(x)} e^{A(x)} \\ &= y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^x ds b(s) e^{A(x)-A(s)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Bsp. Wir suchen die Lösung der linearen DGL in der Form $y' = ay + b$,

$$y' = \frac{y}{x} + x^2 e^x \quad \text{und} \quad y(1) = 1.$$

Zunächst bestimmen wir das Integral von $a(x)$,

$$A(x) = \int_{x_0}^x dt a(t) = \int_1^x dt \frac{1}{t} = \ln x.$$

Damit erhalten wir nach Gleichung 3.15

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^x ds b(s) e^{A(x)-A(s)} \\ &= 1 e^{\ln x} + \int_1^x ds (s^2 e^s) e^{\ln x - \ln s} \\ &= x + x \int_1^x ds s e^s = x + x [(s-1)e^s]_1^x \\ &= x + (x^2 - x)e^x. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Wir bilden noch die Probe und verifizieren:

$$y(1) = 1 \quad \text{und} \quad y' = 1 + (x^2 + x - 1)e^x, \quad \frac{y}{x} = 1 + (x-1)e^x \quad \Rightarrow \quad 1 + (x^2 + x - 1)e^x = 1 + (x-1)e^x + x^2 e^x.$$

3.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung begegnen uns in sehr vielen Gebieten der Physik. Besonders häufig sind dabei DGL 2. Ordnung und hier wiederum DGL mit konstanten Koeffizienten, auf die wir uns in dieser Vorlesung beschränken wollen. Die wohl bekannteste Gleichung dieser Art ist die Schwingungsgleichung, die uns in der Mechanik als auch bei elektrischen Schwingkreisen

begegnet:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = b(t) \quad (3.17)$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dV}{dt}. \quad (3.18)$$

Die erste der beiden Gleichungen beschreibt die Schwingung $x(t)$ eines Federpendels mit der ungedämpften Kreisfrequenz $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (Federkonstante k und Masse m) und der Dämpfungskonstante γ , das durch die äußere Beschleunigung $b(t)$ angetrieben wird. Die zweite Gleichung beschreibt den zeitlich veränderlichen Stromfluss $I(t)$ in einem elektrischen Schwingkreis bestehend aus einer Spule mit der Induktivität L , einem Kondensator mit der Kapazität C und einem Ohm'schen Widerstand R . Die rechte Seite der Gleichung berücksichtigt eine etwaige Spannungsquelle $V(t)$.

Wir besprechen zunächst die Lösung der homogenen Gleichung ($b(t) = 0$ bzw. $\frac{dV}{dt} = 0$) in Kapitel 3.3.1 und anschließend den inhomogenen Fall ($b(t) \neq 0$ bzw. $\frac{dV}{dt} \neq 0$) in Kapitel 3.3.3.

3.3.1 Homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Wir beschäftigen uns somit zunächst mit einer DGL der folgenden Form

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{d^2}{dx^2} + a \frac{d}{dx} + b \right)}_{=L^{(2)}} y = 0, \quad (3.19)$$

wobei a und b reelle Konstanten sind, und der entsprechende Differentialoperator mit $L^{(2)}$ abgekürzt wurde. Man kann zeigen, dass diese Gleichung *zwei linear unabhängige* Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ besitzt, die das sogenannte *Fundamentalsystem* bilden. Aufgrund der Linearität des Differentialoperators ist mit $y_1(x)$ und $y_2(x)$ auch jede Linearkombination dieser beiden Funktionen, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, eine Lösung der DGL 3.19

$$L^{(2)}(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) = c_1 \underbrace{L^{(2)} y_1(x)}_{=0} + c_2 \underbrace{L^{(2)} y_2(x)}_{=0} = 0.$$

Die beiden Konstanten c_1 und c_2 werden durch zwei Anfangsbedingungen (bzw. Randbedingungen) festgelegt. Da es sich bei 3.19 um eine DGL 2. Ordnung handelt, sind zwei Bedingungen notwendig um die Lösung eindeutig festzulegen, etwa der Wert der Funktion und deren 1. Ableitung an einem Punkt x_0 , also $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y'_0$.

Wie berechnet man nun das Fundamentalsystem der DGL 3.19? Wir zeigen den Lösungsweg zunächst anhand eines Beispiels:

Bsp. Wir suchen die Lösung der folgenden DGL, die durch die zwei angegebenen Anfangsbedingungen festgelegt ist.

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Wir können das Fundamentalsystem durch Ansatz $y = e^{qx}$ bestimmen. Mit $y' = qe^{qx}$ und $y'' = q^2e^{qx}$ erhalten nach Einsetzen in die DGL

$$(q^2 - 2q - 3) \underbrace{e^{qx}}_{\neq 0} = 0.$$

Da die Exponentialfunktion ungleich Null ist, muss der Ausdruck in runden Klammern verschwinden. Die Lösung dieses quadratischen Polynoms in q ergibt die beiden Lösungen $q_1 = -1$ und $q_2 = 3$. Damit lauten die beiden Funktionen des Fundamentalsystems

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{3x},$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}.$$

Die noch zu bestimmenden Konstanten c_1 und c_2 erhalten wir aus den beiden Anfangsbedingungen und dem daraus resultierenden linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} &\Rightarrow y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(x) = -c_1e^{-x} + 3c_2e^{3x} &\Rightarrow y'(0) = -c_1 + 3c_2 = 2, \end{aligned}$$

das folgende Lösung hat: $c_1 = \frac{1}{4}$ und $c_2 = \frac{3}{4}$. Damit erhalten wir die gesuchte Lösung zu

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{3}{4}e^{3x}.$$

Ein entscheidender Punkt in dem oben dargelegten Lösungsverfahren ist, dass die beiden Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ des Fundamentalsystems *linear unabhängig* sind. Wie können das überprüfen? Ähnlich wie mit Vektoren, die wir zeilenweise in eine Determinante schreiben, um sie so auf lineare Abhängigkeit (=Verschwinden der Determinanten) zu testen, berechnen wir auch für Funktionen eine Determinante, die sogenannte *Wronski-Determinante*.

Wronski-Determinante. Für einen Satz von n Funktionen $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ ist die Wronski-Determinante W eine n -Determinante, die folgendermaßen definiert ist:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (3.20)$$

Die i -te Zeile von W wird somit aus den $(i-1)$ -ten Ableitungen $\{f_1^{(i-1)}(x), f_2^{(i-1)}(x), \dots, f_n^{(i-1)}(x)\}$ gebildet. Es gilt nun der wichtige Satz: **Sind die Funktionen $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ linear abhängig, so verschwindet die Wronski-Determinante.** Dazu einige Beispiele:

Bsp 1. Wir berechnen die Wronski-Determinante für die Funktionen $\{1, x, x^2\}$:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Bsp 2. Wir berechnen die Wronski-Determinante für die Funktionen $\{1, x, (x-1)^2, (x+1)^2\}$:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & (x-1)^2 & (x+1)^2 \\ 0 & 1 & 2(x-1) & 2(x+1) \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bsp 3. Wir berechnen die Wronski-Determinante für die Funktionen $\{e^{-x}, e^{3x}\}$:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{2x} + e^{2x} = 4e^{2x} \neq 0.$$

Wir schließen daraus, dass die Funktionen im Bsp 1 linear unabhängig sind, während die Funktionen aus Bsp 2 linear abhängig sind. Wie das Bsp 3 zeigt sind die Funktionen des Fundamentalsystems aus unserem obigen Beispiel zur homogen DGL erster Ordnung tatsächlich linear unabhängig.

Wir verallgemeinern nun die Lösung der DGL 3.19, indem wir den gleichen Ansatz $y(x) = e^{qx}$ in die DGL einsetzen:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \Rightarrow \quad (q^2 + aq + b)e^{qx} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 + aq + b = 0.$$

Das quadratische Polynom in q hat dabei im allgemeinen die beiden Lösungen

$$q_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{und} \quad q_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (3.21)$$

Dabei müssen wir die folgenden drei Fälle unterscheiden:

(i) $\frac{a^2}{4} - b > 0$. Die beiden Lösungen $q_1 \neq q_2$ sind reelle Zahlen, und die Funktionen $y_1(x) = e^{q_1 x}$ und $y_2(x) = e^{q_2 x}$ sind linear unabhängig und bilden das Fundamentalsystem zur Lösung der DGL.

(ii) $\frac{a^2}{4} - b < 0$. Bei den Lösungen $q_1 \neq q_2$ handelt es sich um ein komplex konjugiertes Paar, das wir folgendermaßen anschreiben wollen

$$q_1 = -\frac{a}{2} + i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} = \gamma + ik \quad (3.22)$$

$$q_2 = -\frac{a}{2} - i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} = \gamma - ik. \quad (3.23)$$

Somit lautet ein linear unabhängiges Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^{q_1 x} = e^{\gamma x} e^{ikx} = e^{\gamma x} [\cos(kx) + i \sin(kx)] \quad (3.24)$$

$$y_2(x) = e^{q_2 x} = e^{\gamma x} e^{-ikx} = e^{\gamma x} [\cos(kx) - i \sin(kx)] \quad (3.25)$$

Wenn wir an reellen Lösungen interessiert sind, können wir auch eine andere Linearkombination der Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ als Fundamentalsystem wählen, nämlich

$$\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}[y_1(x) + y_2(x)] = e^{\gamma x} \cos(kx) \quad (3.26)$$

$$\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{2i}[y_1(x) - y_2(x)] = e^{\gamma x} \sin(kx), \quad (3.27)$$

das vor allem bei der Beschreibung von (gedämpften) Schwingungen von Vorteil ist. Wir können leicht zeigen, dass die Wronski-Determinante für $\{\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)\}$ tatsächlich nicht verschwindet:

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} e^{\gamma x} \cos(kx) & e^{\gamma x} \sin(kx) \\ e^{\gamma x} [\gamma \cos(kx) - k \sin(kx)] & e^{\gamma x} [\gamma \sin(kx) + k \cos(kx)] \end{vmatrix} \\ &= e^{2\gamma x} \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ \gamma \cos(kx) - k \sin(kx) & \gamma \sin(kx) + k \cos(kx) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\gamma x} k \neq 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

(iii) $\frac{a^2}{4} - b = 0$. In diesem Fall gilt $q \equiv q_1 = q_2$ und wir erhalten nur eine Funktion $y_1(x) = e^{q x}$, die alleine noch kein Fundamentalsystem bildet, weshalb wir noch eine zweite, linear unabhängige Lösung

benötigen. Dazu schreiben wir die DGL 3.19 in der Form

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b\right)y = \left(\frac{d}{dx} - q\right)\underbrace{\left(\frac{d}{dx} - q\right)y}_{=y_1(x)} = 0. \quad (3.29)$$

Neben $y_1(x) = e^{qx}$ muss daher auch die Lösung der folgenden DGL

$$\left(\frac{d}{dx} - q\right)y = y_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \underbrace{q}_{=a}y + \underbrace{e^{qx}}_{=b} \quad (3.30)$$

unsere ursprüngliche DGL erfüllen. Gleichung 3.30 ist eine lineare, inhomogene DGL erster Ordnung vom allgemeinen Typ 3.12 mit der Lösung 3.15. Mit $a(x) = q$ und $b(x) = e^{qx}$ erhalten wir:

$$y_2(x) = y_0e^{qx} + \int_{x_0}^x ds e^{qs} e^{qx-qs} = y_0e^{qx} + e^{qx}(x - x_0). \quad (3.31)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $y(0) = 0$ wählen und erhalten damit $y_2(x) = xe^{qx}$. Wir überprüfen leicht, dass $y_2(x)$ die DGL 3.29 tatsächlich löst, und auch dass $\{y_1(x), y_2(x)\}$ linear unabhängig sind und somit das gesuchte Fundamentalsystem bilden:

$$W = \begin{vmatrix} e^{qx} & xe^{qx} \\ qe^{qx} & (1+xq)e^{qx} \end{vmatrix} = (1+qx)e^{2qx} - qxe^{2qx} = e^{2qx} \neq 0.$$

3.3.2 Homogene Schwingungsgleichung

Als eine in der Physik sehr wichtige Anwendung betrachten wir eine freie (=keine äußere Kraft) und harmonische (=rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung) Schwingung eines Federpendels. Aus der Newton'schen Bewegungsgleichung leitet sich dann die folgende Schwingungsgleichung ab:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0. \quad (3.32)$$

Hier ist $x(t)$ die Auslenkung des Pendel aus der Ruhelage, $\omega_0 > 0$ die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung, die sich aus der Federkonstante k und der Masse des Pendels berechnet, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, und $\gamma \geq 0$ ist eine Dämpfungskonstante.

Ungedämpfte Schwingung. Wir betrachten zunächst eine ungedämpfte Schwingung, also den Spezialfall, dass $\gamma = 0$ ist:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0. \quad (3.33)$$

Der Ansatz e^{qt} führt auf

$$q^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = +i\omega_0, q_2 = -i\omega_0$$

und auf die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{+i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Wählen wir als Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$, so erhalten wir folgende Lösung

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = i\omega_0 c_1 - i\omega_0 c_2 = 0 &\Rightarrow c_1 = c_2 \\ x(0) = c_1 + c_2 = x_0 &\Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}, \end{aligned}$$

und die Lösung vereinfacht sich zu

$$x(t) = \frac{x_0}{2} (e^{+i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = x_0 \cos(\omega_0 t). \quad (3.34)$$

Gedämpfte Schwingung. Eine gedämpfte Schwingung wird durch folgende DGL beschrieben

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (3.35)$$

und als Anfangsbedingungen wählen wir wie schon oben $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$. Der übliche Ansatz $x(t) = e^{qt}$ führt zunächst auf die quadratische Gleichung

$$q^2 + 2\gamma q + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (3.36)$$

Analog zur Vorgehensweise nach Gleichung 3.21 müssen wir auch hier wieder die folgenden drei Fälle unterscheiden:

(i) Kriechfall: $\gamma > \omega_0$. Hierbei handelt es sich um keine eigentliche Schwingung, da die beiden Lösungen q_1 und q_2 reelle Zahlen sind. Die allgemeine Lösung lautet $x(t) = c_1 e^{q_1 t} + c_2 e^{q_2 t}$ und die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen führt zu

$$c_1 = -\frac{q_2 x_0}{q_1 - q_2} = -\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right) \frac{x_0}{2}, \quad c_2 = \frac{q_1 x_0}{q_1 - q_2} = \left(1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}\right) \frac{x_0}{2}, \quad (3.37)$$

(ii) Schwingfall: $\omega_0 > \gamma$. Für diesen Fall wird der Wurzel Ausdruck in 3.36 imaginär und wir schreiben

$$q_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (3.38)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) e^{-\gamma t}, \quad (3.39)$$

und die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen führt zu

$$c_1 = \frac{x_0}{2} \left(1 - i\frac{\gamma}{\omega}\right), \quad c_2 = \frac{x_0}{2} \left(1 + i\frac{\gamma}{\omega}\right). \quad (3.40)$$

Nach Einsetzen von c_1 und c_2 und Umwandeln von $e^{i\omega t}$ in die Winkelfunktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ erhalten wir schließlich für $x(t)$:

$$x(t) = x_0 \left[\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t) \right] e^{-\gamma t} \quad (3.41)$$

(iii) Aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \gamma$. Für diesen Grenzfall ist $q_1 = q_2 = -\gamma$ und nach Gleichung 3.31 schreiben wir die allgemeine Lösung als

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t}. \quad (3.42)$$

Die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen führt zu

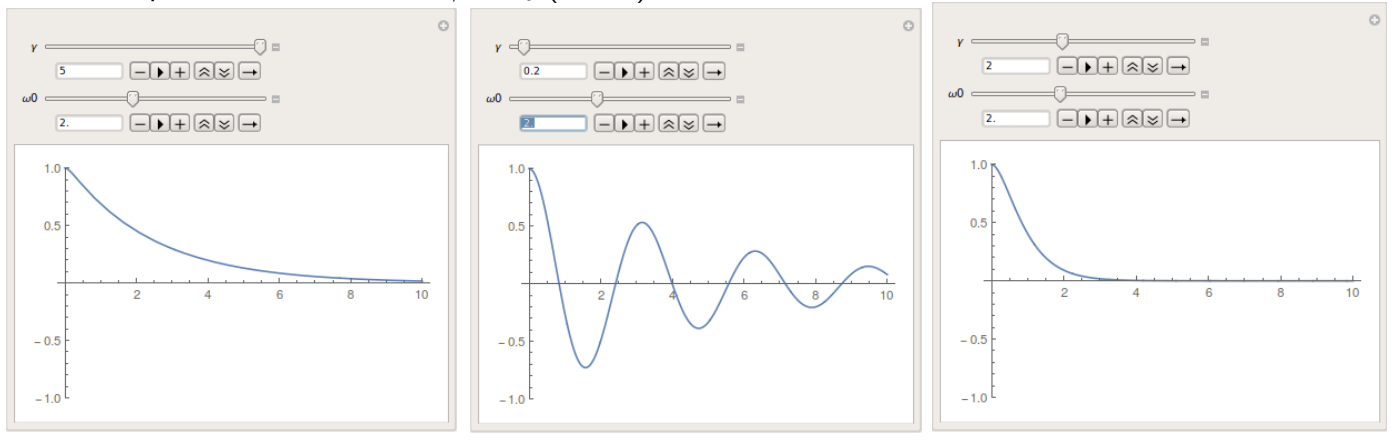
$$c_1 = x_0, \quad c_2 = x_0 \gamma, \quad (3.43)$$

und damit nimmt die spezielle Lösung folgende Gestalt an:

$$x(t) = x_0 (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}. \quad (3.44)$$

CDF 11. Freie gedämpfte Schwingung [cdf11_Schwingungsgleichung.cdf](#)

Gedämpfte Schwingung für $x_0 = 1$ und (i) den Kriechfall $\gamma > \omega_0$ (links), den Schwingfall $\gamma < \omega_0$ (Mitte) bzw. den aperiodischen Grenzfall $\gamma = \omega_0$ (rechts).



3.3.3 Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Wir wollen nun auf der rechten Seite der DGL 3.19 auch eine Funktion $g(x)$ zulassen

$$y(x)'' + ay(x)' + by(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{d^2}{dx^2} + a \frac{d}{dx} + b \right)}_{=L^{(2)}} y(x) = g(x), \quad (3.45)$$

das heißt, wir behandeln nun eine *inhomogene* lineare DGL zweiter Ordnung, wobei a und b weiterhin reelle Konstanten seien. Man kann zeigen, dass die Lösung dieser Gleichung folgende Form annimmt

$$y(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad (3.46)$$

wobei $\{y_1(x), y_2(x)\}$ das Fundamentalsystem der entsprechenden *homogenen* DGL 3.19 darstellen und $y_0(x)$ eine sogenannte *partikuläre Lösung* der DGL 3.45 ist. Weil $L^{(2)}y_0 = g$ und $L^{(2)}y_{1,2} = 0$ gilt, folgt nämlich daraus

$$L^{(2)} [y_0(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = \underbrace{L^{(2)}y_0(x)}_{=g(x)} + c_1 \underbrace{L^{(2)}y_1(x)}_{=0} + c_2 \underbrace{L^{(2)}y_2(x)}_{=0} = g(x)$$

In der Praxis geht man bei der Lösung der inhomogenen DGL 3.45 wie folgt vor:

- (1) Bestimmung des Fundamentalsystems $\{y_1(x), y_2(x)\}$ der homogenen DGL.
- (2) Bestimmung einer speziellen (beliebigen) Lösung der inhomogenen DGL.
- (3) Bestimmung der Integrationskonstanten c_1 und c_2 der allgemeinen Lösung 3.46.

Bsp. Wir demonstrieren diesen Lösungsweg anhand der folgenden DGL

$$y'' - 2y' - 3y = 5 \cos(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Das Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y'' - 2y' - 3y = 0$ haben wir bereits in dem Kapitel 3.3.1 ermittelt:

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{3x},$$

womit Punkt (1) abgehakt ist. Die kritische Stelle ist nun der Punkt (2). In diesem Beispiel versuchen wir es mit einem Ansatz für die partikuläre Lösung in der Form $y_0(x) = \alpha \sin(2x) + \beta \cos(2x)$. Setzen wir diesen Ansatz und

$$y_0'(x) = 2\alpha \cos(2x) - 2\beta \sin(2x), \quad y_0''(x) = -4\alpha \sin(2x) - 4\beta \cos(2x)$$

in die DGL ein so finden wir

$$-4\alpha \sin(2x) - 4\beta \cos(2x) - 4\alpha \cos(2x) + 4\beta \sin(2x) - 3\alpha \sin(2x) - 3\beta \cos(2x) = 5 \cos(2x).$$

Da die Funktionen $\sin(2x)$ und $\cos(2x)$ linear unabhängig sind können wir die Koeffizienten vergleichen und erhalten ein lineares Gleichungssystem für α und β

$$\begin{aligned} -7\alpha + 4\beta &= 0 \\ -4\alpha - 7\beta &= 5 \end{aligned}$$

mit der Lösung $\alpha = -\frac{4}{13}$ und $\beta = -\frac{7}{13}$. Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(x) = -\frac{4}{13} \sin(2x) - \frac{7}{13} \cos(2x) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Schließlich wenden wir im Punkt (3) die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \frac{20}{13} \\ -c_1 + 3c_2 &= \frac{34}{13}, \end{aligned}$$

das die Lösung $c_1 = \frac{1}{2}$ und $c_2 = \frac{27}{26}$ besitzt. Damit können wir schließlich die Lösung der DGL anschreiben

$$y(x) = -\frac{4}{13} \sin(2x) - \frac{7}{13} \cos(2x) + \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{27}{26} e^{3x}.$$

Bsp. Wir betrachten ein weiteres Beispiel

$$y'' + y' - 6y = -6x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Für das Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y'' + y' - 6y$ erhalten wir,

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-3x},$$

womit Punkt (1) abgehakt ist. In diesem Beispiel versuchen wir es mit einem Ansatz für die partikuläre Lösung in der Form $y_0(x) = a + bx + cx^2$. Setzen wir diesen Ansatz und

$$y_0'(x) = b + 2cx, \quad y_0''(x) = 2c$$

in die DGL ein so finden wir

$$2c + b + 2cx - 6a - 6bx - 6cx^2 = -6x^2.$$

Da x beliebig ist, können wir die Koeffizienten von x^0 , x^1 und x^2 vergleichen und finden die drei Gleichungen

$$-6a + b + 2c = 0, \quad -6b + 2c = 0, \quad -6c = -6$$

Daraus lesen wir ab

$$c = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad a = \frac{7}{18}$$

Damit erhalten wir die die partikuläre Lösung

$$y_0(x) = \frac{7}{18} + \frac{1}{3}x + x^2,$$

und die allgemeine Lösung nimmt folgende Gestalt an:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{7}{18} + \frac{1}{3}x + x^2.$$

Berücksichtigen wir schließlich noch die beiden Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

$$0 = c_1 + c_2 + \frac{7}{18}, \quad 1 = 2c_1 - 3c_2 + \frac{1}{3},$$

finden wir

$$c_1 = -\frac{1}{10}, \quad c_2 = -\frac{13}{45}.$$

3.3.4 Inhomogene Schwingungsgleichung

Wir betrachten schließlich die für die Physik sehr wichtige Erweiterung der homogenen Schwingungsgleichung 3.32 auf den inhomogenen Fall. Konkret wollen wir den Oszillator periodisch mit einer Frequenz Ω anregen. Wir betrachten also einen *periodisch getriebenen, harmonischen Oszillator*, der durch folgende DGL beschrieben wird:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = a_0 \cos(\Omega t). \quad (3.47)$$

Wie in Kapitel 3.3.3 ausgeführt, setzt sich die Lösung von 3.47 zusammen aus einer partikulären Lösung $x_p(t)$ und der Lösung der homogenen DGL $x_h(t)$, also

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t). \quad (3.48)$$

Als Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir eine periodische Funktion mit der gleichen Frequenz Ω wie im inhomogenen Teil der DGL,

$$x_p(t) = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t), \quad (3.49)$$

mit noch zu bestimmenden, reellen Koeffizienten A und B . Einsetzen von 3.49 sowie dessen erster und zweiter Ableitung

$$\dot{x}_p(t) = A\Omega \cos(\Omega t) - B\Omega \sin(\Omega t) \quad (3.50)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -A\Omega^2 \sin(\Omega t) - B\Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (3.51)$$

in die DGL 3.47 führt dann über einen Koeffizientenvergleich auf das folgende lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten A und B :

$$-(\Omega^2 - \omega_0^2)A - 2\gamma\Omega B = a_0 \quad (3.52)$$

$$2\gamma\Omega A - (\Omega^2 - \omega_0^2)B = 0 \quad (3.53)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems führt auf die folgenden Ausdrücke für A und B :

$$A = -\frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} a_0, \quad B = -\frac{2\gamma\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} a_0. \quad (3.54)$$

Für ein $\gamma > 0$ klingt die homogene Lösung aufgrund der Exponentialfunktion $e^{-\gamma t}$ nach einer Zeit $t \gg \frac{1}{\gamma}$ ab. Das bedeutet, dass nach einer sogenannten *Einschwingzeit*, die Lösung von der partikulären Lösung dominiert wird

$$x(t) \approx A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t) \quad \left(t \gg \frac{1}{\gamma} \right), \quad (3.55)$$

die eine Schwingung mit der Frequenz Ω und den konstanten Amplituden A und B beschreibt.

Alternativ hätten wir die Lösung der partikulären Lösung auch noch ein wenig einfacher erhalten können, wenn wir anstelle des reellen Ansatzes 3.49, einen komplexen Ansatz gewählt hätten,

$$x_p(t) = A e^{i\Omega t}, \quad (3.56)$$

wobei A nun eine komplexe Amplitude darstellt, $A = |A|e^{i\delta}$, mit der Lösung

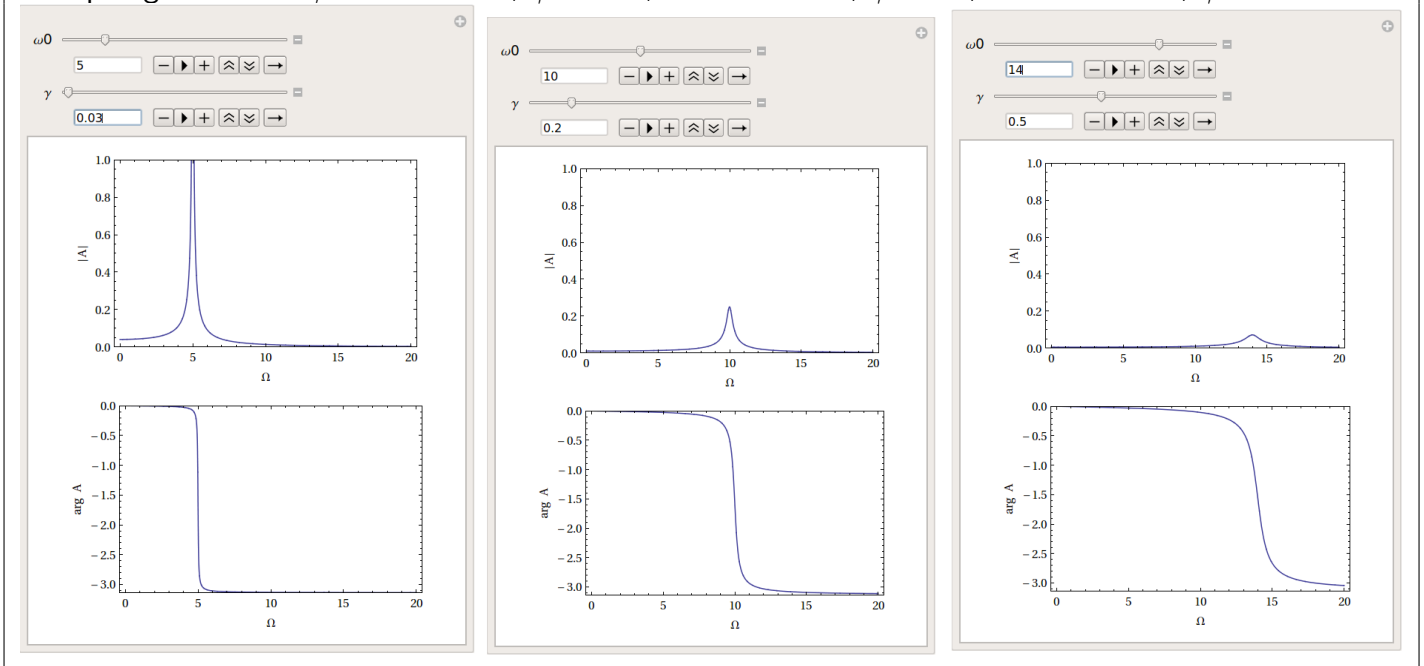
$$A = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}, \quad |A| = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \quad (3.57)$$

Der Betrag der Amplitude $|A|$ sowie deren Phase ist in CDF 12 dargestellt und zeigt die Abhängigkeit der maximalen Amplitude für den Resonanzfall bei verschiedenen großen Werten für die Dämpfung γ .

Ebenfalls dargestellt ist das komplexe Argument von A also der Phasenwinkel.

CDF 12. Erzwungene gedämpfte Schwingung `cdf12_Erzwungene_Schwingung.cdf`

Erzwungene, gedämpfte Schwingung für drei exemplarische Parameterwerte für die Frequenz Ω und die Dämpfungskonstante γ . Links: $\Omega = 5$, $\gamma = 0.03$, Mitte: $\Omega = 10$, $\gamma = 0.2$, rechts: $\Omega = 14$, $\gamma = 0.5$.



Kapitel 4

Fourierreihen

Als *Fourierreihe* (nach Joseph Fourier) bezeichnet man die Reihenentwicklung einer periodischen, abschnittsweise stetigen Funktion $f(x)$ in eine Funktionenreihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen.

$$FR(f) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad (4.1)$$

Die *Fourier-Analyse* einer Funktion $f(x)$, das heißt, die Bestimmung der *Fourierkoeffizienten* a_n und b_n ist in vielen Wissenschafts- und Technikzweigen von außerordentlicher praktischer Bedeutung. Die Anwendungen reichen von der Physik (Akustik, Optik, Gezeiten, Astrophysik) über viele Teilgebiete der Mathematik (Zahlentheorie, Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie), die Signalverarbeitung und Kryptographie bis zu Ozeanographie und Wirtschaftswissenschaften. Je nach Anwendungszweig erfährt die Zerlegung vielerlei Interpretationen. In der Akustik ist sie beispielsweise die Frequenz-Transformation des Schalls in Oberschwingungen. ¹

4.1 Motivation: Schwingende Saite

Wir wollen die Fourierreihen anhand des Problems einer schwingenden Saite motivieren. Wir betrachten die Schwingungen $u(x, t)$ einer Saite der Länge L , die an den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist. Das heißt an diesen Punkten ist die Auslenkung der Saite zu allen Zeiten t immer

¹Technisch besonders relevant ist der Algorithmus der schnellen Fourier-Transformation (englisch fast Fourier transform, daher meist FFT abgekürzt) zur effizienten, numerischen Berechnung der diskreten Fourier-Transformation (DFT). Mit ihr kann ein digitales Signal in seine Frequenzanteile zerlegt und diese dann analysiert werden, und jede/r von Ihnen benützt praktisch täglich auf FFT-Algorithmen beruhende Verfahren wie WLAN-Funknetztechnik, das MP3-Musikformat oder die JPEG-Bildkompression.

gleich Null, das heißt wir legen die *Randbedingungen* folgendermaßen fest:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0. \quad (4.2)$$

Die Schwingungen der Saite werden durch die folgende Wellengleichung, eine partielle lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, beschrieben

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4.3)$$

Hierbei ist S die Spannung der Saite (Kraft / Fläche) und ρ die Massendichte (Masse / Volumen), aus denen sich Ausbreitungsgeschwindigkeit c von Wellen entlang der Saite ergibt:

$$c = \sqrt{\frac{S}{\rho}}. \quad (4.4)$$

Diese partielle Differentialgleichung (DGL) kann durch einen sogenannten Separationsansatz (oder auch Produktansatz) gelöst werden:

$$u(x, t) = f(x)g(t). \quad (4.5)$$

Einsetzen in die DGL führt dann auf

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = -\omega^2 = \text{const.} \quad (4.6)$$

Das entscheidende ist, dass wir nach der Umformung alle Terme, die von t abhängen auf die eine Seite, und die Terme die von x abhängen auf die andere Seite gebracht haben. Diese Gleichung kann nur dann für alle t und x erfüllt sein, wenn die linke und rechte Seite gleich einer Konstante ist (= *Separationskonstante*), die wir als ω^2 bezeichnet haben.² Das bedeutet, wir erhalten nun die folgenden zwei *gewöhnlichen* Differentialgleichungen

$$g''(t) + \omega^2 g(t) = 0 \quad (4.7)$$

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0. \quad (4.8)$$

Nach Einführen der Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$ ergibt sich für die allgemeine Lösung von $f(x)$ (vgl. Kapitel 3.3.2)

$$f(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx). \quad (4.9)$$

²Vorausblockend bekommt nämlich ω die Bedeutung einer Kreisfrequenz.

Die beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2 werden nun durch die beiden Randbedingungen 4.2 festgelegt:

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0, \quad f(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 \sin(kL) = 0. \quad (4.10)$$

Die letzte Bedingung können wir erfüllen, indem wir entweder c_2 auch gleich Null setzen, was aber zur ziemlich langweiligen Lösung $f(x) = 0$ führen würde, oder indem wir fordern, dass der Sinus verschwindet, was für

$$kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.11)$$

erfüllt ist. Das heißt, die Wellenzahl k ist nicht beliebig, sondern nur diskrete Werte k_n sind erlaubt, bzw. diskrete Wellenlängen $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.12)$$

Die Lösung der zeitabhängigen Funktion $g(t)$ ergibt allgemein

$$g(t) = c_1 \cos(\omega_n t) + c_2 \sin(\omega_n t), \quad (4.13)$$

wobei wir hier den Zusammenhang zwischen Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω benutzt haben³

$$\omega_n = ck_n = nc \frac{\pi}{L} \quad \Leftrightarrow \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}. \quad (4.14)$$

Die noch zu bestimmenden Integrationskonstanten c_1 und c_2 können wir durch die Anfangsbedingungen $g(0) = b_n$ und $g'(t) = 0$ festlegen, womit wir mögliche Lösungen der Wellengleichung 4.3 in folgender Form schreiben können

$$u_n(x, t) = b_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t), \quad k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad \omega_n = nc \frac{\pi}{L}. \quad (4.15)$$

Das sind sogenannte stehende Wellen, da für jeden festen x -Wert die Amplitude der Schwingung konstant ist. Aufgrund der Linearität der Differentialgleichung 4.3 ist jede Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung. Daher lässt sich die allgemeine Lösung der Wellengleichung mit den Randbedingungen $u(0, t) = 0$ und $u(L, t) = 0$ als (unendliche) Summe über Teillösungen der Form 4.15 anschreiben:

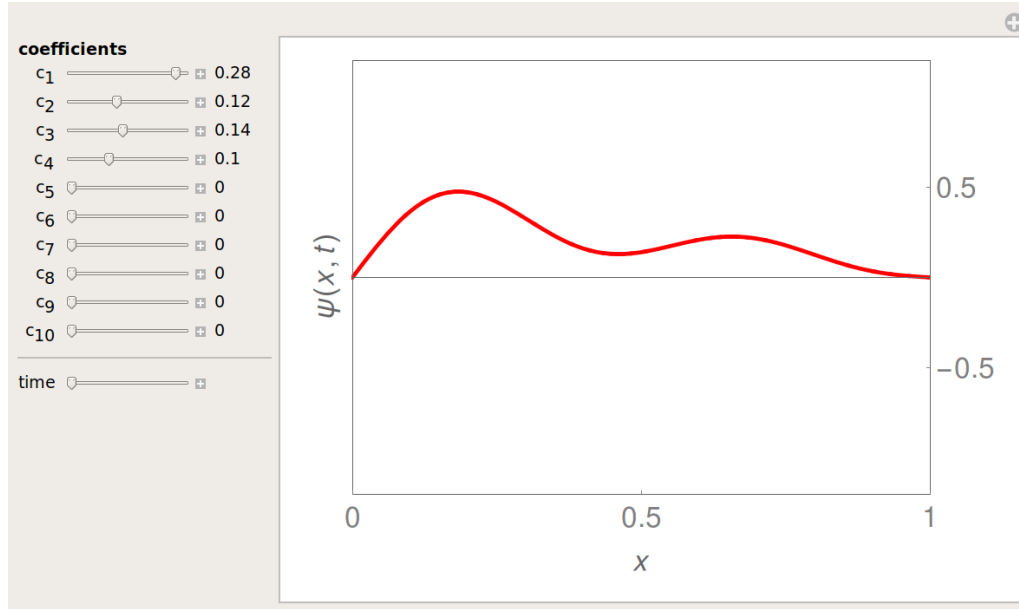
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) \quad (4.16)$$

Solche stehende Wellen bzw. Überlagerungen von mehreren stehenden Wellen können in der CDF-Simulation 13 visualisiert werden.

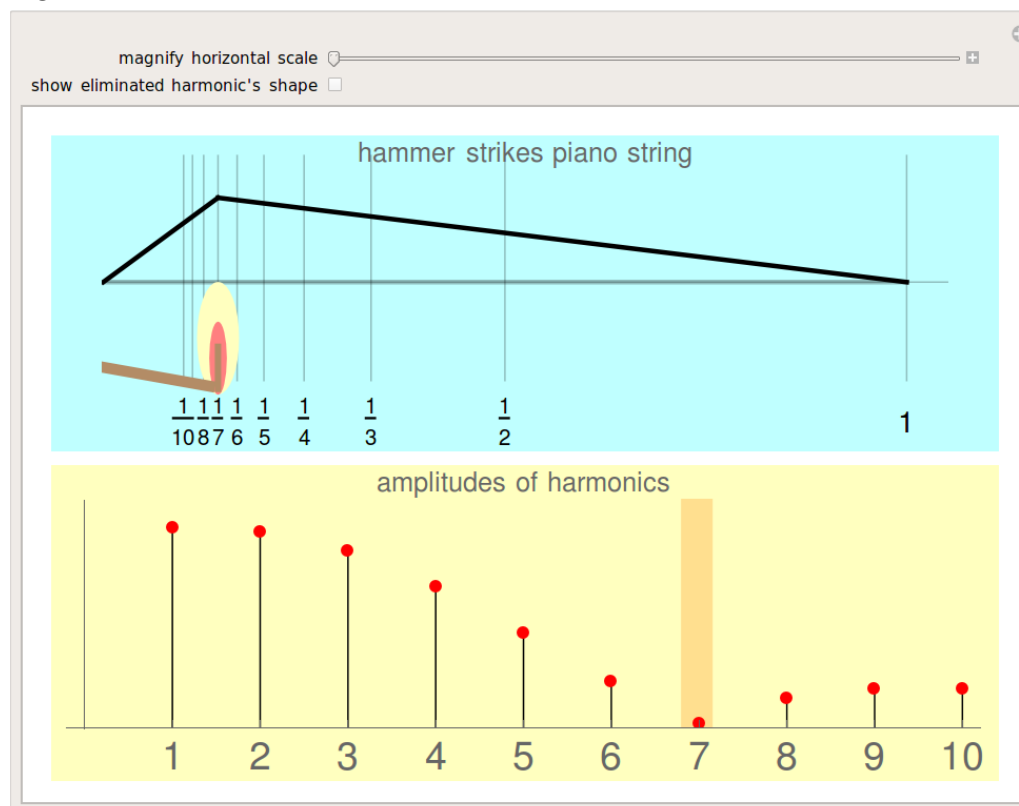
³Die Dispersionsbeziehung lautet $\omega = ck$ oder äquivalent $c = \lambda f$.

CDF 13. Überlagerung von stehenden Wellen [cdf13_Superposition_von_Wellen.cdf](#)

Überlagerung von stehenden Wellen.


CDF 14. Oberschwingungen einer Klaviersaite [cdf14_Oberschwingungen_einer_Saite.cdf](#)

Oberschwingungen einer Klaviersaite.



4.2 Orthogonale Funktionen

Betrachten wir die Lösung der Wellengleichung 4.16 zum Zeitpunkt $t = 0$ und geben die Anfangsauslenkung $f(x) = u(x, t = 0)$ vor,

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x), \quad (4.17)$$

so stellt sich die Frage, wie wir bei bekannter Funktion $f(x)$ die Fourier-Koeffizienten b_n in dieser Sinusreihe berechnen können? Dazu benutzen wir die Tatsache, dass die Funktionen

$$\{\sin(k_1 x), \sin(k_2 x), \sin(k_3 x), \dots\} \quad (4.18)$$

auf dem Intervall $[0, L]$ ein System von orthogonalen Funktionen bilden, das heißt es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \sin(k_n x) \sin(k_m x) &= \int_0^L dx \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \sin\left(m \frac{\pi}{L} x\right) = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi du \sin(nu) \sin(mu) = \\ &= \frac{L}{2} \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Hierbei haben wir die Euler'sche Beziehung benutzt

$$\sin(nu) = \frac{1}{2i} (e^{inu} - e^{-inu}), \quad \sin(mu) = \frac{1}{2i} (e^{imu} - e^{-imu}),$$

und damit den Integranden umgeformt

$$\begin{aligned} \sin(nu) \sin(mu) &= -\frac{1}{4} [e^{i(n+m)u} + e^{-i(n+m)u} - e^{i(n-m)u} - e^{-i(n-m)u}] \\ &= \frac{1}{2} [\cos((n-m)u) - \cos((n+m)u)] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Damit erhalten wir für das Integral für den Fall $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi du \sin(nu) \sin(mu) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi du \cos((n-m)u) - \frac{1}{2} \int_0^\pi du \cos((n+m)u) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(n-m)} \underbrace{\sin((n-m)u)|_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{2} \frac{1}{(n+m)} \underbrace{\sin((n+m)u)|_0^\pi}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Nur für den Fall, dass $n = m$ ist, verschwindet das Integral nicht,

$$\int_0^\pi du \sin(nu) \sin(nu) = \frac{1}{2} \int_0^\pi du = \frac{\pi}{2}, \quad (4.21)$$

womit Gleichung 4.19 gezeigt ist. Genauso wie zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} orthogonal aufeinander stehen, wenn ihr Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, so können wir auch für Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ein Skalarprodukt (f, g) definieren

$$(f, g) = \int_0^L dx f(x)g(x), \quad (4.22)$$

und nennen die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ *orthogonal* auf dem Intervall $[0, L]$, wenn das Skalarprodukt verschwindet, also $(f, g) = 0$ gilt. In dem Sinne bilden die Funktionen $\{\sin(k_n x)\}$ nach Gleichung 4.19 eine Orthogonalsystem,

$$(\sin(k_n x), \sin(k_m x)) = \frac{L}{2} \delta_{nm} \quad (4.23)$$

Eine grafische Darstellung dieses Skalarprodukts sowie die Bedeutung von Orthogonalität zweier Funktionen ist in der folgenden CDF-Applikation visualisiert: 15

CDF 15. Skalarprodukt von Funktionen `cdf15_Orthogonale_Funktionen.cdf`

Skalarprodukt von Funktionen.

function $f_n(x)$

function $g_m(x)$

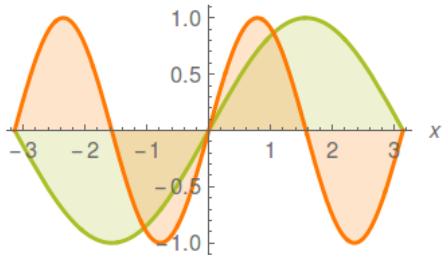
weight function

mode n of $f_n(x)$

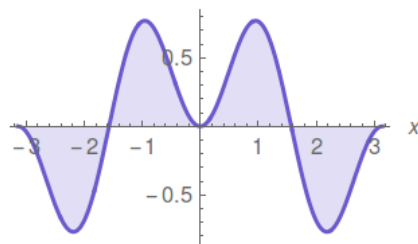
mode m of $g_m(x)$

interval

$\{\sin(x), \sin(2x)\}$



$\sin(x) \sin(2x)$



The weighted inner product is 0, the two functions are orthogonal.

Damit haben wir die Vorarbeiten geleistet, um die gesuchten Fourierkoeffizienten b_n in der Sinusreihe 4.17 zu berechnen. Dazu multiplizieren wir die Gleichung 4.17 auf beiden Seiten mit der Funktion $\sin(k_m x)$ und integrieren von 0 bis L .⁴

$$\begin{aligned} \int_0^L dx f(x) \sin(k_m x) &= \int_0^L dx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x) \sin(k_m x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_0^L dx \sin(k_n x) \sin(k_m x)}_{=\frac{L}{2} \delta_{nm}} \\ &= \frac{L}{2} b_m. \end{aligned}$$

Somit haben wir das wichtige Ergebnis erhalten:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin(k_n x). \quad (4.24)$$

Bsp. Wir bestimmen die Fourier-Koeffizienten b_n nach Gleichung 4.24 für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{L}x & x \in [0, L/2] \\ 2 - \frac{2}{L}x & x \in [L/2, L]. \end{cases}$$

Wir können diese Funktion als die Anfangsauslenkung $u(x, t = 0)$ einer Saite interpretieren, die in Saitenmitte bei $x = L/2$ um die Amplitude 1 ausgelenkt ist (Skizze!). Wir teilen das Integral über das Intervall $[0, L]$ in die zwei Teilintervalle auf $[0, L/2]$ und $[L/2, L]$. Das erste ergibt

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \int_0^{L/2} dx f(x) \sin(k_n x) &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} dx \frac{2}{L} \underbrace{x}_{=u} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{=v'} \\ &= -\frac{4}{L^2} x \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^{L/2} + \frac{4}{L^2} \int_0^{L/2} \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Rechnung für das zweite Integral läuft analog und ergibt

$$\frac{2}{L} \int_{L/2}^L dx \left(2 - \frac{2}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = +\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

⁴Anders ausgedrückt multiplizieren wir die Gleichung skalar mit der Funktion $\sin(k_m x)$

Damit erhalten für die Fourier-Koeffizienten insgesamt

$$b_n = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8}{n^2\pi^2} & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Damit lauten die ersten Terme der gesuchten Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{25} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) - \frac{1}{49} \sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right) \pm \dots \right]$$

(Vergleiche auch die CDF-Applikation 14 zum Thema Anschlag einer Klaviersaite)

4.3 Allgemeine Fourierreihen

Gleichung 4.17 stellt eine sogenannte Fourier-Sinus-Reihe dar. Die Verallgemeinerung für Funktionen $f(x)$, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ periodisch sind, ist die Fourier-Reihe:

$$FR(f) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]. \quad (4.25)$$

Die N -te Partialsumme dieser Reihe bezeichnen wir mit $FR_N(f)$

$$FR_N(f) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]. \quad (4.26)$$

Um die Fourierkoeffizienten a_n und b_n zu ermitteln benutzen wir wiederum die Orthogonalität der Funktionen $\{\sin(nx)\}$ und $\{\cos(nx)\}$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Es gilt nämlich

$$(\sin(nx), \sin(mx)) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx) \sin(mx) = \pi \delta_{nm} \quad (4.27)$$

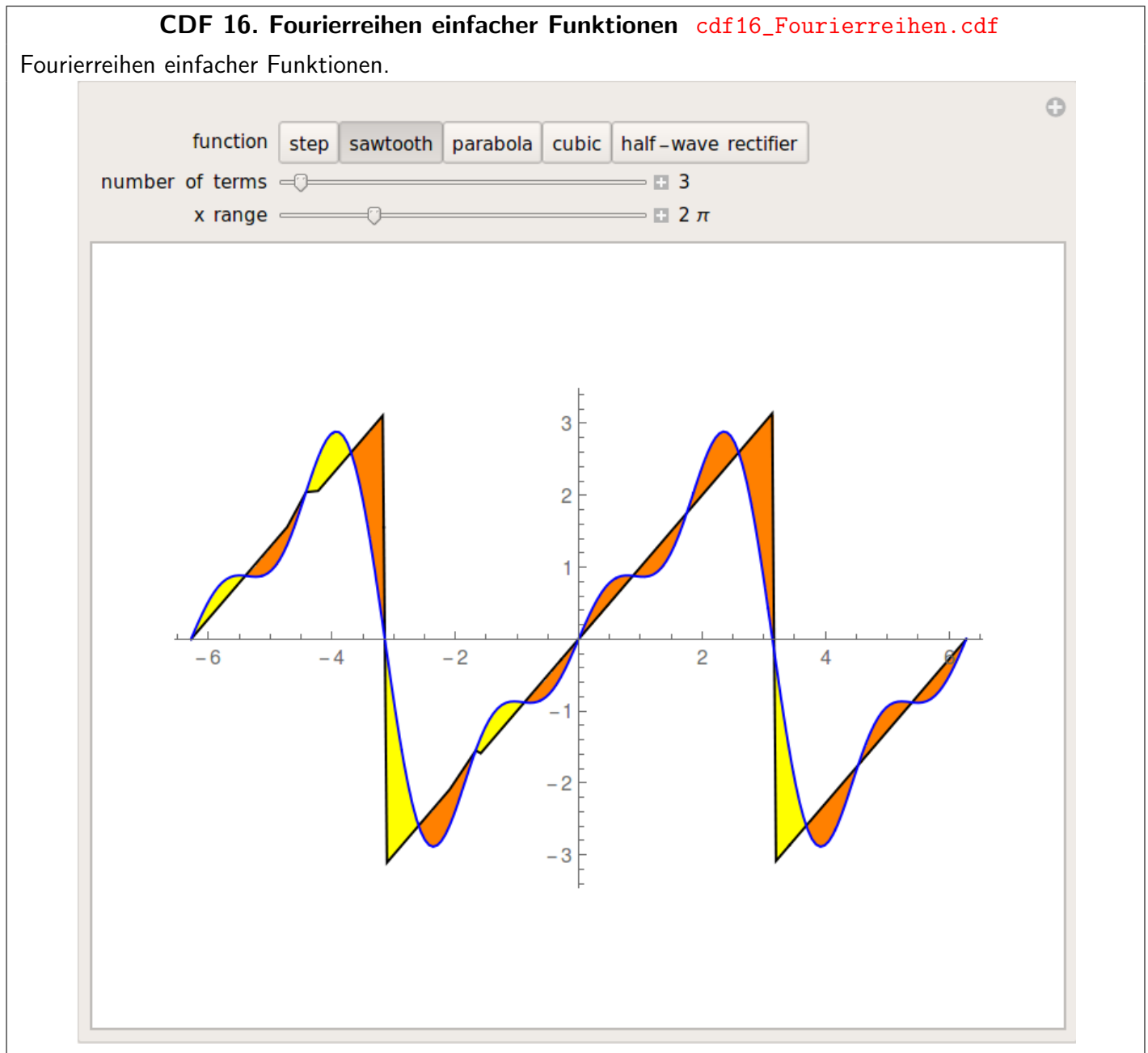
$$(\cos(nx), \cos(mx)) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx) \cos(mx) = \pi \delta_{nm} \quad (4.28)$$

$$(\sin(nx), \cos(mx)) = \int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(nx) \cos(mx) = 0, \quad (4.29)$$

womit wir die Fourier-Koeffizienten aus der Gleichung 4.25 "herausprojizieren" können:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(nx) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.30)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(nx) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.31)$$



Bsp. Wir berechnen die Fourier-Reihe für die Funktion $f(x) = x$, die wir mit der Periode 2π auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ periodisch fortsetzen (vgl. CDF-Applikation 16). Dazu bemerken wir zunächst, dass es sich bei der Funktion $f(x)$ um eine *ungerade* Funktion handelt: $f(-x) = -f(x)$. Da die Funktionen $\cos(nx)$ *gerade* Funktionen sind, also $f(-x) = f(x)$ verschwinden die Fourier-Koeffizienten a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \underbrace{x \cos(nx)}_{\text{ungerade}} = 0,$$

weil der Integrand insgesamt ungerade⁵ und das Integrationsintervall symmetrisch um den Ursprung ist. Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_n liefert unter Ausnutzung der Symmetrie und nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \underbrace{x \sin(nx)}_{\text{gerade}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \underbrace{x}_u \underbrace{\sin(nx)}_{v'} = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} dx \cos(nx) \right] \\
 &= \frac{2}{n\pi} \left[-\pi \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \underbrace{\sin(nx) \Big|_0^{\pi}}_{=0} \right] \\
 &= -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die gesuchte Fourier-Reihe

$$FR(f) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = 2 \left[\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \mp \dots \right].$$

Bsp. Als zweites prototypisches Beispiel bestimmen wir die Fourier-Reihe für die Rechtecksfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0, \\ 1 & 0 \leq x < \pi, \end{cases} \quad \text{Periode } 2\pi.$$

Einsetzen in die Gleichungen 4.30 und 4.31 liefert

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \cos(nx) = \delta_{n0} \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin(nx) = -\frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi} [(-1)^n - 1].
 \end{aligned}$$

Weil b_n für alle geraden n verschwindet finde wir nach der Ersetzung $n = 2k + 1$ für die gesuchte Fourier-Reihe der Rechteckswelle

$$FR(f) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)x] = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right]$$

⁵Man überlegt sich leicht, dass das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion eine ungerade Funktion ergibt. Umgekehrt liefert das Produkt zweier ungerader Funktionen eine gerade Funktion. Und schließlich bleibt das Produkt zweier gerader Funktionen eine gerade Funktion.

4.4 Komplexe Form der Fourierreihe

Wir können die Gleichung 4.25 mithilfe der Euler-Beziehungen

$$\cos(nx) = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin(nx) = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \quad (4.32)$$

auch durch Exponentialfunktionen mit komplexen Argumenten ausdrücken. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} FR(f) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (e^{inx} + e^{-inx}) - ib_n (e^{inx} - e^{-inx})] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} a_0}_{=c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{1}{2} (a_n - ib_n)}_{=c_n} e^{inx} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{1}{2} (a_n + ib_n)}_{=c_{-n}} e^{i(-n)x} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Hierbei haben wir nach den Gleichungen 4.30 und 4.31 benutzt, dass

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(nx) - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(nx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) [\cos(nx) - i \sin(nx)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \left[\frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{i}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-inx}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

womit auch folgt, dass $c_{-n} = a_n + ib_n$ gilt. Zusammenfassend gelten also für die komplexe Fourierreihe die folgenden beiden einfach zu merkenden Beziehungen:

$$FR(f(x)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (4.35)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-inx}. \quad (4.36)$$

Bsp. Wir berechnen die komplexe Fourierreihe für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0, \\ x & 0 \leq x < \pi, \end{cases} \quad \text{Periode } 2\pi.$$

Nach Gleichung 4.36 erhalten wir

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dx \underbrace{x}_u \underbrace{e^{-inx}}_{v'} \\ &= -\frac{1}{2in\pi} x e^{-inx} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2in\pi} \int_0^\pi dx e^{-inx} \\ &= -\frac{e^{-in\pi}}{2in} - \frac{1}{2(in)^2\pi} e^{-inx} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{i \cos(n\pi)}{2n} + \frac{1}{2n^2\pi} [\cos(n\pi) - 1] \\ &= \frac{i(-1)^n}{2n} + \frac{1}{2n^2\pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 4.35 und 4.36, die ja für Funktionen $f(x)$ definiert auf dem Intervall $x \in (-\pi, +\pi)$ gelten, lassen sich leicht auf den allgemeineren Fall $x \in (-L, +L)$ mit $L > 0$ erweitern.

$$FR(f(x)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \quad (4.37)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-ik_n x}, \quad (4.38)$$

wobei wir hier die Größe k_n wie folgt definiert haben

$$k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.39)$$

4.5 Von der Fourierreihe zur Fouriertransformation

Was passiert, wenn wir in den Gleichungen 4.37–4.39 das Intervall $(-L, +L)$ immer größer werden lassen, bis schließlich die Funktion $f(x)$ auf der ganzen reellen Achse definiert ist? Nach Gleichung 4.39 wird dann die Größe k_n (Wellenzahl) von einer diskreten Größe mit dem Abstand $\Delta k = \frac{\pi}{L}$ zu einer kontinuierlichen Variablen $k \in \mathbb{R}$.

$$k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Die unendliche Reihe 4.37 wird dann zu einer "kontinuierlichen Summe", also einem Integral, und die Zahlen c_n zu einer Funktion $c(k)$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\Delta k} c(k) e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \underbrace{\frac{L}{\pi} c(k)}_{=\tilde{f}(k)} e^{ikx}.$$

Und schließlich finden wir für Gleichung 4.38 in Limes $L \rightarrow \infty$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-ik_n x} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{\pi}{L} \tilde{f}(k) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-ikx}.$$

Zusammenfassend gelten dann für die *Fouriertransformation* der Funktion $f(x)$ bzw. für die *inverse Fouriertransformation* der Funktion $\tilde{f}(k)$ die folgenden Beziehungen⁶

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \quad (4.40)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}. \quad (4.41)$$

Um die Symmetrie der Beziehungen für die Fouriertransformation bzw. die inverse Fouriertransformation noch deutlicher zu machen haben wir, wie es in der Literatur üblich ist den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ auf die beiden Beziehungen aufgeteilt. Die Fouriertransformation entspricht einem Darstellungswechsel zwischen dem x -Raum und dem k -Raum. In der Physik könnte der x -Raum Beispiel eine Ortskoordinate darstellen, dann ist die Bedeutung von k die einer Wellenzahl. Von einem solchen Darstellungswechsel vom Orts- in den Wellenzahl (oder Impulsraum) wird zum Beispiel in der Quantenmechanik Gebrauch gemacht. Eine andere Möglichkeit wäre, dass wir $x = t$ setzen, also mit einer Zeitkoordinate identifizieren, dann bedeutet der Darstellungswechsel einen Übergang von der Zeitdomäne in die Frequenzdomäne, also $k = \omega$, wobei ω die Kreisfrequenz darstellt:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \quad (4.42)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}. \quad (4.43)$$

Bsp. Wir berechnen die Fouriertransformation eines Rechteckpulses der Dauer $2T$, also der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |x| \leq T, \\ 0 & |x| > T. \end{cases}$$

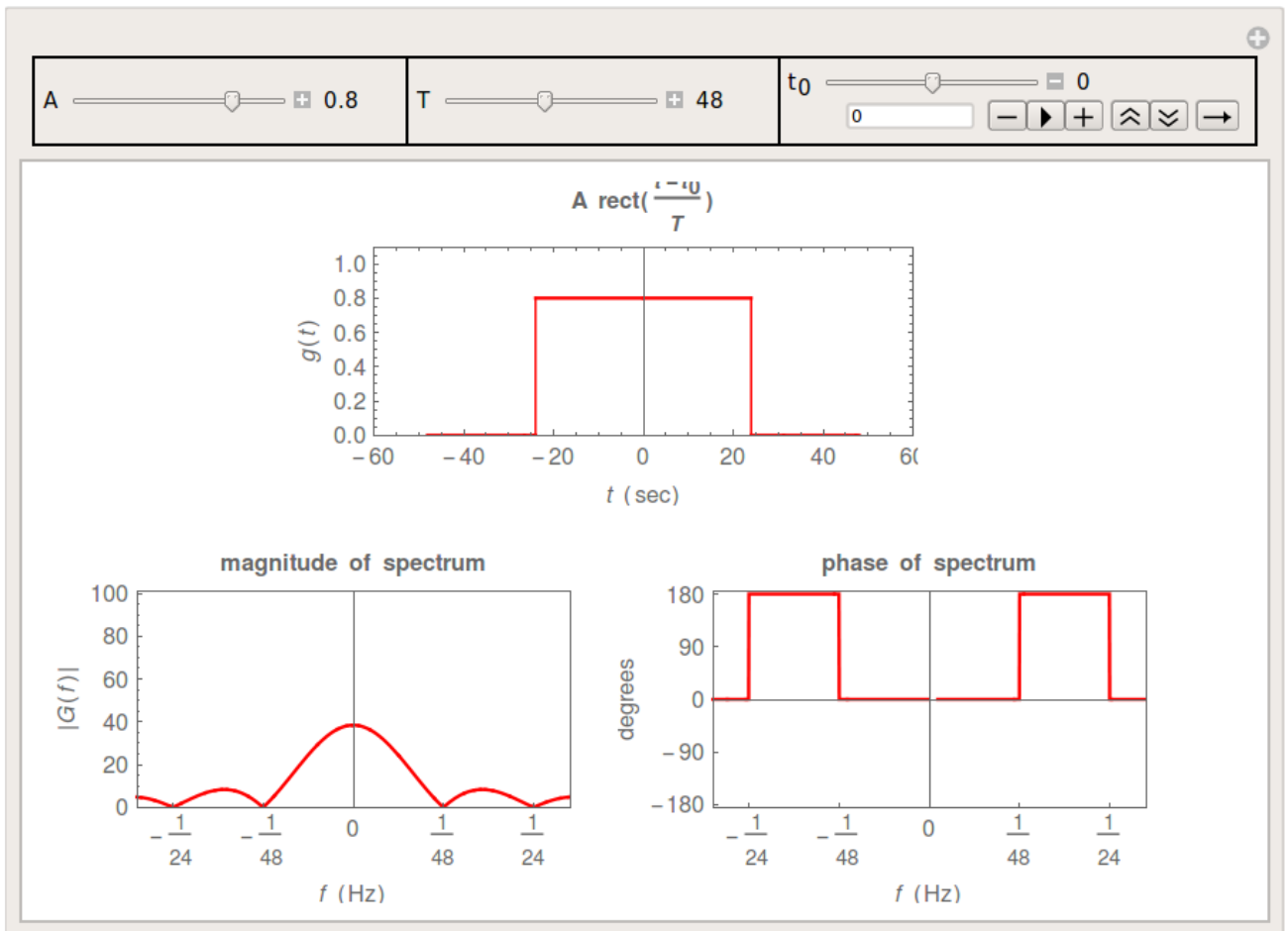
⁶Achtung, nicht jede Funktion ist fouriertransformierbar! Siehe etwa das Buch von "Mathematische Methoden in der Physik" von Lang und Pucker.

Nach Gleichung 4.42 finden wir

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T dt e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i\omega}} e^{-i\omega t} \Big|_{-T}^T = -\frac{1}{\sqrt{2\pi i\omega}} (e^{-i\omega T} - e^{+i\omega T}) = \frac{2T}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}.$$

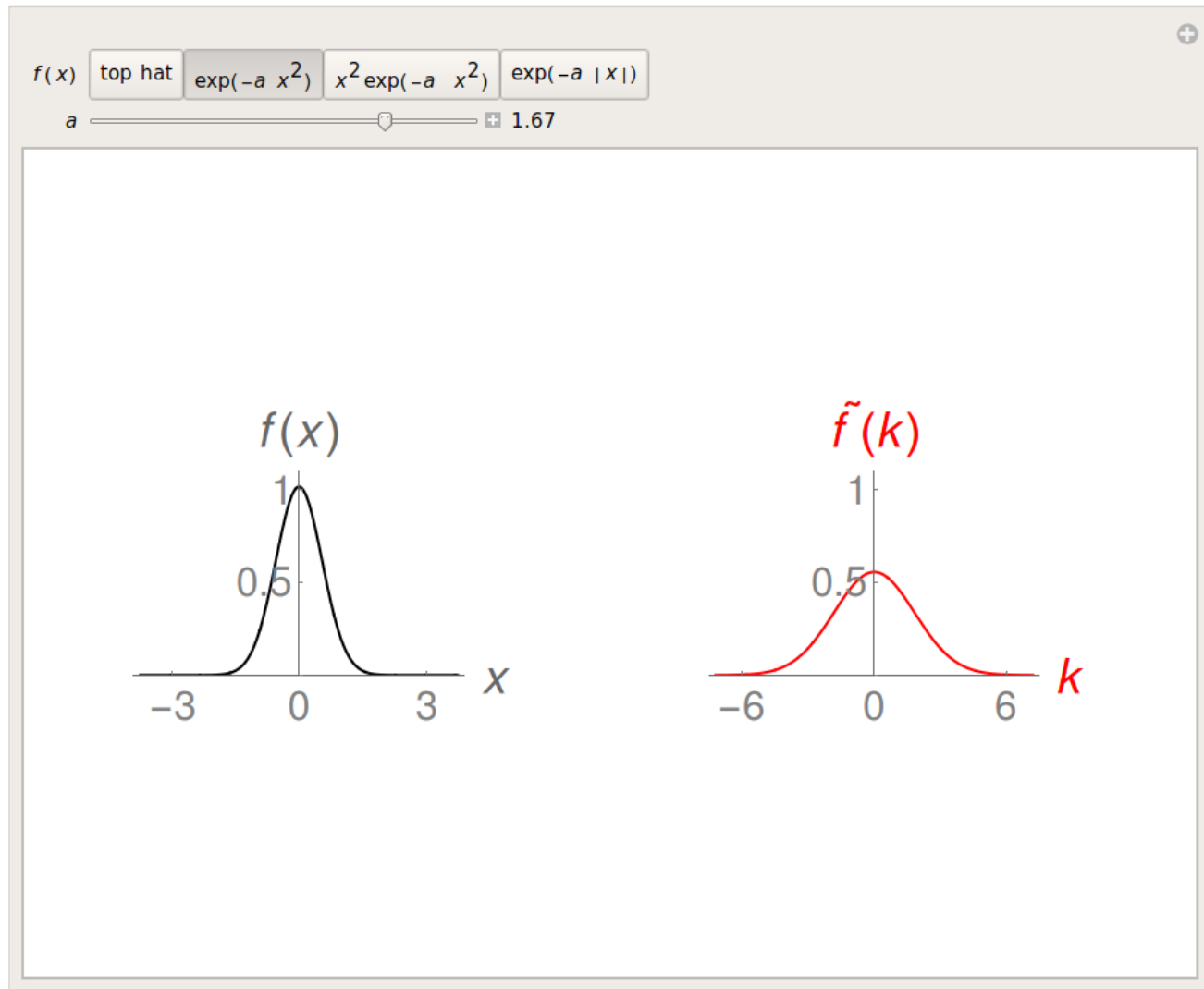
CDF 17. Fouriertransformation eines Rechteckpulses [cdf17_Fouriertransformation_Rechteckpuls.c](#)

Fouriertransformation eines Rechteckpulses.



CDF 18. Fouriertransformation einfacher Funktionen `cdf18_Fouriertransformation_einfache_Funkt`

Fouriertransformation einfacher Funktionen.



CDF 19. Fast Fouriertransformation zur Bildkompression [cdf19_Bildkompression_mit_Fouriertrans](#)Fast Fouriertransformation zur Bildkompression. [youtube](#)