Kapitel VIII

Lokalkonvexe Räume

VIII.1 Definition lokalkonvexer Räume; Beispiele

Wir haben bislang Vektorräume betrachtet, worin auf sinnvolle Weise die Konvergenz einer Folge von Elementen durch eine (Halb-) Norm definiert war, z.B. die gleichmäßige Konvergenz in $C[0,1]$ durch die Supremumsnorm. Das Konzept der punktweisen Konvergenz ordnet sich diesem System nicht unter. Man kann jedoch folgenden Standpunkt einnehmen: Setzt man für $t \in [0,1]$ und eine Funktion $x\colon [0,1] \to \mathbb{C}$

$$p_t(x) = |x(t)|,$$

so bedeutet „(x_n) konvergiert punktweise gegen 0" nichts anderes als

$$p_t(x_n) \to 0 \qquad \forall t.$$

Die wesentliche Beobachtung ist nun, daß die p_t Halbnormen sind und die punktweise Konvergenz nicht durch das Bestehen *allein einer* Halbnormkonvergenz, sondern das simultane Bestehen *mehrerer* Halbnormkonvergenzen ausgedrückt wird. Wir werden es daher im folgenden mit Vektorräumen X und Familien von Halbnormen auf X (anstatt einer einzigen Norm) zu tun haben.

Aus diesen Ingredienzien wird die Theorie der lokalkonvexen Räume aufgebaut, deren elementarer Teil in mancher Hinsicht parallel zur Theorie normierter Räume verlaufen wird. Die Theorie lokalkonvexer Räume verlangt allerdings eine rudimentäre Kenntnis der Prinzipien (oder zumindest des Vokabulars) topologischer Räume, die im Anhang B.2 dargestellt sind.

Kommen wir nun zur Definition eines lokalkonvexen Vektorraums. X sei ein Vektorraum und P eine Menge von Halbnormen auf X, die einem

D. Werner, *Funktionalanalysis*, 7. Aufl., Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-21017-4_8, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

ungeschriebenen Gesetz zufolge mit p bzw. p_i bezeichnet werden. Sei nun F eine *endliche* Teilmenge von P und $\varepsilon > 0$. Setze

$$U_{F,\varepsilon} = \{x \in X\colon p(x) \leq \varepsilon \ \forall p \in F\}$$

sowie

$$\mathfrak{U} = \{U_{F,\varepsilon}\colon F \subset P \text{ endlich}, \ \varepsilon > 0\}.$$

Das System $\mathfrak{U}$ ist das Substitut der Menge aller Kugeln $\{x\colon \|x\| \leq \varepsilon\}$ im normierten Fall. Es hat folgende Eigenschaften:

(1) $0 \in U$ für alle $U \in \mathfrak{U}$.

(2) Zu $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ existiert $U \in \mathfrak{U}$ mit $U \subset U_1 \cap U_2$ („$\mathfrak{U}$ ist abwärts filtrierend"), denn $U_{F_1 \cup F_2, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \subset U_{F_1,\varepsilon_1} \cap U_{F_2,\varepsilon_2}$.

(3) Zu $U \in \mathfrak{U}$ existiert $V \in \mathfrak{U}$ mit[1] $V + V \subset U$; es gilt nämlich $U_{F,\varepsilon/2} + U_{F,\varepsilon/2} \subset U_{F,\varepsilon}$.

(4) Alle $U \in \mathfrak{U}$ sind absorbierend (Definition III.2.1), denn $x_0 \in \lambda U_{F,\varepsilon}$, falls $\lambda > \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max_{p \in F} p(x_0)$.

(5) Zu $U \in \mathfrak{U}$ und $\lambda > 0$ existiert $V \in \mathfrak{U}$ mit $\lambda V \subset U$. Es gilt nämlich $\lambda U_{F,\varepsilon/\lambda} \subset U_{F,\varepsilon}$, ja sogar „=".

Wir benötigen folgende Definition.

Definition VIII.1.1

(a) Eine Teilmenge A eines Vektorraums heißt *kreisförmig*, falls

$$\{\lambda\colon |\lambda| \leq 1\} \cdot A \subset A.$$

(b) A heißt *absolutkonvex*, falls A konvex und kreisförmig ist.

Man zeigt leicht, daß A genau dann absolutkonvex ist, wenn

$$x, y \in A, \ |\lambda| + |\mu| \leq 1 \ \Rightarrow \ \lambda x + \mu y \in A$$

ist. Speziell gilt für unser System $\mathfrak{U}$:

(6) Jedes $U \in \mathfrak{U}$ ist kreisförmig.

Sogar:

(7) Jedes $U \in \mathfrak{U}$ ist absolutkonvex.

[1] Hier wie im folgenden benutzen wir die suggestive Symbolik

$$A + B = \{a + b\colon a \in A, \ b \in B\}, \ \Lambda A = \{\lambda a\colon \lambda \in \Lambda, \ a \in A\}.$$

Achtung: i.a. ist $A + A \neq 2A$! (Beispiel?)

Wir werden sehen, daß man mit Hilfe der Eigenschaften (1)–(6) auf X eine Vektorraumtopologie definieren kann, bezüglich derer die algebraischen Operationen Addition und Skalarmultiplikation stetig sind. Den entscheidenden Schritt, nämlich den Satz von Hahn-Banach in verallgemeinerter Form zu zeigen, wird allerdings erst Eigenschaft (7) zulassen (dazu siehe Abschnitt VIII.2).

Zunächst sei nun $\mathfrak{U}$ irgendein nichtleeres Mengensystem mit den Eigenschaften (1)–(6) (diese Eigenschaften sind teilweise redundant, z.B. folgt (1) aus (4)). Wir definieren dann folgendermaßen eine Topologie auf X:

$$O \subset X \text{ offen } \iff \forall x \in O \ \exists U \in \mathfrak{U} \ \ x + U \subset O.$$

Es ist noch zu verifizieren, daß in der Tat eine Topologie definiert wird:

- $\emptyset$ und X sind offen (klar!).
- Seien O_1 und O_2 offen und $x \in O_1 \cap O_2$. Dann existieren $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ mit $x + U_i \subset O_i$. Wähle nach (2) $U \in \mathfrak{U}$ mit $U \subset U_1 \cap U_2$, dann ist $x + U \subset O_1 \cap O_2$, und $O_1 \cap O_2$ ist offen.
- Seien O_i, $i \in I$, offen und $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$, etwa $x \in O_{i_0}$. Dann existiert $U \in \mathfrak{U}$ mit $x + U \subset O_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, und $\bigcup_{i \in I} O_i$ ist offen.

Nach Konstruktion ist $\mathfrak{U}$ eine *Nullumgebungsbasis*, d.h. jede Umgebung der Null umfaßt ein $U \in \mathfrak{U}$ (das ist klar), und alle $U \in \mathfrak{U}$ sind Nullumgebungen. Um letzteres einzusehen, beachte man nur, daß für eine Menge $A \subset X$ die Menge $O = \{x \in A\colon$ es existiert $W \in \mathfrak{U}$ mit $x + W \subset A\}$ offen ist; ist nämlich $x + W \subset A$ und wählt man $V \in \mathfrak{U}$ mit $V + V \subset W$, so ist für $y \in x + V$ stets $y + V \subset A$, d.h. $x + V \subset O$. Ferner sind konstruktionsgemäß bei festem $x \in X$ die Abbildungen $y \mapsto x + y$ stetig, es sind sogar *Homöomorphismen*, was definitionsgemäß bedeutet, daß auch die Umkehrabbildung $(y \mapsto -x + y)$ stetig ist. Darüber hinaus gilt:

Lemma VIII.1.2 *In der oben beschriebenen Topologie sind*

(a) *Addition:* $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$,

(b) *Skalarmultiplikation:* $\mathbb{K} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$,

stetige Abbildungen. Dabei tragen $X \times X$ und $\mathbb{K} \times X$ jeweils die Produkttopologie.

Beweis. Sei $O \subset X$ offen. Es ist zu zeigen:

(a) $\tilde{O} := \{(x, y)\colon x + y \in O\}$ ist offen,

(b) $\widehat{O} := \{(\lambda, x)\colon \lambda x \in O\}$ ist offen.

Zum Beweis von (a) sei $(x, y) \in \tilde{O}$. Wähle $U \in \mathfrak{U}$ mit $x + y + U \subset O$ und V gemäß Eigenschaft (3). Dann ist $(x + V) \times (y + V) \subset \tilde{O}$ und deshalb (x, y) ein innerer Punkt von $\tilde{O}$. Das zeigt die Offenheit von $\tilde{O}$.

Zum Beweis von (b) sei $(\lambda, x) \in \widehat{O}$. Wähle $U \in \mathfrak{U}$ mit $\lambda x + U \subset O$. Wir werden $\varepsilon > 0$ und $W \in \mathfrak{U}$ mit $\{\mu\colon |\lambda - \mu| < \varepsilon\} \cdot (x + W) - \{\lambda x\} \subset U$, d.h. $\{\mu\colon |\lambda - \mu| < \varepsilon\} \times (x + W) \subset \widehat{O}$, angeben. Wähle zunächst $V \in \mathfrak{U}$ mit $V + V \subset U$ (Eigenschaft (3)), und bestimme dann $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon x \in V$ (Eigenschaft (4)). Da V kreisförmig ist, gilt

$$(\mu - \lambda)x \in V, \text{ falls } |\lambda - \mu| < \varepsilon.$$

Nun wähle $W \in \mathfrak{U}$ mit

$$\mu W \subset V, \text{ falls } |\mu| \le |\lambda| + \varepsilon$$

(Eigenschaften (5) und (6)). Dann folgt für $|\lambda - \mu| < \varepsilon$ und $w \in W$

$$\mu(x + w) - \lambda x = (\mu - \lambda)x + \mu w \in V + V \subset U. \qquad \square$$

Definition VIII.1.3 X sei ein Vektorraum und τ eine Topologie auf X.

(a) Sind Addition und Skalarmultiplikation stetig bzgl. τ, so heißt (X, τ) *topologischer Vektorraum.*

(b) Sei P eine Menge von Halbnormen auf X und τ die oben beschriebene Topologie, für die eine Nullumgebungsbasis aus den $U_{F,\varepsilon} = \{x\colon p(x) \le \varepsilon \ \forall p \in F\}$, $\varepsilon > 0$, $F \subset P$ endlich, besteht. (X, τ) heißt dann *lokalkonvexer* topologischer Vektorraum (oder kürzer lokalkonvexer Raum).

Nach Lemma VIII.1.2 ist ein lokalkonvexer Raum wirklich ein topologischer Vektorraum! Ferner sollte ausdrücklich bemerkt werden, daß ein Vektorraum, der eine Topologie trägt, nicht automatisch ein topologischer Vektorraum ist: Versieht man nämlich irgendeinen Vektorraum X mit der diskreten Topologie (in der jede Menge offen ist), so ist die Skalarmultiplikation nicht stetig. (Sonst wäre für jedes $x \neq 0$ bereits $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}x = 0$, aber in einem diskreten Raum konvergieren nur Folgen, die schließlich konstant werden.) Es gibt zwar Beispiele nicht lokalkonvexer topologischer Vektorräume, aber fast alle Topologien auf Vektorräumen, die für Anwendungen wichtig sind, sind lokalkonvex.

Beispiele. (a) Sei T eine Menge und X ein Vektorraum von Funktionen auf T (z.B. $T = \mathbb{R}^n$, $X = C^b(\mathbb{R}^n)$). Betrachte die Halbnormen $p_t(x) = |x(t)|$ $(t \in T)$. Die von der Familie $P = \{p_t\colon t \in T\}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie heißt *Topologie der punktweisen Konvergenz.*

(b) Sei T ein topologischer Raum und X ein Vektorraum von stetigen Funktionen auf T. Betrachte die Halbnormen

$$p_K(x) = \sup_{t\in K} |x(t)|, \quad K \subset T \text{ kompakt.}$$

Die von $P = \{p_K\colon K \subset T \text{ kompakt}\}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie heißt *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.*

(c) Sei $X = C^\infty(\mathbb{R})$ und

$$p_{K,m}(x) = \sup_{t\in K} |x^{(m)}(t)|$$

für $m \geq 0$, $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. $P = \{p_{K,m}\colon K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt}, m \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugt eine lokalkonvexe Topologie auf X. Wird $C^\infty(\mathbb{R})$ mit dieser Topologie versehen, schreibt man häufig $\mathscr{E}(\mathbb{R})$. Analog definiert man die Topologie von $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ und von $\mathscr{E}(\Omega)$ für offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(d) Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (Definition V.2.3) wird durch die Halbnormen

$$p_{\alpha,m}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|(D^\alpha\varphi)(x)|$$

topologisiert. (Hier ist α ein Multiindex und $m \in \mathbb{N}_0$.)

(e) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Es sei

$$\mathscr{D}_K(\Omega) := \{\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}\colon \varphi \in C^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp}(\varphi) \subset K\}.$$

(Zur Existenz solcher Funktionen siehe Lemma V.1.10.) $\mathscr{D}_K(\Omega)$ wird durch die Halbnormen

$$p_\alpha(\varphi) = \sup_{x\in\Omega} |(D^\alpha\varphi)(x)|,$$

α ein Multiindex, topologisiert.

(f) Die soeben beschriebene Topologie könnte man auch auf $\mathscr{D}(\Omega)$ betrachten; aus verschiedenen Gründen ist das jedoch nicht angemessen. Unter anderem möchte man nämlich auf $\mathscr{D}(\Omega)$ eine Topologie betrachten, die die Tatsache, daß $\mathscr{D}(\Omega) = \bigcup_K \mathscr{D}_K(\Omega)$ ist (hier wird über alle kompakten Teilmengen von Ω vereinigt), reflektiert. Eine solche lokalkonvexe Topologie kann so definiert werden. Sei τ_K die Topologie von $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Es sei P die Menge aller Halbnormen p auf $\mathscr{D}(\Omega)$, für die alle Restriktionen $p|_{\mathscr{D}_K}$ bezüglich τ_K stetig sind. Auf $\mathscr{D}(\Omega)$ betrachtet man dann die von P erzeugte lokalkonvexe Topologie.

Die Beispiele (c)–(f) sind fundamental für die Distributionentheorie (Abschnitt VIII.5).

(g) X sei ein Vektorraum und p eine Norm auf X. Die von $P = \{p\}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie ist die Normtopologie auf X.

(h) X sei ein normierter Raum. Betrachte die Halbnormen

$$p_{x'}(x) = |x'(x)| \qquad (x' \in X').$$

Diese Halbnormen erzeugen die *schwache Topologie* $\sigma(X, X')$ auf X. Die schwache Topologie ist fast immer von der Normtopologie verschieden. (Näheres dazu in Abschnitt VIII.3.)

(i) Auf dem Dualraum X' eines normierten Raums definieren die Halbnormen
$$p_x(x') = |x'(x)| \qquad (x \in X)$$
die *schwach*-Topologie* $\sigma(X', X)$, die sowohl von der Normtopologie als auch von der schwachen Topologie $\sigma(X', X'')$ zu unterscheiden ist (auch hierzu siehe Abschnitt VIII.3).

(j) Auf dem Raum $L(X, Y)$ (X und Y normierte Räume) sind außer der Normtopologie zwei weitere Topologien von Interesse: die *starke Operatortopologie*, die von den Halbnormen
$$p_x(T) = \|Tx\| \qquad (x \in X)$$
erzeugt wird, sowie die *schwache Operatortopologie*, die durch die Halbnormen
$$p_{x,y'}(T) = |y'(Tx)| \qquad (x \in X,\ y' \in Y')$$
definiert wird. (Diese Topologie kam implizit im Kapitel VII bei der Diskussion von Spektralmaßen vor; vgl. Satz VII.1.6(d).)

(k) In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist auf dem Raum $M(\mathbb{R})$ aller endlichen signierten Maße diejenige lokalkonvexe Topologie von Bedeutung, die von den Halbnormen
$$p_f(\mu) = \left| \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu \right| \qquad (f \in C^b(\mathbb{R}))$$
erzeugt wird. Sie wird in der Wahrscheinlichkeitstheorie ebenfalls *schwache Topologie* genannt, ist aber von der funktionalanalytischen schwachen Topologie aus Beispiel (h) verschieden.

(l) $P = \{0\}$ erzeugt auf jedem Vektorraum X die *chaotische Topologie*, in der nur $\emptyset$ und X offen sind.

Das letzte Beispiel zeigt auf dramatische Weise, daß ein lokalkonvexer Raum nicht die Hausdorffsche Trennungseigenschaft (d.h. verschiedene Punkte besitzen disjunkte Umgebungen) zu haben braucht. Diese Eigenschaft ist für lokalkonvexe Räume leicht zu charakterisieren.

Lemma VIII.1.4 *Die Halbnormfamilie P erzeuge auf X die lokalkonvexe Topologie τ. Dann sind äquivalent:*

(i) *(X, τ) ist Hausdorffraum.*

(ii) *Zu $x \neq 0$ existiert $p \in P$ mit $p(x) \neq 0$.*

(iii) *Es gibt eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ mit $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{0\}$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $x \neq 0$. Wähle Nullumgebungen U und V mit $(x + U) \cap V = \emptyset$. Nach Definition der Topologie τ darf man annehmen, daß V von der Form $V = U_{F,\varepsilon} = \{u\colon p(u) \leq \varepsilon \text{ für alle } p \in F\}$ mit einer endlichen Teilmenge $F \subset P$ ist. Wegen $x \notin V$ ist dann $p(x) \neq 0$ für ein $p \in F$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) gilt wegen $x \in \bigcap_{F,\varepsilon} U_{F,\varepsilon} \Leftrightarrow p(x) = 0$ für alle $p \in P$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \neq y$. Wähle $U \in \mathfrak{U}$ mit $x - y \notin U$. Da die Differenzbildung stetig ist, existieren Nullumgebungen V und W mit $W - V \subset U$. Es folgt $(x + V) \cap (y + W) = \emptyset$. □

Das Lemma zeigt, daß alle obigen Beispiele (bis auf (l)) Hausdorffräume sind; bei (h) (und (j)) folgt das aus dem Satz von Hahn-Banach, bei (k) aus der Regularität von μ. Auf Beispiel (f) werden wir noch detaillierter eingehen.

Der nächste Satz erklärt, warum lokalkonvexe Räume „lokalkonvex" heißen.

Satz VIII.1.5 *(X, τ) sei ein topologischer Vektorraum. X ist genau dann lokalkonvex, wenn es eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen absorbierenden Mengen gibt.*

Beweis. Nach Konstruktion besitzt ein lokalkonvexer Raum eine solche Nullumgebungsbasis. Sei nun $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis, so daß alle $U \in \mathfrak{U}$ absolutkonvex und absorbierend sind. Wir betrachten die Minkowskifunktionale

$$p_U(x) := \inf\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U\}$$

(Definition III.2.1). Da U absorbierend ist, ist stets $p_U(x) < \infty$ (das ist gerade die Definition der Absorbanz); da U konvex ist, ist p_U sublinear (Lemma III.2.2(b); dort war zwar vorausgesetzt, daß X normiert und 0 innerer Punkt von U ist, der Beweis macht davon allerdings keinen Gebrauch). Schließlich folgt aus der Kreisförmigkeit

$$p_U(\lambda x) = |\lambda| p_U(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \tag{VIII.1}$$

so daß insgesamt p_U eine Halbnorm ist. [Beweis von (VIII.1): Da (VIII.1) für $\lambda \geq 0$ richtig ist (p_U ist sublinear), darf o.E. $|\lambda| = 1$ vorausgesetzt werden. Die Kreisförmigkeit von U liefert dann $\lambda U = U$, also $p_U(\lambda x) = p_{\lambda U}(\lambda x) = p_U(x)$.]

Betrachte nun die von der Halbnormfamilie $P = \{p_U \colon U \in \mathfrak{U}\}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie $\tilde{\tau}$ mit der kanonischen Nullumgebungsbasis $\tilde{\mathfrak{U}} = \{U_{F,\varepsilon} \colon F \subset P \text{ endlich}, \varepsilon > 0\}$. Es ist dann nicht schwer zu verifizieren, daß $\tau = \tilde{\tau}$ gilt; die Details seien den Leserinnen und Lesern überlassen. □

Satz VIII.1.5 sagt aus, daß lokalkonvexe Räume geometrisch (durch Angabe einer Nullumgebungsbasis) oder analytisch (durch Angabe einer Halbnormfamilie) beschrieben werden können. Wir werden hier weitgehend dem analytischen Zugang folgen.