Gerd Laures Markus Szymik

Grundkurs Topologie

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Ü19 – Kuratowskis Hüllenaxiome. Seien X eine Menge und h eine Abbildung der Potenzmenge PX in sich mit folgenden Eigenschaften:

(K1) $h(\emptyset) = \emptyset$

(K2) $A \subseteq hA$

(K3) $hhA = hA$

(K4) $h(A \cup B) = hA \cup hB$

für alle $A, B \subseteq X$. Es gibt genau eine Topologie auf X, so dass für jede Teilmenge A in X die Menge hA der Abschluss von A bezüglich dieser Topologie ist.

Ü20 – Abschluss. Eine Abbildung f zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für alle Teilmengen M der Quelle $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$ gilt.

1.4 Die Kategoriensprache

Wie schon zuvor betont, wird die Klasse der topologischen Räume erst dadurch interessant, weil man zwischen je zwei topologischen Räumen die Menge der stetigen Abbildungen betrachten kann. Die folgende Notiz ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit. Ihre Bedeutung ist deswegen aber nicht gering, ermöglicht sie es doch, komplizierte stetige Abbildungen aus einfachen stetigen Abbildungen zusammenzusetzen.

Notiz: Ist X ein topologischer Raum, so ist die Identität $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ eine stetige Abbildung. Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen, so ist auch die Komposition $gf\colon X \to Z$ stetig.

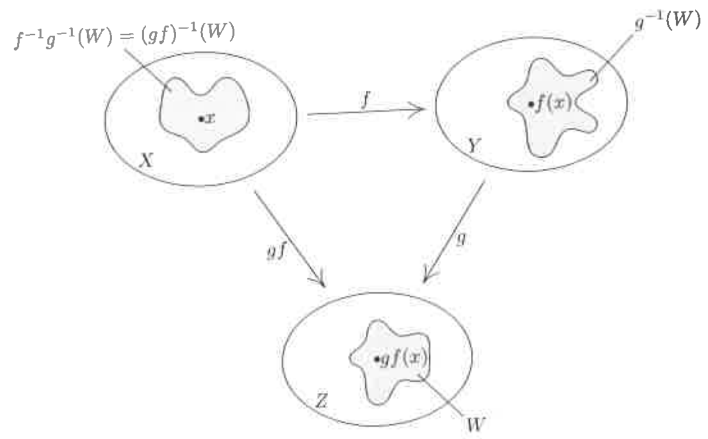

Abb. 1.5: Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.

Mit ‚gelehrten' Worten gesagt: Die Klasse der topologischen Räume bildet zusammen mit den stetigen Abbildungen zwischen ihnen eine Kategorie. In diesem Abschnitt soll erklärt werden, was das bedeutet.
Die Kategoriensprache eignet sich gut dazu, häufig wiederkehrende Phänomene und Konstruktionen in einen einheitlichen, konzeptionellen Rahmen zu fassen. Das Lernen der neuen Vokabeln wird sich schnell bezahlt machen. Die Standardreferenz ist (Mac98).

Definition: Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten. Zunächst einer Klasse, deren Elemente *Objekte* genannt werden. Dann für je zwei Objekte X und Y einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, deren Elemente *Morphismen* genannt werden. Statt $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ schreibt man oft $f\colon X \to Y$. Für je drei Objekte X, Y und Z braucht man eine Verknüpfung

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z),\ (g,f) \mapsto gf,$$

genannt *Komposition.* Schließlich muss es zu jedem Objekt X ein Element id_X in $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,X)$ geben, die *Identität* von X. Die einzigen Axiome, denen diese Daten genügen sollen, sind die Assoziativität der Komposition

$$h(gf) = (hg)f$$

und die Neutralität der Identitäten

$$f\,\mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y f.$$

♦

Bevor hier erste Beispiele für Kategorien genannt werden, soll das Wort ‚Klasse' kommentiert werden. Es wird in der Definition verwendet, weil die Objekte vieler Kategorien keine Menge bilden und weil man die berühmten Widersprüche der Mengenlehre vermeiden will. So kann man von einer Klasse sprechen, deren Objekte die Mengen sind, nicht aber von der Menge aller Mengen. Kategorien, deren Objekte eine Menge bilden, werden *klein* genannt. Es sei an dieser Stelle empfohlen, ohne schlechtes Gewissen über diese Feinheit hinwegzusehen, um sich gleich auf die interessanten Beispiele zu stürzen.

Beispiele: Beispiele für Kategorien gibt es in Hülle und Fülle. In vielen Beispielen von Kategorien sind die Objekte Mengen ‚mit Struktur' und die Morphismen sind die ‚strukturerhaltenden' Abbildungen. So gibt es etwa die Kategorie **Sets** der Mengen und Abbildungen, die Kategorie **Grp** der Gruppen und Gruppenhomomorphismen, die Kategorie **AbGrp** der abelschen Gruppen und ihrer Homomorphismen und die Kategorie der Ringe und Ringhomomorphismen. Ist K ein Körper, so gibt es die Kategorie der K-Vektorräume und K-linearen Abbildungen. Kurz gesagt: Die Algebra ist voller Kategorien. Und die Topologie beginnt damit, die Kategorie **Top** der topologischen Räume und stetigen Abbildungen zu definieren.

Die algebraische Topologie beschäftigt sich unter anderem damit, diese oder ähnliche Kategorien ‚topologischer Objekte' in Kategorien ‚algebraischer Objekte' abzubilden, um topologische Probleme dann mit algebraischer Hilfe zu bearbeiten. Die Abbildungen zwischen Kategorien haben übrigens einen eigenen Namen: Funktoren. Sie werden aber erst dann erklärt, wenn wir sie unbedingt brauchen: auf Seite 104.

Aus jeder Kategorie $\mathcal{C}$ kann die entgegengesetzte (engl. *opposite*) Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ produziert werden, indem man die Pfeilrichtungen umkehrt. Beide Kategorien haben also dieselben Objekte, aber die Morphismen $X \to Y$ in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ sind durch die Morphismen $Y \to X$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Das sieht auf den ersten Blick nicht sehr interessant aus, ist aber für theoretische Zwecke sehr nützlich. So gibt es zu jeder Vokabel der Kategoriensprache einen sogenannten ‚dualen' Begriff, den man durch Umdrehen aller Pfeile erhält; der eine Begriff unterscheidet sich dann von dem anderem oft nur durch die Vorsilbe ‚ko-'. Beispiele werden wir alsbald kennenlernen: Produkte und Koprodukte, Faserungen und Kofaserungen, simplizial und kosimplizial...

Definition: Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ wird ein *Isomorphismus* genannt, wenn wenn es einen Morphismus $g\colon Y \to X$ in die umgekehrte Richtung gibt, so dass $gf = \mathrm{id}_X$ und $fg = \mathrm{id}_Y$ gelten. (Man zeige, dass ein solches Inverses, falls existent, immer eindeutig ist.) Die Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen werden übrigens *Homöomorphismen* genannt. ♦

Zwei topologische Räume X und Y sind demnach homöomorph, wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $gf = \mathrm{id}_X$ und $fg = \mathrm{id}_Y$ gelten. Zwei homöomorphe Räume werden in der Topologie als gleichwertig angesehen, und eines der Grundprobleme der Topologie besteht darin, zu unterscheiden, ob zwei gegebene Räume homöomorph sind oder nicht. Wenn sie dann homöomorph sind, stellt sich gleich darauf die Frage, wieviele Homöomorphismen es denn zwischen ihnen gibt.
Eine wichtige Warnung gleich an dieser Stelle: Homöomorphismen sind automatisch bijektiv, aber nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus. Beispielsweise können wir jede Menge mit der diskreten Topologie und mit der Klumpentopologie versehen. Die Identität ist dann eine stetige Abbildung von der diskreten Topologie in die Klumpentopologie. Sobald die Menge mindestens zwei verschiedene Elemente hat, ist die Umkehrabbildung aber nicht stetig. Es gibt aber Klassen topologischer Räume, zwischen denen stetige Bijektionen schon Homöomorphismen sind. Ein entsprechender Satz findet sich auf Seite 58.

Definition: Ein Morphismus $f\colon X \to X$, also ein *Endomorphismus* von X, der auch ein Isomorphismus ist, heißt auch ein *Automorphismus* von X. Die Automorphismen bilden eine Gruppe bezüglich der Komposition, mit der Identität als neutralem Element, die *Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$. ♦

Viele Gruppen treten treten als Automorphismengruppen in Erscheinung. So sind die symmetrischen Gruppen die Automorphismengruppen der Menge $\{1, \ldots, n\}$, und die Automorphismengruppen der K-Vektorräume K^n sind die allgemeinen linearen Gruppen $GL(n, K)$.

Beispiel: Jede Gruppe G tritt als Automorphismengruppe eines Objektes einer Kategorie auf. Beispielsweise kann man die Kategorie betrachten, die genau ein Objekt hat, und deren (einzige) Morphismenmenge gerade G ist. Die Komposition und Identität sind dann durch die Gruppenstruktur gegeben. Das ist dann eine kleine Kategorie, denn sie hat nur ein Objekt. Die Automorphismengruppe dieses Objektes ist die Gruppe G. Deswegen wird diese Kategorie selber auch mit G bezeichnet. Gruppen sind im Wesentlichen dasselbe wie kleine Kategorien, mit genau einem Objekt, dessen Endomorphismen alle Isomorphismen sind.

Ist eine Komposition

$$X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{r} X$$

die Identität von X, also $rs = \mathrm{id}_X$, so heißt s ein *Schnitt* (oder *Rechtsinverses*) von r und r eine *Retraktion* (oder *Linksinverses*) von s. Man nennt X dann auch ein *Retrakt* von Y.

Ergänzung

Partiell geordnete Mengen. Eine *partiell geordnete Menge* ist eine kleine Kategorie, in welcher die Morphismenmengen jeweils höchstens ein Element haben, und in welcher jeder Isomorphismus eine Identität ist. Es wird $X \leqslant Y$ geschrieben, wenn es einen Pfeil $X \to Y$ gibt. Eine partiell geordnete Menge ist *linear geordnet*, wenn es zwischen je zwei Elementen genau einen Morphismus gibt.
Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, so ist die Topologie $\mathcal{T}_X$ eine Kategorie durch die Inklusionen der offenen Teilmengen untereinander. Das ist eine partiell geordnete Menge, die im Allgemeinen nicht linear geordnet ist. Diese Kategorien spielen in Kapitel 10 eine große Rolle.
Die partiell geordnete Menge $\{0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant \cdots \leqslant n\}$ wird mit $[n]$ bezeichnet. Sie ist linear geordnet. Diese Kategorien spielen in Kapitel 11 eine große Rolle. Die Objekte von $[n]$ sind die $n+1$ Zahlen $0, \ldots, n$. Es steht n demnach nicht für die Anzahl der Objekte, sondern für die ‚Dimension' der Kategorie: Man stellt sich die Objekte von $[n]$ als die Ecken eines n-Simplizes vor (siehe dort).

Übungen

Ü21 – Rechts- und Linksinverse. Seien f, g, h Morphismen in einer Kategorie $\mathcal{C}$, für die $gf = \mathrm{id}$ und $fh = \mathrm{id}$ gelte. Zeigen Sie, dass dann f ein Isomorphismus ist und $g = h$ gilt.

Ü22 – Homöomorphie. Wieviele paarweise nicht homöomorphe topologische Räume mit zwei Elementen gibt es? Im Allgemeinen ist die genaue Bestimmung der Anzahl der Homöomorphieklassen endlicher Räume mit vorgegebener Zahl von Elementen ein bisher ungelöstes Problem. Siehe etwa (Ern74) und auch (Sto66) für mehr zu endlichen topologischen Räumen.

Ü23 – Dreimal ist keinmal. Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf der Menge $X = \{1, 2, 3\}$. Dann ist die Homöomorphismengruppe von $(X, \mathcal{T})$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe mit $3! = 6$ Elementen. Man zeige: Es gibt keine Topologie $\mathcal{T}$ deren Homöomorphismengruppe genau drei Elemente hat. Gibt es überhaupt einen topologischen Raum, dessen Homöomorphismengruppe genau drei Elemente hat?