aus Laures/Szymik

4.3 Der Satz von Tychonoff

Dieser Abschnitt ist dem folgenden Satz über die Kompaktheit beliebiger Produkte gewidmet.

Satz 4.14 (Tychonoff)
Das Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ von kompakten Räumen X_i ist kompakt – für beliebige Indexmengen I.

Dieser Satz wird falsch, wenn Kompaktheit durch Folgenkompaktheit ersetzt wird (siehe Seite 62). Das liegt, etwas vage gesprochen, daran, dass beliebige Produkte abzählbarer Räume nicht wieder abzählbar zu sein brauchen; selbst der Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist ja überabzählbar.
Hier sehen wir also also einen weiteren Grund, topologische Räume nicht durch Eigenschaften von Folgen zu charakterisieren. Mit der Überdeckungseigenschaft stimmt der Satz, erfordert aber zum Beweis neue Techniken. Ein Beweis (mittels ‚Filtern') wird in diesem Abschnitt gegeben. Er kann bei der ersten Lektüre übergangen werden.
Es werden zunächst einige Begriffe eingeführt, die zu einer weiteren Charakterisierung der Kompaktheitseigenschaft führen. Diese überträgt sich dann von den Faktoren auf das Produkt.

Definition: Sei X eine Menge. Ein *Filter* auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{F}$ der Potenzmenge von X mit folgenden Eigenschaften

(F1) $F \in \mathcal{F}, F \subseteq F' \subseteq X \Longrightarrow F' \in \mathcal{F}$

(F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{F}$

(F3) $\mathcal{F} \neq \emptyset$

(F4) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

♦

Man stellt sich das am besten so vor, dass ein Filter nur Objekte einer bestimmten ‚Größe' enthält, die er ‚herausfiltert'. Zum Beispiel ist für jeden Punkt x eines topologischen Raumes X die Menge $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungen ein Filter auf der Menge X, der *Umgebungsfilter* von x.

Definition: Eine *Filterbasis* $\mathcal{B}$ auf X ist eine Menge von Teilmengen von X mit

(B1) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow$ es gibt ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq B_1 \cap B_2$

(B2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B3) $\emptyset \notin \mathcal{B}$

aus Laures/Szymik

♦

Eine Filterbasis $\mathcal{B}$ erzeugt einen Filter.

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{F \subseteq X \mid \text{Es gibt ein } B \text{ in } \mathcal{B} \text{ mit } B \subseteq F.\}$$

Zum Beispiel ist in metrischen Räumen

$$\langle \{U_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle = \mathcal{U}(x).$$

Für topologische Räume X kann man einen Konvergenzbegriff für Filter folgendermaßen einführen.

Definition: Ein Filter $\mathcal{F}$ *konvergiert* gegen $x \in X$, wenn $\mathcal{F}$ den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ enthält.

♦

Dieser Begriff ist eng mit dem gewöhnlichen Konvergenzbegriff von Folgen $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ verwandt: Ist $\mathcal{F}$ der Filter aller Teilmengen, die fast alle Folgenglieder enthalten, so konvergiert die Folge gegen x genau dann, wenn der Filter $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert.

Definition: Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt *Ultrafilter*, wenn jeder andere Filter auf X, der $\mathcal{F}$ enthält, mit $\mathcal{F}$ übereinstimmt.

♦

Das Lemma von Zorn aus der Mengenlehre besagt, dass man in teilweise geordneten Mengen immer maximale Elemente hat, solange alle geordneten Teilmengen obere Schranken besitzen. Wendet man dies auf die Menge aller Filter an, die $\mathcal{F}$ enthalten, so erhält man:

Satz 4.15
Jeder Filter liegt in einem Ultrafilter.

Beweis: Die oberen Schranken erhält man hierbei durch die Vereinigungen der Filter.

□

Ultrafilter haben eine überraschende Eigenschaft:

Satz 4.16
Seien $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X und A eine Teilmenge von X. Dann enthält $\mathcal{U}$ immer A selbst oder das Komplement von A.

Beweis: Wenn es ein $F \in \mathcal{F}$ gibt, welches A nicht schneidet, so umfasst das Komplement von A die Menge F und liegt nach (F1) also im Filter. Wenn andererseits alle Mengen des Filters A schneiden, so ist

$$\mathcal{F}' = \langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$$

ein Filter, der $\mathcal{F}$ enthält und stimmt also mit $\mathcal{F}$ überein. Somit liegt dann A im Filter.

□

aus Laures/Szymik

Satz 4.17
Ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter auf ihm konvergiert.

Beweis: Angenommen $\mathcal{F}$ ist ein nichtkonvergenter Ultrafilter auf X. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U(x)$, die nicht im Filter liegt. Endlich viele $U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_n)$ überdecken X, wenn X kompakt ist. Weil diese Mengen nicht im Ultrafilter liegen, müssen ihre Komplemente in $\mathcal{F}$ liegen. Weil aber ihr Durchschnitt leer ist, liegt hier ein Widerspruch zu (F4) vor.
Ist umgekehrt $(U_i \mid i \in I)$ eine Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung, so definiert

$$\langle\{X \setminus \bigcup_{i\in E} U_i \mid E \subseteq I \text{ endlich }\}\rangle$$

einen Filter. Seien $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, der diesen Filter enthält, und x sein Grenzwert. Das Element x liegt in einem U_{i_0} und somit liegt U_{i_0} im Filter $\mathcal{F}$. Der Filter kann aber nicht gleichzeitig U_{i_0} und sein Komplement enthalten, weil deren Durchschnitt leer ist. □

Beweis: (Satz von Tychonoff) Um den Satz von Tychonoff zu beweisen, genügt es jetzt, die Konvergenz von Ultrafiltern im Produkt $X = \prod_i X_i$ nachzuprüfen: Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, so auch jeder von seinen Projektionen erzeugte

$$\mathcal{F}_i = \langle\{\mathrm{pr}_i F \mid F \in \mathcal{F}\}\rangle.$$

Wegen der Kompaktheit der X_i konvergiert $\mathcal{F}_i$ gegen ein $x_i \in X_i$. Setze

$$x = (x_i \mid i \in I).$$

Dann konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x, denn ist U eine Umgebung von x im Produkt, so gibt es Umgebungen U_1 von x_1 in X_1, …, U_k von x_k in X_k mit

$$U \supseteq (\mathrm{pr}_{i_1}^{-1} U_1 \cap \ldots \cap \mathrm{pr}_{i_k}^{-1} U_k).$$

Die U_j liegen im Umgebungsfilter und somit in $\mathcal{F}_j$ für alle j. Also gibt es $V_j \in \mathcal{F}$ mit

$$U_j = \mathrm{pr}_{i_j} V_j,$$

und damit liegen auch die Obermengen $\mathrm{pr}_{i_j}^{-1} U_j$ von V_j in $\mathcal{F}$. Weil Filter abgeschlossen sind gegenüber endlichen Durchschnitten und Obermengenbildung, liegt auch U im Filter und der Beweis der Konvergenz ist vollendet. □