

Moderne Mathematik in elementarer Darstellung

2

Herausgegeben von
A. Kirsch (Kassel) und H. G. Steiner (Bielefeld)

Titel der Originalausgabe:

“Intuitive Concepts in Elementary Topology”.

Aus dem Amerikanischen übersetzt von Helmut Freund, Gerhard Holland und
Arnold Kirsch.

ISBN 3-525-40522-7

3. Auflage 1974

© Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs; Deutsche Übersetzung Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen 1964 — Printed in Germany — Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf foto- oder akustomechanischem Wege zu vervielfältigen.

VORWORT

Dieses Buch ist aus Aufzeichnungen zu einer halbsemestrigen Vorlesung über Topologie hervorgegangen, die vor Studenten mit Grundkenntnissen in der Differentialrechnung gehalten wurde. Der Text wurde später erweitert, so daß er sich für eine einsemestrige Vorlesung eignete; diese wird jetzt an der Oregon State University für Studenten im zweiten Studienjahre gelesen.

Die Topologie wird hier von einem mehr anschaulichen als axiomatischen Gesichtspunkt aus dargeboten. So stützen wir uns bei der Einführung zahlreicher Begriffe auf das Anschauungsvermögen des Lesers und benutzen diese Begriffe in naiver Weise. Formale Definitionen werden nur dort gegeben, wo sich die anschauliche Basis als nicht exakt genug erweist. Zum Beispiel findet sich in dem Buch keine Definition für den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum, obwohl dieser Raum für viele der behandelten Beispiele eine zentrale Rolle spielt. Auch gehen wir mit Mengen schon in naiver Weise um, ehe sie in Kapitel 6 in einer mehr formalen Weise eingeführt werden. Schließlich wird der Jordansche Kurvensatz mehrfach stillschweigend benutzt, bevor er in Kapitel 5 wenigstens für einen Spezialfall behandelt wird.

Es ist nicht möglich, in dieser kurzen Einführung alle Aspekte der Topologie zu entwickeln. Vielmehr wird der Leser mit einigen speziellen Gebieten der Topologie bekanntgemacht, so daß er eine gewisse Vertrautheit mit der Art ihrer Ergebnisse und mit ihren Beweismethoden erlangt. Eine kurze Erörterung allgemeiner mathematischer Beweisverfahren, darunter auch der vollständigen Induktion, findet sich in Kapitel 0. Es dürfte zweckmäßig sein, dieses Kapitel bei der Lektüre zunächst zu überschlagen und erst dann darauf zurückzugreifen, wenn in den anderen Kapiteln die betreffenden Beweisverfahren benötigt werden.

Am Anfang der Darstellung fassen wir die Topologie als „Geometrie auf einer Gummihaut“ auf. Die Kapitel 1, 2 und 4 behandeln einige Probleme über Kurvennetze und Landkarten. Obwohl alle diese Probleme leicht zu formulieren und auch aufzufassen sind,

konnten einige von ihnen trotz intensiver Bemühungen hervorragender Mathematiker bis heute nicht gelöst werden. Das Kapitel 3 vermittelt einige Übung im Erkennen der topologischen Äquivalenz von Figuren, allerdings noch immer von einem anschaulichen Standpunkt aus. In Kapitel 5 wird der Jordansche Kurvensatz für den Spezialfall eines Polygons bewiesen. Dieser Satz ist für die Topologie der Ebene von grundlegender Bedeutung. Kapitel 6 gibt eine Einführung in die Mengenlehre.

Die letzten Kapitel haben in diesem einführenden Lehrgang ein besonderes Gewicht. In Kapitel 7 werden Abbildungen behandelt und insbesondere die topologischen Abbildungen oder Homöomorphismen definiert. Dabei knüpft die Darstellung durch häufige Bezugnahme auf bekannte Funktionen an die Vorkenntnisse des Lesers an. Weiter wird der Index einer Abbildung definiert und dieser Begriff dann zu Beweisen des Brouwerschen Fixpunktsatzes und des Fundamentalsatzes der Algebra benutzt. In Kapitel 8 verallgemeinern wir den anschaulichen Begriff des dreidimensionalen Raumes zum Begriff des metrischen Raumes. Eine weitere Verallgemeinerung führt dann zum topologischen Raum, der an vielen Beispielen erläutert wird. Die letzten drei Abschnitte behandeln die Begriffe Zusammenhang, Kompaktheit und Vollständigkeit.

Zahlreiche Veröffentlichungen wurden bei der Niederschrift des Buches herangezogen. Verschiedene Aufgaben und einige Beweise beruhen auf Material aus diesen Quellen; auch wurden zwei Figuren übernommen¹. Zu besonderem Dank verpflichtet ist der Autor Herrn Professor Harry E. Goheen, Fräulein Patricia Prenter und Herrn Professor Sheldon T. Rio, von denen jeder das Manuskript in einem gewissen Stadium gelesen und wertvolle Anregungen gegeben hat. Selbstverständlich ist aber der Autor für die endgültige Darstellung allein verantwortlich.

Schließlich seien drei Symbole erläutert, die dem Leser besondere Hinweise geben sollen: Aufgaben, auf die im späteren Text Bezug genommen wird, sind durch „^o“ gekennzeichnet; besonders schwierige Aufgaben durch „*“. Das Symbol „ \llcorner “ zeigt das Ende eines Beweises an.

B. H. Arnold

INHALT

	Seite
0. Aussagen und Beweise in der Mathematik	9
0-1 Aussagen	9
0-2 Beweise	18
0-3 Vollständige Induktion	22
1. Was ist Topologie?	30
1-1 Ein Blick auf die euklidische Geometrie	30
1-2 Was ist Topologie?	31
2. Netze und Landkarten	36
2-1 Das Durchlaufen von Netzen	36
2-2 Ebene Netze	45
2-3 Das Vierfarbenproblem	48
3. Topologische Äquivalenz im dreidimensionalen Raum	62
3-1 Topologische Äquivalenz	62
3-2 Klassifikation der Flächen	68
4. Landkarten auf einer Kugel mit Henkeln	78
4-1 Einführung	78
4-2 Einfach zusammenhängende Mengen	78
4-3 Der Eulersche Satz	82
4-4 Der Siebenfarbensatz für den Torus	91
5. Der Jordansche Kurvensatz	95
5-1 Einführung	95
5-2 Ein Beweis für den Fall eines Polygons	96
6. Mengen	100
6-1 Einführung	100
6-2 Relationen zwischen Mengen	100
6-3 Operationen für Mengen	109

¹) Anm. d. Übers.: Für den genauen Quellennachweis sei auf das englische Original des Buches verwiesen.

Was ist Topologie?

1—1 Ein Blick auf die euklidische Geometrie

Eine formale Definition des Begriffes „Topologie“ wird in Abschnitt 7—3 gegeben; vorläufig mag eine anschauliche Erklärung genügen. Wir erhalten eine anschauliche Vorstellung von der Topologie, wenn wir diejenigen Punkte erkennen, in denen sie mit der gewöhnlichen, auf der Schule betriebenen (euklidischen) Geometrie übereinstimmt bzw. von dieser abweicht.

Euklidische Geometrie ist das Studium gewisser Eigenschaften von ebenen und räumlichen Figuren. Nicht alle Eigenschaften einer

Figur sind von Interesse — nur die „geometrischen“. Wie kann man aber entscheiden, ob irgendeine Eigenschaft eine geometrische Eigenschaft ist oder nicht? Betrachten wir etwa die folgenden Eigenschaften des in Fig. 1.1 dargestellten Dreiecks:

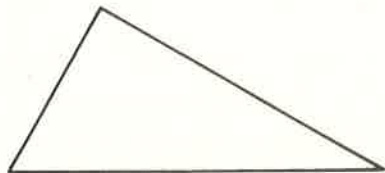


Fig. 1.1

- (1) Die Länge der längsten Seite beträgt ungefähr 5 cm.
- (2) Das Dreieck ist mit schwarzer Tinte gezeichnet.
- (3) Einer der Winkel ist ungefähr 90° groß.
- (4) Das Dreieck ist nahe am linken Rand der Seite gezeichnet.
- (5) Derjenige Winkel, der ungefähr 90° groß ist, liegt von allen Winkeln am weitesten oben auf der Seite.

Welche dieser Eigenschaften sind nun geometrische Eigenschaften?

Die Antwort auf diese Frage kann mit Hilfe des Begriffes der Kongruenz von Figuren gegeben werden. Zwei Figuren werden dann und nur dann kongruent genannt, wenn die eine so auf die andere gelegt werden kann, daß sich beide genau decken. Die geometrischen Eigenschaften einer Figur sind nun diejenigen, die auch jede zu ihr kongruente Figur besitzt. Wenn man Geometrie betreibt, so faßt man alle zueinander kongruenten Figuren als gleich auf, und bei der Untersuchung einer Figur ist man nur an denjenigen Eigenschaften

interessiert, die diese mit allen zu ihr kongruenten Figuren gemeinsam hat. Man sieht nun leicht, daß die oben angeführten Eigenschaften (1) und (3) geometrische Eigenschaften des Dreiecks in Fig. 1.1 sind; denn sie werden von allen Dreiecken geteilt, die zu dem gegebenen kongruent sind. Die Eigenschaften (2), (4) und (5) sind hingegen keine geometrischen Eigenschaften, da ein zu dem gegebenen Dreieck kongruentes Dreieck diese Eigenschaften nicht zu besitzen braucht. Die Eigenschaft einer Figur, vier Ecken zu besitzen, ist ebenso wie die Eigenschaft, ein Fünfeck zu sein, eine geometrische Eigenschaft. Weitere Beispiele finden sich in den Übungsaufgaben.

1—2 Was ist Topologie?

Es ist überraschend, daß man eine schon recht befriedigende Beschreibung dessen, was Topologie ist, erhält, wenn man in dem Abschnitt 1—1 die Wörter „Geometrie“ und „geometrisch“ durch „Topologie“ bzw. „topologisch“ ersetzt und darüber hinaus die Interpretation eines einzigen Ausdruckes ändert. Der Grund dafür, daß wir dort nicht nur beschrieben haben was Geometrie, sondern auch was Topologie ist, liegt darin, daß sich der einzige Unterschied zwischen ihnen in dem Ausdruck „kann gelegt werden auf“ verbirgt, welcher in der Definition von „Kongruenz“ vorkommt. Wir wollen diesen Ausdruck näher untersuchen. Wie können wir eine Figur „auf eine andere legen“? In welcher Weise können wir sie bewegen? Was dürfen wir unterwegs mit ihr tun? In der Geometrie sind nur starre Bewegungen erlaubt, das sind solche, bei denen sich der Abstand je zweier Punkte der Figur nicht ändert (Parallelverschiebungen, Drehungen und Spiegelungen). Somit sind die geometrischen Eigenschaften diejenigen, die gegenüber den starren Bewegungen invariant sind — keine geometrische Eigenschaft einer Figur wird durch eine starre Bewegung im geringsten geändert.

In der Topologie könnte man die erlaubten Bewegungen als elastische Bewegungen bezeichnen. Wir können uns vorstellen, daß unsere Figuren aus vollkommen elastischem Gummi hergestellt sind und daß wir eine Figur beim Bewegen in beliebiger Weise dehnen, stauchen, verbiegen und verwinden dürfen. Es ist uns sogar erlaubt, eine solche Figur aus Gummi auseinanderzuschneiden und zu verknoten, wenn wir nur hinterher die beiden Schnittstellen wieder so zusammenheften, wie sie vorher waren, d. h. so, daß Punkte, die vor

dem Aufschneiden zusammenfielen, auch nach dem Zusammenheften wieder zusammenfallen. Bei einer elastischen Bewegung müssen wir jedoch sorgfältig darauf achten, daß verschiedene Punkte einer Figur verschieden bleiben; zwei verschiedene Punkte dürfen wir nicht zu einem einzigen zusammenfallen lassen. Zwei Figuren sind nun *topologisch äquivalent* genau dann, wenn man die eine durch eine elastische Bewegung mit der anderen zur Deckung bringen kann. Die topologischen Eigenschaften einer Figur sind diejenigen, die auch alle zu ihr topologisch äquivalenten Figuren besitzen. Wenn man Topologie betreibt, so faßt man alle zueinander topologisch äquivalenten Figuren als gleich auf, und wenn man eine Figur untersucht, so ist man nur an denjenigen Eigenschaften interessiert, die diese mit allen zu ihr topologisch äquivalenten Figuren gemeinsam hat. Somit sind die topologischen Eigenschaften einer Figur diejenigen, die gegenüber elastischen Bewegungen invariant sind. Keine topologische Eigenschaft einer Figur wird durch eine elastische Bewegung im geringsten geändert. Topologie erweist sich somit als das Studium der topologischen Eigenschaften von Figuren. Selbstverständlich ist jede topologische Eigenschaft einer Figur auch eine geometrische Eigenschaft, während umgekehrt viele geometrische Eigenschaften keine topologischen Eigenschaften sind. Nur ganz fundamentale geometrische Eigenschaften einer Figur können topologische Eigenschaften sein. Es mag sogar auf den ersten Blick so scheinen, daß es gar keine topologischen Eigenschaften gibt — daß nämlich jede Eigenschaft einer Figur durch irgendeine elastische Bewegung ge-

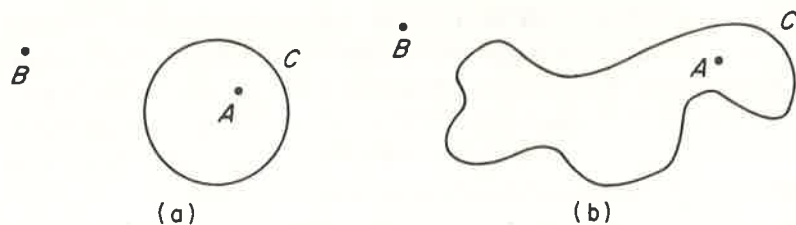


Fig. 2.1

ändert werden kann. Glücklicherweise ist dies nicht der Fall. Beispielsweise teilt der Kreis C (Fig. 2.1a) die Punkte einer Ebene in drei Klassen ein — in die Punkte innerhalb des Kreises, die Punkte auf dem Kreis und die Punkte außerhalb des Kreises. Diese Eigenschaft eines in der Ebene liegenden Kreises ist eine topologische Eigenschaft. Stellen wir uns nämlich vor, daß der Kreis und die

beiden Punkte A und B auf einer vollkommen elastischen Gummihaut gezeichnet sind und daß die Figur einer elastischen Bewegung unterworfen wird, so könnte das Resultat die in Fig. 2.1b gezeichnete Kurve C mit den beiden Punkten A und B sein. Die Punkte A und B liegen innerhalb bzw. außerhalb des Kreises (Fig. 2.1a), und nach der elastischen Bewegung der Gummihaut liegen sie weiterhin innerhalb bzw. außerhalb der Kurve C (Fig. 2.1b). Somit ist die Eigenschaft „ A liegt innerhalb der Kurve C “ eine topologische Eigenschaft der ursprünglichen Figur. Dagegen ist die Eigenschaft „ A liegt näher an C als B “ keine topologische Eigenschaft, da wir stets durch eine elastische Bewegung erreichen können, daß B sehr nahe an C liegt und A weit von C entfernt.

Ein weiteres Beispiel zeigt Fig. 2.2. Hier sind der Kreis und die verknotete Kurve topologisch äquivalent. Stellen wir uns nämlich ein zu einem Kreis geschlossenes Gummiband vor, so können wir dieses zwar nicht durch bloßes Dehnen und Biegen in einen Knoten verwandeln; wir erhalten jedoch leicht die verknotete Kurve, wenn wir das Band zuerst an einer Stelle zerschneiden, dann den Knoten knüpfen und schließlich die beiden Enden wieder so aneinander heften, wie sie vorher waren. Da diese Manipulationen unter das fallen, was wir als elastische Bewegung bezeichnet haben, sind die beiden Kurven topologisch äquivalent.

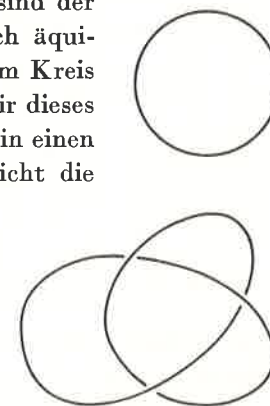


Fig. 2.2

Andere Beispiele finden sich in den Übungsaufgaben.

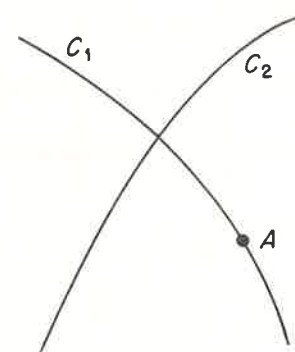


Fig. 2.3

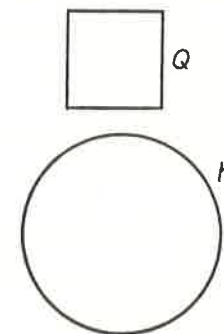


Fig. 2.4

A U F G A B E N

1. (a) Suche zu jeder der Eigenschaften (2), (4) und (5) aus Abschnitt 1—1 ein Dreieck, welches zu dem Dreieck der Fig. 1.1 kongruent ist und die betreffende Eigenschaft nicht besitzt.

(b) Gib eine elastische Bewegung der Ebene in Fig. 2.1a an, durch die der Punkt B näher an der Kurve C zu liegen kommt als der Punkt A .

Anweisung für die Aufgaben 2 und 3: Für jede der Figuren 2.3 und 2.4 sind verschiedene Eigenschaften angegeben. Es ist zu entscheiden, welche dieser Eigenschaften geometrisch und welche topologisch sind.

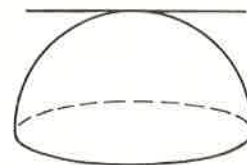
2. Die folgenden Eigenschaften beziehen sich auf Fig. 2.3.

- Die Kurven C_1 und C_2 schneiden sich.
- Die Kurven C_1 und C_2 schneiden sich senkrecht.
- Die Kurven C_1 und C_2 berühren sich nicht.
- Der Punkt A liegt auf der Kurve C_1 .
- Der Punkt A liegt nicht auf der Kurve C_2 .
- Der Punkt A liegt unterhalb der Kurve C_2 .
- Die Kurve C_2 ist konkav zum Punkt A .

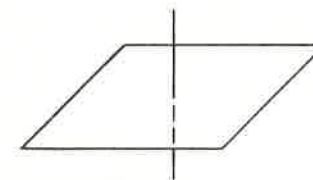
3. Die folgenden Eigenschaften beziehen sich auf Fig. 2.4.

- Die Figur besteht aus einem Quadrat und einem Kreis in einer Ebene.
- Die Figur besteht aus zwei Kurven, die in einer Ebene liegen; die eine von ihnen hat vier Ecken, die andere ist glatt.
- Die von der Kurve Q eingeschlossene Fläche ist kleiner als die von der Kurve K eingeschlossene Fläche.
- Die von der oberen Kurve eingeschlossene Fläche ist kleiner als die von der unteren Kurve eingeschlossene Fläche.
- Die Kurven Q und K schneiden sich nicht.
- Es gibt keinen Punkt, der sowohl von Q als auch von K eingeschlossen wird.

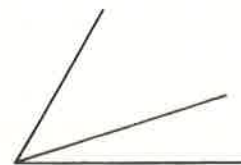
4. In Fig. 2.5 sind vier Paare von Figuren gezeichnet. Welche dieser Paare sind topologisch äquivalent?



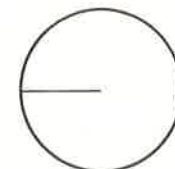
Halbkugel mit berührender Strecke



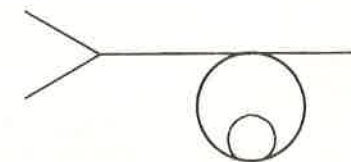
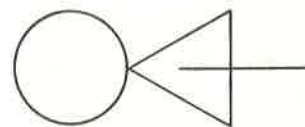
Quadratische Scheibe von einer Strecke durchsetzt



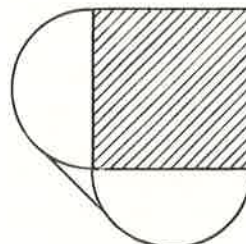
Drei Strecken mit einem gemeinsamen Endpunkt



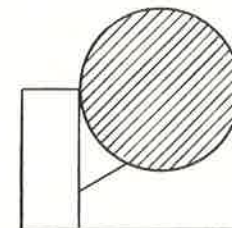
Kreis mit Radius



Diese Figuren sind nur aus Strecken und Kurven zusammengesetzt, Flächenstücke gehören nicht dazu



(d)



Jede dieser Figuren besteht aus einem Flächenstück und aus Strecken und Kurven

Netze und Landkarten

2—1 Das Durchlaufen von Netzen

Die ostpreußische Stadt Königsberg ist dort gelegen, wo Alter und Neuer Pregel sich zum Pregelfluß vereinen. An der Stelle des Zusammenflusses bilden sie eine Insel. Im 18. Jahrhundert gab es dort sieben Brücken, deren Anordnung Fig. 1.1 zeigt. (Inzwischen sind zwei weitere Brücken hinzugekommen.) Es wurde damals die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, bei einem Rundgang durch Königsberg jede der sieben Brücken genau einmal zu überqueren. Dieses Problem wurde, zusammen mit vielen verwandten Problemen, von dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707—1783) im Jahre 1736 in der folgenden Weise gelöst.

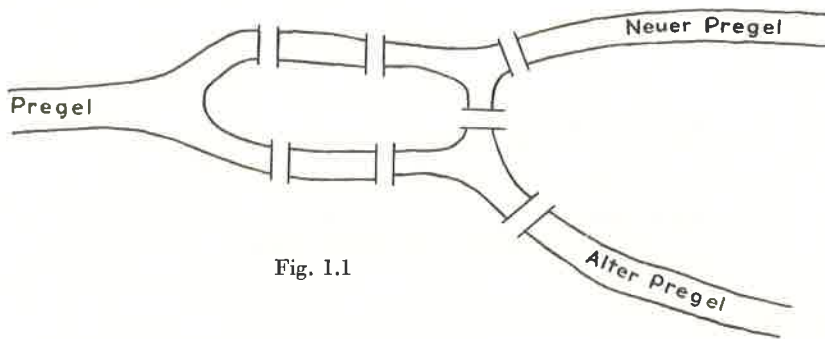


Fig. 1.1

Man beachte zunächst, daß die tatsächliche Gestalt des Ufergeländes, die Lage der Insel usw. unwesentlich sind. Wir können die

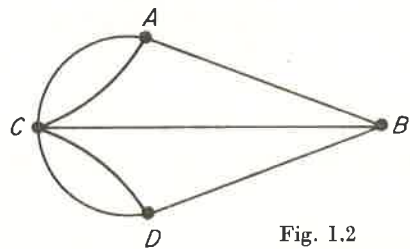


Fig. 1.2

Figur 1.1 durch die einfachere Figur 1.2 ersetzen, die uns zeigt, wie die einzelnen Stadtteile durch Brücken miteinander verbunden sind. So repräsentiert der Punkt A in Fig. 1.2 den ganzen nördlich des Flusses gelegenen Stadtteil. In entspre-

chender Weise repräsentiert der Punkt D den südlich des Flusses gelegenen Teil, der Punkt B das zwischen Alter und Neuer Pregel gelegene Gebiet und der Punkt C die Insel. Die die einzelnen Stadtteile miteinander verbindenden Brücken werden durch Strecken oder Kurvenstücke wiedergegeben. Eine Strecke oder eine Kurve, die man durch eine elastische Bewegung aus einer Strecke erhalten kann, wird ein *Bogen* genannt. Wir wollen dabei auch zulassen, daß die beiden Enden eines Bogens zusammenfallen (so daß eine kreisförmige Kurve entsteht); auch in diesem Fall wollen wir die Kurve als Bogen bezeichnen. Jedoch darf ein Bogen sich nicht selbst schneiden, d. h. die Endpunkte sind die einzigen Punkte eines Bogens, die zusammenfallen dürfen. (Man beachte, daß wir hier von der üblichen Terminologie abweichen. Gewöhnlich verlangt man, daß die Endpunkte eines Bogens verschiedene Punkte sind; jedoch ist es hier zweckmäßig, ihr Zusammenfallen zuzulassen.) Das Studium des Königsberger Brückenproblems hat uns zu einer Figur geführt, die aus sieben Bögen und vier Punkten besteht. Bevor wir jedoch Eulers Lösung weiter verfolgen, ist es zweckmäßig, eine allgemeine Terminologie einzuführen, die auch in anderen Zusammenhängen von Interesse ist.

Ein *Netz* ist eine ebene oder räumliche Figur, die aus einer endlichen (nicht verschwindenden) Anzahl von Bögen besteht. Dabei dürfen sich je zwei Bögen höchstens in ihren Endpunkten treffen. Die Endpunkte der Bögen werden als *Ecken* des Netzes bezeichnet. Fig. 1.2 zeigt ein Netz mit sieben Bögen und vier Ecken. Andere Beispiele von Netzen finden sich in Fig. 1.3. Hier sind die Ecken durch Fettdruck hervorgehoben. Wir wollen uns aber nicht immer an diese besondere Markierung halten. Es muß dann gelegentlich willkürlich entschieden werden, welche Punkte Ecken sein sollen. Beispielsweise müssen in Figur 1.3b nur die Punkte A und B Ecken sein, während im übrigen die Wahl weiterer Punkte als Ecken willkürlich ist.

Die *Ordnung* einer Ecke in einem Netz ist die Anzahl der Bogenenden in dieser Ecke. Eine Ecke ist genau dann *ungerade* bzw. *gerade*, wenn ihre Ordnung ungerade bzw. gerade ist. In Fig. 1.2 haben die Ecken A , B und D die Ordnung 3, während die Ecke C die Ordnung 5 hat. Somit ist jede der vier Ecken ungerade. In Fig. 1.3e ist die einzige Ecke gerade und von der Ordnung 2, da auf ihr zwei Bogenenden liegen. Wie man sieht, handelt es sich bei den beiden Bogenenden um die Enden ein und desselben Bogens.

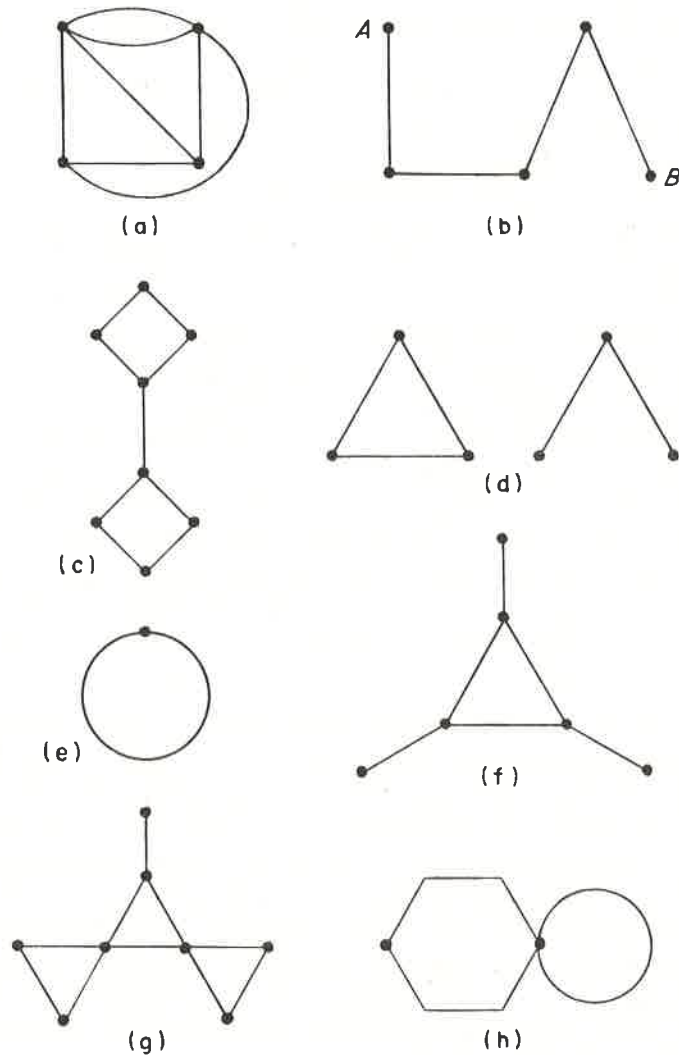


Fig. 1.3. Beispiele für Netze

Die Gesamtzahl aller Bögen eines Netzes kann eine beliebige positive ganze Zahl sein. Dasselbe gilt für die Gesamtzahl aller Ecken. Andererseits hat jeder Bogen zwei Enden, so daß die Gesamtzahl aller Bogenenden doppelt so groß wie die Anzahl aller Bögen und somit gerade ist. Nun ist die Gesamtzahl der Bogenenden eines Netzes gleich der Summe der Ordnungen aller Ecken des Netzes. Somit ist die Summe der Ordnungen aller Ecken in einem Netz eine positive

gerade Zahl. Die Frage, ob es möglich ist, sowohl die Anzahl der Bögen als auch die Anzahl der Ecken in einem Netz willkürlich vorzugeben, wird in der Übungsaufgabe 6 behandelt.

Unter einem *Weg* in einem Netz versteht man eine Folge verschiedener Bögen, die in einem Zug durchlaufen werden können, wobei kein Bogen zweimal durchlaufen werden darf. Bei jedem Bogen der Folge muß man daher das eine Bogenende als Anfang und das andere Bogenende als Ende auffassen. Am Ende des ersten und am Anfang des zweiten Bogens muß dieselbe Ecke liegen. Entsprechend ist die Ecke des zweiten Bogens Anfangsecke des dritten Bogens usw. Eine Ecke, die zu einem Bogen des Weges gehört, wird als Ecke des Weges bezeichnet. Die Anfangsecke des ersten Bogens heißt *Anfangsecke* des Weges, die Ecke des letzten Bogens heißt *Endecke* des Weges. Ein Weg heißt *geschlossen* genau dann, wenn Anfangs- und Endecke derselbe Punkt sind. Wege werden gelegentlich durch Angabe der durchlaufenen Ecken gekennzeichnet. Diese Kennzeichnung kann aber mehrdeutig sein; beispielsweise gibt es im Netz der Fig. 1.2 vier verschiedene Wege, die durch *ACBACD* gekennzeichnet werden könnten. Ist eine eindeutige Kennzeichnung erforderlich, so kann man zusätzliche Punkte markieren, die keine Ecken sind und mit deren Hilfe man dann den gemeinten Weg eindeutig kennzeichnen kann.

Beispiel 1.1.

In Fig. 1.4 gibt es zwei verschiedene Wege, die durch *ABC* gekennzeichnet werden, jedoch wird nur einer von ihnen durch *ADBC* gekennzeichnet.

Beispiel 1.2.

Der Weg *ADBCA* (Fig. 1.4) besteht aus den Bögen *ADB*, *BC* und *CA*. Die Ecke *A* ist sowohl Anfangs- als auch Endecke des Weges; der Weg ist somit geschlossen. Die Ecke *C* ist Endecke des Bogens *BC* und Anfangsecke des Bogens *CA*.

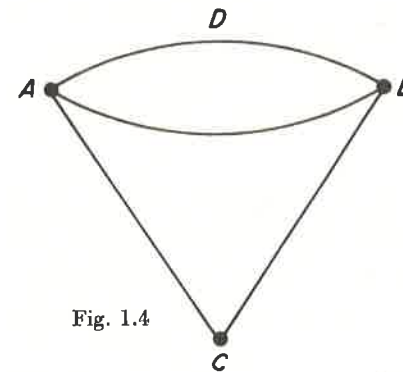


Fig. 1.4

Ein Netz ist *zusammenhängend* genau dann, wenn je zwei verschiedene Ecken des Netzes Ecken irgendeines Weges des Netzes sind. Das Netz der Figur 1.3d ist nicht zusammenhängend, während alle anderen Netze der Figur 1.3 zusammenhängend sind.

Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun einige allgemeine Sätze über Netze beweisen, aus denen dann die Lösung des Königsberger Brückenproblems leicht folgt.

Satz 1.1. In jedem Netz ist die Gesamtzahl aller ungeraden Ecken gerade.

Beweis: Es sei irgendein Netz gegeben. Für jede natürliche Zahl i sei n_i die Anzahl der Ecken des Netzes von der Ordnung i . Ferner sei N die Gesamtzahl der ungeraden Ecken und D die Gesamtzahl aller Bogenenden. Die Gesamtzahl der ungeraden Ecken ist die Summe der Anzahlen der Ecken der Ordnungen 1, 3, 5, ..., d. h.

$$N = n_1 + n_3 + n_5 + \dots$$

(Die Summe auf der rechten Seite hat nur endlich viele Summanden, ihre Anzahl hängt von dem betrachteten Netz ab. Wir wollen diese Schreibweise hier und in Abschnitt 2—3 benutzen; unendliche Reihen kommen nicht vor.) Entsprechend ist die Gesamtzahl D aller Bogenenden die Summe der Anzahlen der Bogenenden in den Ecken der Ordnungen 1, 2, 3, ... Die n_1 Ecken der Ordnung 1 liefern dabei genau n_1 Bogenenden, die n_2 Ecken der Ordnung 2 liefern $2n_2$ Bogenenden usw. Somit ergibt sich

$$D = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots$$

Daraus folgt

$$D - N = 2n_2 + 2n_3 + 4n_4 + 4n_5 + \dots,$$

so daß $D - N$ eine gerade Zahl ist. Ferner ist D eine gerade Zahl, da jeder Bogen genau zwei Enden hat. Somit ist $D - (D - N) = N$ eine gerade Zahl \llcorner .

Wir sagen nun: ein Weg eines Netzes *durchläuft* das Netz genau dann, wenn jeder Bogen des Netzes in dem Weg vorkommt. Ein System von mehreren Wegen eines Netzes durchläuft das Netz genau dann, wenn jeder Bogen des Netzes in genau einem der gegebenen Wege vorkommt.

Das Königsberger Brückenproblem läßt sich nun in folgender Weise formulieren: Gibt es einen Weg, welcher das Netz in Fig. 1.2 durchläuft? Die folgenden vier Sätze geben die Bedingungen an, unter denen ein Netz von einem oder mehreren Wegen durchlaufen werden kann.

Satz 1.2. Hat ein Netz mehr als zwei ungerade Ecken, so kann es nicht von einem einzigen Weg durchlaufen werden.

Beweis: Wir beweisen die zu der Behauptung äquivalente Aussage: Wenn ein Netz von einem einzigen Weg durchlaufen werden kann, dann sind höchstens zwei Ecken des Netzes ungerade.

Es sei a_1, a_2, \dots, a_n eine Folge von Bögen, die einen Weg bilden, der das gegebene Netz durchläuft. Ferner sei A irgendeine Ecke, die von der Anfangs- und der Endecke des Weges verschieden ist. Die beiden zuletzt genannten Ecken können zusammenfallen oder verschieden sein. Wir wollen jetzt zeigen, daß A eine gerade Ecke des Netzes sein muß. Wir stellen uns dazu einen Punkt vor, der in der Anfangsecke von a_1 beginnend, diesen Bogen bis zu seiner Endecke (die zugleich Anfangsecke von a_2 ist) durchläuft und der dann weiter den Bogen a_2 bis zu dessen Endecke durchläuft (die wiederum die Anfangsecke von a_3 ist) und so fort, bis er schließlich in der Endecke von a_n anlangt. Jedesmal, wenn dieser Punkt die Ecke A passiert, durchläuft er zwei Bogenenden in A — einen bei seiner Ankunft und einen beim Verlassen der Ecke. Somit muß die Gesamtzahl der Bogenenden in A gerade sein, so daß A eine gerade Ecke ist \llcorner .

Satz 1.3. Wenn ein zusammenhängendes Netz keine ungeraden Ecken hat, kann es stets von einem einzigen Weg durchlaufen werden. Darüber hinaus kann die Anfangsecke A_0 des Weges willkürlich gewählt werden, und als erster Bogen a_1 der den Weg bildenden Folge von Bögen kann jeder Bogen des Netzes gewählt werden, der A_0 als Ecke hat.

Beweis: In dem Netz seien der Bogen a_1 und dessen Anfangsecke A_0 vorgegeben. Ferner werde die Endecke von a_1 mit A_1 bezeichnet (A_1 und A_0 können identisch sein). Nun bildet man in dem Netz in folgender Weise eine Folge von Bögen: Es sei a_2 irgendein von a_1 verschiedener Bogen des Netzes, der A_1 als eine seiner Ecken hat. Man wähle A_1 als Anfangsecke von a_2 und bezeichne dessen Endecke mit A_2 . Nun sei a_3 irgendein von a_1 und a_2 verschiedener Bogen des Netzes, der A_2 als eine seiner Ecken hat. Man nimmt wiederum A_2 als Anfangsecke von a_3 und nennt die Endecke A_3 , und so fort. Wenn man diesen Prozeß so weit wie möglich fortführt, erhält man eine Folge a_1, a_2, \dots, a_n von verschiedenen Bögen, die einen Weg in dem Netz bilden. Wenn nun die Endecke A_n des Bogens a_n von

der Ecke A_0 verschieden wäre, würde der Weg a_1, a_2, \dots, a_n eine ungerade Anzahl von Bogenenden in A_n liefern (nämlich zwei bei jedem Durchgang durch A_n und einen beim Einmünden von a_n in A_n). Da aber jede Ecke des Netzes gerade ist, gäbe es einen von den a_1, a_2, \dots, a_n verschiedenen Bogen, der A_n als Ecke hat, und der Prozeß könnte fortgesetzt werden. Somit muß A_n mit A_0 zusammenfallen, wenn der Prozeß so weit wie möglich fortgesetzt worden ist. Der Weg, den man erhält, ist geschlossen.

Falls der Weg a_1, a_2, \dots, a_n bereits das ganze Netz durchläuft, ist der Beweis fertig. Ist das nicht der Fall, so gibt es einen von den a_1, a_2, \dots, a_n verschiedenen Bogen b_1 , dessen eine Ecke B_0 , da das Netz als zusammenhängend vorausgesetzt wurde, mit einer der Ecken des Weges a_1, a_2, \dots, a_n identisch ist; es sei etwa $B_0 = A_p$. Nun kann man das Verfahren erneut mit dem Bogen b_1 beginnen, wobei man B_0 als Anfangsecke nimmt. Man erhält dann einen Weg b_1, b_2, \dots, b_m aus Bögen, die untereinander und von den a_1, a_2, \dots, a_n verschieden sind. Man kann nun diese beiden geschlossenen Wege zu einem einzigen verbinden, indem man die Folge

$$a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_m, a_{p+1}, \dots, a_n$$

bildet. Die Endecke von a_p ist mit der Anfangsecke von b_1 identisch und ebenso die Endecke von b_m mit der Anfangsecke von a_{p+1} . Somit ist diese Folge von Bögen ein Weg. Wenn dieser erweiterte Weg das ganze Netz durchläuft, ist der Beweis erbracht. Andernfalls kann man den Weg noch einmal erweitern. Da es in dem Netz nur eine endliche Anzahl von Bögen gibt, muß die wiederholte Erweiterung schließlich zu einem Weg führen, der das ganze Netz durchläuft. (Übungsaufgabe 11 bezieht sich auf die logische Struktur dieses Beweises) «

Satz 1.4. Wenn ein zusammenhängendes Netz genau zwei ungerade Ecken besitzt, kann es von einem einzigen Weg durchlaufen werden, dessen Anfangs- und Endecke die beiden ungeraden Ecken des Netzes sind.

Beweis: Es sei ein Netz gegeben, in dem A und B die beiden einzigen ungeraden Ecken sind. Man kann nun ein neues erweitertes Netz bilden, indem man A und B durch einen neuen Bogen a_0 verbindet. In diesem neuen Netz ist jede Ecke gerade. Nach Satz 1.3 gibt es einen Weg a_0, a_1, \dots, a_n , der das neue Netz durchläuft.

Dann durchläuft aber der Weg a_1, a_2, \dots, a_n das ursprüngliche Netz, wobei Anfangs- und Endecke dieses Weges die beiden ungeraden Ecken A und B sind «.

Satz 1.5. Wenn ein zusammenhängendes Netz genau $2n$ ungerade Ecken hat, kann es von einem System von n Wegen durchlaufen werden, aber von keinem System, das weniger als n Wege enthält.

Beweis: Aufgabe 3 «.

A U F G A B E N

1. (a) Löse das Königsberger Brückenproblem (Fig. 1.1 und 1.2).
(b) Heutzutage gibt es neun Brücken in Königsberg, deren Anordnung Fig. 1.5 zeigt (eine davon ist eine Eisenbahnbrücke). Ist es möglich, einen Spaziergang in Königsberg zu machen, der jede dieser Brücken genau einmal passiert? Ist dies möglich, wenn man die Eisenbahnbrücke ausschließt?
(c) Welche der Netze in Fig. 1.3 können von einem einzigen Weg durchlaufen werden?

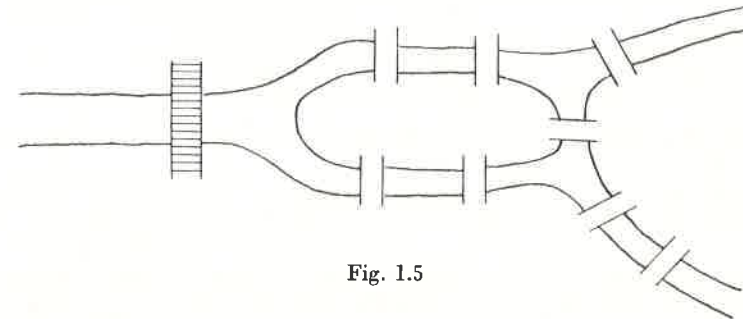


Fig. 1.5

2. Fig. 1.6 zeigt den Grundriß eines einstöckigen Hauses von 5 Zimmern. Ist es möglich, durch jede Tür genau einmal zu gehen?

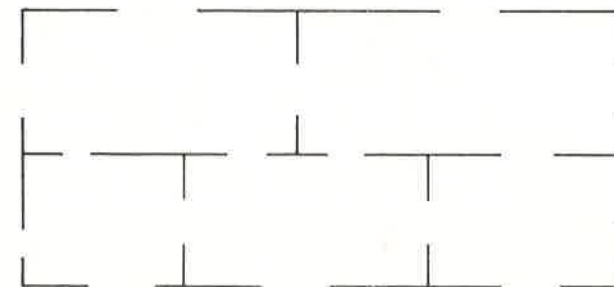


Fig. 1.6

3. Beweise Satz 1.5.

4. Zu jedem der Netze in Fig. 1.7 ist ein System von Wegen anzugeben, welches das Netz durchläuft und aus möglichst wenigen Wegen besteht. (Anleitung: Bestimme zunächst, welche Punkte Ecken sind.)

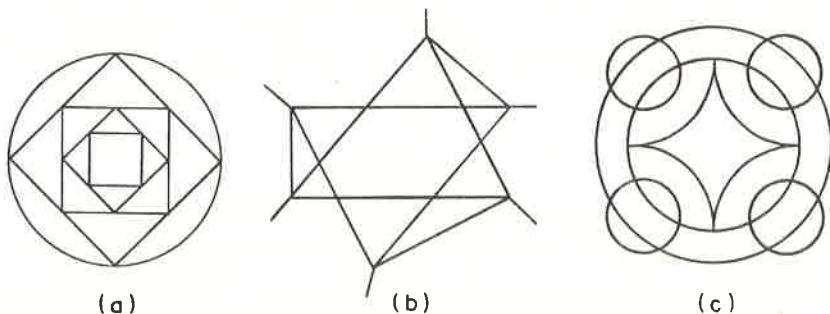


Fig. 1.7

5. Beweise: Hat ein Netz genau zwei ungerade Ecken, dann hat jeder Weg, der das Netz durchläuft, diese beiden Ecken als Anfangs- und Endecken.

6. (a) Gibt es ein Netz mit 50 Bögen und einer Ecke?

(b) Gibt es ein Netz mit einem Bogen und 50 Ecken?

(c) Gib ein Netz mit fünf Bögen und acht Ecken an.

(d) Beweise: Sind n und m positive ganze Zahlen und ist $m \leq 2n$, dann gibt es ein Netz mit n Bögen und m Ecken.

(e) Beweise: Sind n und m positive ganze Zahlen und ist $m \leq n + 1$, dann gibt es ein zusammenhängendes Netz mit n Bögen und m Ecken.

7. Eine chemische Anwendung. Die Struktur eines Moleküls kann schematisch durch ein Netz dargestellt werden. Den Ecken des Netzes entsprechen die Atome, aus denen das Molekül aufgebaut ist, und die Bögen repräsentieren die chemischen Bindungen, die zwischen gewissen Paaren dieser Atome bestehen. Die Fig. 1.8 gibt zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten an, wie ein Mole-

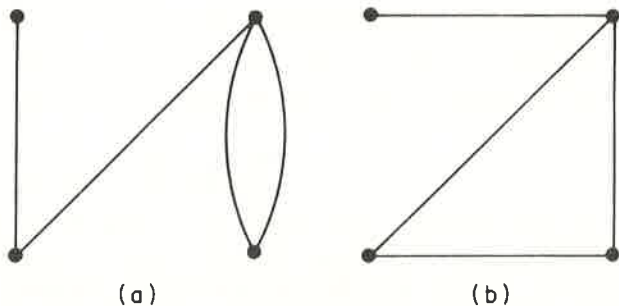


Fig. 1.8

kül aus vier Atomen aufgebaut sein kann, von denen zwei je zwei Bindungen besitzen, während die anderen beiden eine bzw. drei Bindungen besitzen.

(a) Zeige, daß die in Fig. 1.8 dargestellten Moleküle die einzigen sind, die man bei den gegebenen Bindungen aus vier Atomen aufbauen kann.

(b) Bestimme drei Moleküle, die aus vier Atomen aufgebaut werden können, von denen zwei jeweils zwei Bindungen und die anderen beiden jeweils drei Bindungen besitzen.

(c) Bestimme vier verschiedene Moleküle, die aus vier Atomen aufgebaut werden können, von denen zwei jeweils drei Bindungen und die anderen beiden zwei bzw. vier Bindungen besitzen.

8. Hamilton-Wege. Die Sätze dieses Abschnittes geben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein Netz von einem einzigen Weg durchlaufen werden kann. Eine scheinbar geringfügige Änderung der Eigenschaften, die man von einem Weg verlangt, kann die Komplexität des Problems vollständig ändern. Ein *Hamiltonweg* in einem Netz ist ein geschlossener Weg derart, daß jede Ecke des Netzes die Endecke von genau einem Bogen (und somit auch die Anfangsecke von genau einem Bogen) des Weges ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Hamiltonwegen in einem Netz sind nicht bekannt. Das Problem entstand, als der Irische Mathematiker Sir William Rowan Hamilton (1805—1865) solche Wege längs der Kanten eines regulären Zwölfflachs diskutierte.

(a) In welchen der Netze in Fig. 1.3 gibt es einen Hamiltonweg?

(b) In welchen der Netze in Fig. 1.7 gibt es einen Hamiltonweg?

9. (a) Erläutere, warum die Sätze in Abschnitt 2—1 zur Topologie gehören.

(b) Gib einen Satz über Netze an, der nicht zur Topologie gehört.

10. (a) Entscheide, welche Punkte in Fig. 1.7 Ecken sein sollen. Ist diese Entscheidung die einzig mögliche?

(b) Welches ist die Ordnung eines Punktes, der als Ecke aufgefaßt wird, der aber nicht notwendig als Ecke aufgefaßt zu werden braucht?

11. Der Beweis des Satzes 1.3 beruht auf vollständiger Induktion, jedoch ist der Beweis im Text so dargestellt, daß dieses nicht deutlich wird. Man mache sich klar, an welcher Stelle der Schluß von n auf $n + 1$ stattfindet und gebe dem Beweis eine Formulierung, in der sein Induktionscharakter auch formal zutage tritt.

2—2 Ebene Netze

Alle in den Figuren von Abschnitt 2—1 dargestellten Netze lagen in einer Ebene. In manchen Fällen kann ein räumliches Netz zu einem ebenen Netz topologisch äquivalent sein. Das heißt, es kann möglich sein, eine elastische Bewegung für ein gegebenes räumliches Netz zu finden, welche das Netz in eine Ebene einbettet. So zeigt Fig. 2.1 ein Netz in einer Ebene, welches topologisch äquivalent ist zu

Topologische Äquivalenz im dreidimensionalen Raum

3-1 Topologische Äquivalenz

Eine Vollkugel ist topologisch äquivalent mit einem vollen Würfel und mit jedem anderen regulären Körper. Dabei nennen wir wie in Kapitel 1 zwei Figuren im dreidimensionalen euklidischen Raum topologisch äquivalent, wenn es eine elastische Bewegung gibt, welche eine der beiden Figuren mit der anderen zur Deckung bringt. Haben wir es mit zwei physikalischen Körpern zu tun, etwa mit einem Vollgummiball und mit einem massiven hölzernen Würfel, so können wir natürlich nicht den Gummiball mit dem Holzwürfel „zur Deckung bringen“. Wenn wir es doch versuchen, dann stoßen die Körper aneinander, und der Gummiball drückt sich platt gegen die Würfelflächen, statt sich durch das Innere des Würfels zu bewegen. Dies macht deutlich, daß die Figuren, die wir in der Mathematik untersuchen — sei es in der euklidischen Geometrie oder in der Topologie — keine physikalischen Körper sind, sondern Abstraktionen davon. Ein Dreieck ist kein Ding, das aus Holz oder Papier oder aus Bindfaden hergestellt werden kann — es besteht aus „Strecken“, die in einer bestimmten Weise angeordnet sind, und „Strecken“ sind gewisse Mengen von „Punkten“. Daher erfordert eine angemessene Grundlegung jedes strengen Aufbaus der Geometrie oder Topologie die Diskussion des Begriffs Punktmenge und eine genaue Erklärung dessen, was unter dem Zusammenfallen zweier Punkt Mengen zu verstehen ist. Eine solche Grundlegung wird in Kapitel 6 gegeben; hier jedoch stützen wir uns weiterhin auf den anschaulichen Begriff der topologischen Äquivalenz von Figuren, der auf den Vorstellungen der elastischen Bewegung und der vollkommen elastischen Figur beruht.

Wir beschreiben nun verschiedene Standardfiguren, die für das Folgende von Bedeutung sind. Einige von ihnen sind in den vorangehenden Kapiteln schon aufgetreten, ihre Beschreibung soll aber der Vollständigkeit halber hier mit aufgenommen werden.

Ein *Kreis* ist eine Kurve in der Ebene, deren sämtliche Punkte einen gegebenen Abstand von einem gewissen ausgezeichneten Punkt der Ebene haben. Dieser ausgezeichnete Punkt ist der *Mittelpunkt*, und der gegebene Abstand ist der *Radius* des Kreises. Eine *einfach geschlossene Kurve* ist eine Kurve, die topologisch äquivalent mit einem Kreis ist. Eine einfach geschlossene Kurve kann, aber muß nicht in einer Ebene liegen. Figur 1.1 zeigt ein Beispiel einer verknöteten einfach geschlossenen Kurve, die nicht in einer Ebene liegt.

Eine *offene Kreisscheibe* ist der Teil der Ebene, der im Innern eines Kreises liegt; der Kreis selbst gehört aber nicht dazu. Eine *abgeschlossene Kreisscheibe* ist der Teil der Ebene, der aus dem Innern eines Kreises und aus dem Kreise selbst besteht; die Punkte des Kreises gehören also mit zu der abgeschlossenen Kreisscheibe. Man beachte, daß sowohl die offene als auch die abgeschlossene Kreisscheibe Flächen in einer Ebene sind. Eine abgeschlossene Kreisscheibe ist eine offene Kreisscheibe zusammen mit dem Kreis, dessen Inneres diese offene Kreisscheibe bildet.

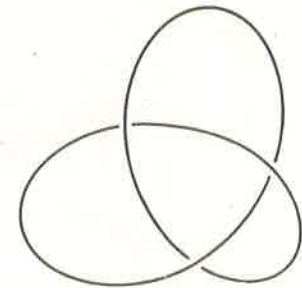


Fig. 1.1

Eine *Kugel* ist eine Fläche im dreidimensionalen Raum, deren sämtliche Punkte einen gegebenen Abstand von einem gewissen ausgezeichneten Punkt haben. Der ausgezeichnete Punkt ist der *Mittelpunkt*, und der gegebene Abstand ist der *Radius* der Kugel.

Eine *offene Vollkugel* ist der Teil des dreidimensionalen Raumes, der im Innern einer Kugel liegt, die Kugel selbst gehört nicht dazu. Eine *abgeschlossene Vollkugel* ist der Teil des Raumes, der aus dem Innern einer Kugel und aus der Kugel selbst besteht; die Punkte der Kugel gehören also mit zu der abgeschlossenen Vollkugel. Man beachte, daß sowohl die offene als auch die abgeschlossene Vollkugel dreidimensionale Körper sind. Eine abgeschlossene Vollkugel ist eine offene Vollkugel zusammen mit der Kugel, deren Inneres diese offene Vollkugel bildet.

Eine *Kugel mit p Henkeln* ist eine Fläche im dreidimensionalen Raum, die dadurch entsteht, daß man in eine Kugel $2p$ Löcher schneidet und je zwei davon durch einen Schlauch verbindet; man

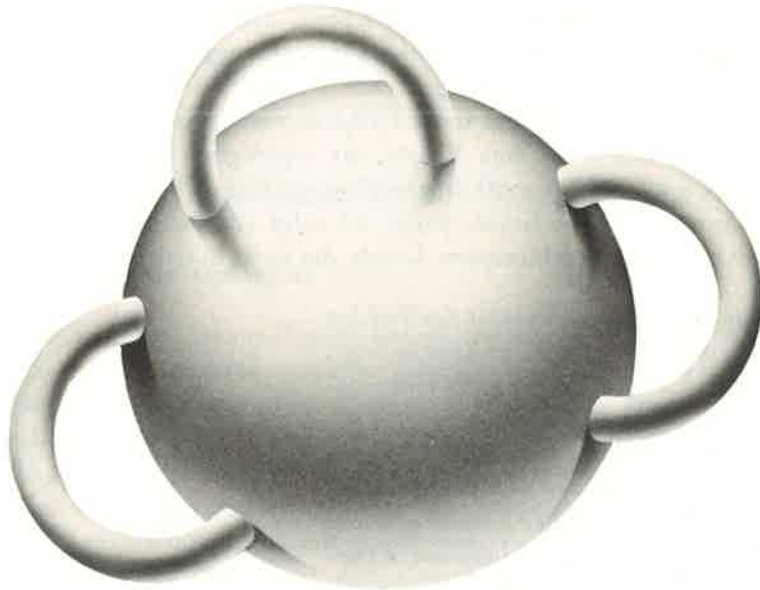


Fig. 1.2

benötigt dazu p verschiedene Schläuche. Fig. 1.2 zeigt eine Kugel mit drei Henkeln.

Ein *Torus* (Fig. 1.3) ist eine Fläche im dreidimensionalen Raum, die durch die Rotation eines Kreises um eine Gerade entsteht, welche in der Ebene des Kreises liegt, aber diesen Kreis nicht schneidet. Man kann sich einen Torus als einen Fahrradschlauch vorstellen oder auch als die Oberfläche eines Topfkuchens.

Wenn zwei Figuren topologisch äquivalent sind, so können wir diese Tatsache in geeigneten Fällen dadurch beweisen, daß wir eine der beiden Figuren durch eine elastische Bewegung in die andere überführen. Haben wir z. B. ein kreisförmiges Gummiband, so können wir das Band zerschneiden und in die Gestalt der Kurve von Fig. 1.1 bringen und dann die beiden Enden wieder in der ursprünglichen Weise zusammenfügen. Dadurch wäre bewiesen, daß die Kurve von Fig. 1.1 wirklich eine einfach geschlossene Kurve ist, weil sie topologisch äquivalent mit einem Kreise ist.

Wie kann man nun aber jemals beweisen, daß zwei Figuren *nicht* topologisch äquivalent sind? Man müßte dazu ja zeigen, daß keine elastische Bewegung die eine der beiden Figuren mit der anderen zur

Deckung bringen kann. Natürlich hat es keinen Sinn zu versuchen, alle möglichen elastischen Bewegungen wirklich auszuführen — es gibt zu viele derartige Bewegungen. Eine Möglichkeit für einen solchen Beweis besteht jedoch darin, daß man eine Eigenschaft ausfindig macht, welche einer der beiden Figuren zukommt, der anderen



Fig. 1.3

aber nicht. Wenn dies dann eine topologische Eigenschaft ist, können die beiden Figuren nicht topologisch äquivalent sein; denn keine elastische Bewegung kann diese Eigenschaft erzeugen oder zerstören, und folglich kann keine elastische Bewegung die eine der beiden Figuren mit der anderen zur Deckung bringen. Zur Illustration dieses Verfahrens beweisen wir, daß eine Kugel nicht topologisch äquivalent mit einem Torus ist. Jede einfach geschlossene Kurve auf einer Kugel zerschneidet die Kugel in zwei Teile — wenn die Kugeloberfläche längs irgendeiner einfach geschlossenen Kurve aufgeschnitten wird, zerfällt sie in zwei getrennte Stücke. Ein Torus hat diese Eigenschaft nicht: er zerfällt nicht in zwei getrennte Teile, wenn man ihn (als Fahrradschlauch gedacht) längs der Felge aufschneidet und auch nicht, wenn man ihn senkrecht dazu (längs eines Kreises in einer die Felge senkrecht durchsetzenden Ebene) aufschneidet, denn dann verwandelt er sich in einen beiderseits offenen Schlauch, der aber noch immer

aus einem Stück besteht. Schließlich ist die Eigenschaft einer Fläche, durch jede einfach geschlossene Kurve (die in der Fläche liegt) in zwei getrennte Teile zerschnitten zu werden, offensichtlich eine topologische Eigenschaft. Somit sind eine Kugel und ein Torus nicht topologisch äquivalent.

A U F G A B E N

- (a) Beweise, daß ein Torus topologisch äquivalent ist zu der Oberfläche eines Knopfes mit einem Loch und auch zu einer Kugel mit einem Henkel.

(b) Gibt es auf einem Torus einfach geschlossene Kurven, die den Torus in zwei getrennte Teile zerschneiden?
- Beweise, daß die Oberfläche eines Knopfes mit p Löchern topologisch äquivalent ist zu einer Kugel mit p Henkeln.
- (a) Beweise, daß eine Kugel mit zwei Henkeln nicht topologisch äquivalent ist zu einer Kugel mit drei Henkeln.

(b) Beweise, daß für $p \neq q$ eine Kugel mit p Henkeln nicht topologisch äquivalent ist zu einer Kugel mit q Henkeln.
- Ordne die folgenden Objekte in Klassen ein, derart, daß alle Objekte in derselben Klasse topologisch äquivalent und daß Objekte in verschiedenen Klassen nicht topologisch äquivalent sind.
 - Ein Kreis.
 - Eine offene Kreisscheibe.
 - Eine Strecke.
 - Eine Kugel.
 - Eine Kugelschale (der Teil des dreidimensionalen Raumes, der zwischen zwei Kugeln liegt, die denselben Mittelpunkt und verschiedene Radien haben).
 - Eine Vollkugel.
 - Die Oberfläche eines Würfels.
 - Ein voller Würfel.
 - Ein voller Würfel, durch den ein Loch gebohrt ist.
 - Ein Torus.
 - Das Netz, das aus den Kanten eines Tetraeders besteht.
 - Ein Körper von der Gestalt eines Gasrohrstücks.
 - Ein Körper von der Gestalt eines Gasrohrstücks, das an jedem Ende durch einen Stöpsel verschlossen ist.
 - Ein Körper von der Gestalt eines dicken Lederhandschuhs für die rechte Hand.
 - Ein Körper von der Gestalt eines dicken Lederhandschuhs für die linke Hand.
 - Ein flacher massiver Goldring.

(q) Ein Kreisring (der Teil der Ebene, der zwischen zwei Kreisen in dieser Ebene liegt, die denselben Mittelpunkt und verschiedene Radien haben).

(r) Die gesamte Oberfläche einer Schallplatte.

(s) Das Netz der Fig. 1.4a.

(t) Das Netz der Fig. 1.4b.

5. Figur 1.5 zeigt Blockbuchstaben. Ordne diese Buchstaben in Klassen ein, derart, daß alle Buchstaben in derselben Klasse topologisch äquivalent und daß Buchstaben in verschiedenen Klassen nicht topologisch äquivalent sind.

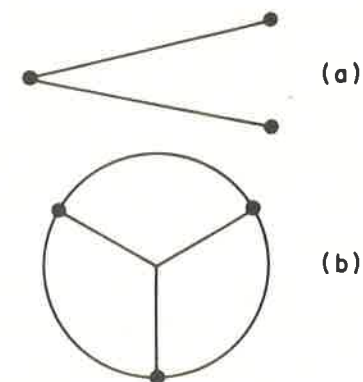


Fig. 1.4

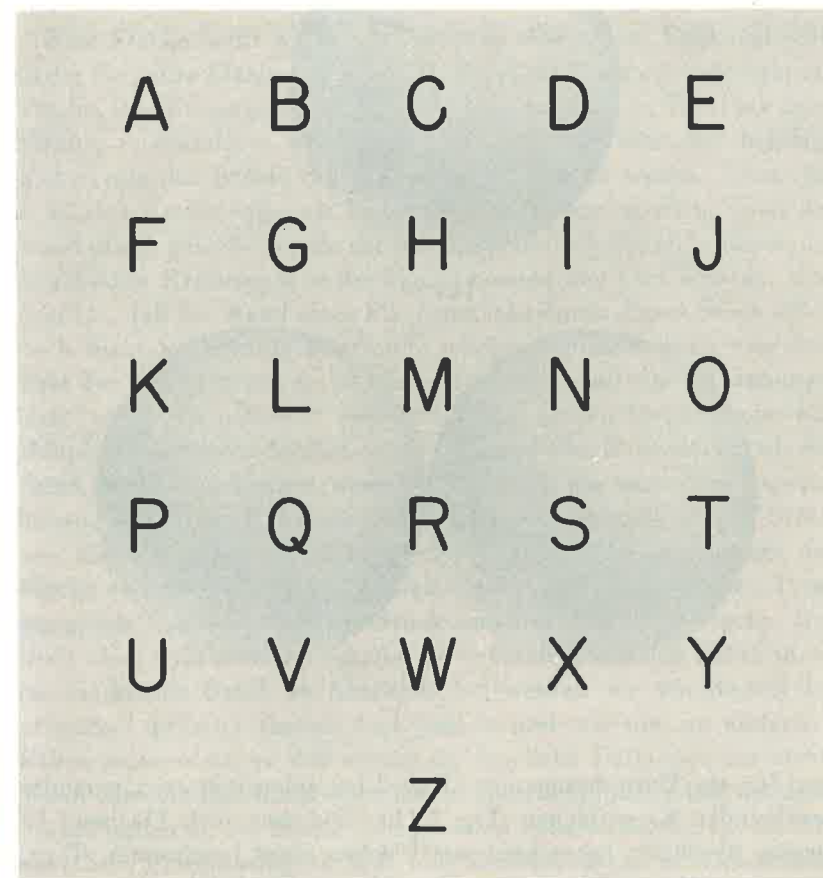


Fig. 1.5

3-2 Klassifikation der Flächen

Jeder Schuljunge weiß, daß ein gewöhnliches Blatt Papier zwei Seiten hat; manchmal darf er nur eine Seite beschreiben, manchmal beide Seiten. In diesem Abschnitt werden wir Beispiele von Flächen kennenlernen, die nur eine Seite haben; zuvor aber müssen wir etwas genauer beschreiben, von welcher Art die Flächen sind, die wir betrachten wollen.

Eine Fläche sollte jedenfalls „zweidimensional“ sein, wie eine Ebene oder eine Kugelfläche; aber wie steht es mit einer Kugelfläche,

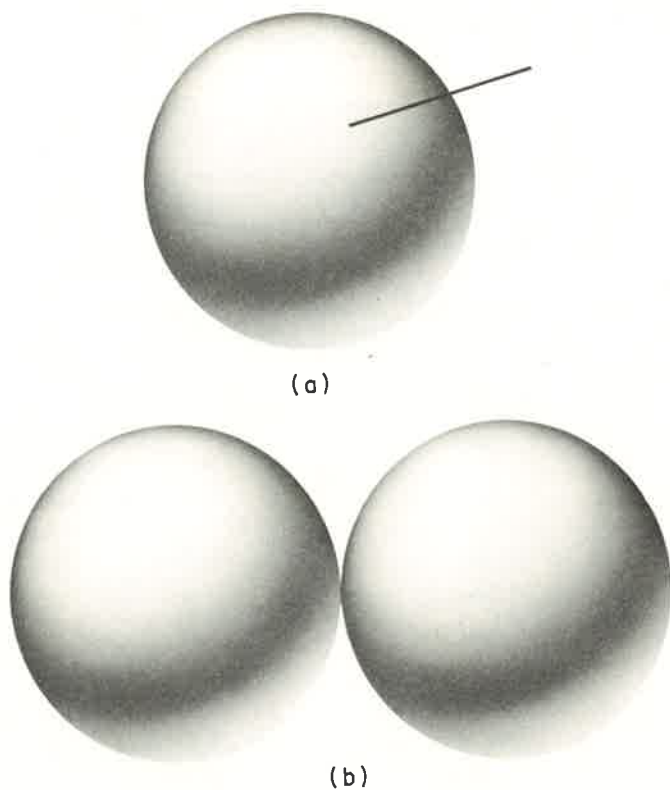


Fig. 2.1

aus der ein Dorn herausragt (Fig. 2.1a) oder mit zwei einander berührenden Kugelflächen (Fig. 2.1b): sind dies auch Flächen? In diesem Abschnitt betrachten wir Flächen eines bestimmten Typs, sogenannte Mannigfaltigkeiten. Eine *Mannigfaltigkeit* ist eine zusam-

menhängende Fläche (d. h. eine „aus einem Stück bestehende“ Fläche) von der Art, daß die Fläche in hinreichender Nähe eines jeden Punktes topologisch äquivalent mit einer offenen Kreisscheibe ist. Genauer: für jeden Flächenpunkt p bilden diejenigen Punkte der Fläche, die hinreichend nahe bei p liegen, eine Menge, die topologisch äquivalent mit einer offenen Kreisscheibe ist. Die Menge aller Flächenpunkte, die hinreichend nahe bei p liegen, wird eine „Umgebung von p “ genannt.

Keine der beiden in Fig. 2.1 dargestellten Flächen ist eine Mannigfaltigkeit. In Fig. 2.1a besitzen die Punkte auf dem Dorn (der als eine Strecke anzusehen ist) keine Umgebungen der verlangten Art, und in Fig. 2.1b ist die Fläche in der Nähe des Berührungspunktes der beiden Kugeln nicht topologisch äquivalent mit einer Kreisscheibe.

Eine Fläche heißt *beschränkt*, wenn es eine offene Vollkugel gibt, in der die ganze Fläche enthalten ist. So ist ein Torus eine beschränkte Fläche, eine Ebene ist es nicht. Betrachten wir nun ein Teilstück einer Fläche, so definieren wir als den *Rand* dieses Teilstücks diejenige Kurve, die das Stück von dem Rest der Fläche trennt. Wenn wir z. B. eine Kreisscheibe als Teilstück einer Ebene ansehen, so ist der Rand dieser Scheibe gerade der Kreis, der die Scheibe einschließt; der Rand eines Kreisringes in der Ebene besteht aus zwei Kreisen. Man beachte, daß der Rand eines Flächenstücks durch dieses Stück allein noch nicht vollständig bestimmt, sondern vielmehr auch von dem Rest der Fläche abhängig ist; denn der Rand muß eine „Trennungslinie“ oder eine „Kante“ zwischen diesen beiden Mengen sein. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen: Wenn man eine Kreisscheibe als ein Stück der Ebene auffaßt, dann ist ihr Rand, wie wir schon bemerkt haben, ein Kreis. Wenn wir jedoch eine Kreisscheibe als ein Stück von dieser Scheibe selbst ansehen, dann gehören alle Punkte der Fläche zu dem betrachteten Stück, und es gibt gewiß keine „Trennungslinie“ zwischen diesem Stück und dem Rest der Fläche. Das heißt also: sieht man die Scheibe als Teilmenge von sich selbst an, so hat sie keinen Rand. In Abschnitt 8-3 werden wir den Begriff des „Randes“ präziser fassen; hier jedoch sind wir nur an einfachen Fällen interessiert, so daß unsere anschauliche Definition ausreicht. Wenn wir von dem Rand einer Fläche sprechen, dann sehen wir diese Fläche immer als ein Stück einer gewissen anderen Fläche an, die ihre natürliche Erweiterung ist: z. B. eine Kreisscheibe als ein Stück einer Ebene.

Es ist nun wichtig, zu beachten, daß die so verwandt erscheinenden Begriffe „beschränkt“ und „Rand“ nichts miteinander zu tun haben. Sowohl eine Kugelfläche als auch eine Kreisscheibe ist eine beschränkte Fläche, aber die Kugel hat keinen Rand, während die Kreisscheibe einen Kreis zum Rand hat. Eine Ebene ist eine unbeschränkte Fläche ohne Rand; ein schmaler Streifen einer Ebene ist ein unbeschränktes Stück, dessen Rand aus zwei parallelen Geraden besteht.

Eine Fläche ist genau dann *geschlossen*, wenn sie beschränkt ist und keinen Rand besitzt. Eine Kugel ist eine geschlossene Fläche; denn sie ist beschränkt, und man kann sich frei auf ihr bewegen, ohne jemals an einen Rand zu stoßen. Andererseits ist weder eine offene noch eine abgeschlossene Kreisscheibe eine geschlossene Fläche, denn jede Kreisscheibe hat als ihren Rand denjenigen Kreis, der die Scheibe einschließt. Man beachte, daß das Wort „geschlossen“ hier im Zusammenhang mit Flächen in einer ähnlichen Weise gebraucht wird, wie es in Abschnitt 2-1 im Zusammenhang mit Wegen in einem Streckennetz gebraucht wurde; in jedem Falle weist es darauf hin, daß eine gedachte Bewegung nicht durch ein Ende oder durch eine Kante behindert wird. (Die Bedingung der Beschränktheit war für einen geschlossenen Weg nicht erforderlich, da alle unsere Wege beschränkt waren.) Eine Mannigfaltigkeit kann, aber muß nicht eine geschlossene Fläche sein. Eine Kugel ist eine geschlossene Fläche und zugleich eine Mannigfaltigkeit; eine offene Kreisscheibe ist eine Mannigfaltigkeit, aber keine geschlossene Fläche. Eine abgeschlossene Kreisscheibe ist keine Mannigfaltigkeit; denn in der Umgebung eines Punktes auf dem Randkreis ist diese Fläche nicht topologisch äquivalent mit einer offenen Kreisscheibe.



Fig. 2.2

Es gibt ein interessantes Verfahren, bestimmte Mannigfaltigkeiten als Rechtecke darzustellen, bei denen gewisse Seiten zu identifizieren sind. Z. B. sind in Fig. 2.2 die Seiten des Rechtecks so zusammenzufügen, daß die beiden mit AB bezeichneten Strecken aufeinander-

fallen, wobei die beiden Pfeile in dieselbe Richtung weisen müssen. Die durch dieses Rechteck dargestellte Mannigfaltigkeit ist die gekrümmte Oberfläche eines Zylinders. Dabei stellen die beiden Strecken AA und BB die beiden Kreise dar, welche die Zylinderfläche

begrenzen. Die Punkte auf diesen Strecken (oder Kreisen) können nicht mit zur Mannigfaltigkeit gerechnet werden, da sie keine passenden Umgebungen auf der Fläche besitzen. Diese Darstellung eines Zylinders ist manchmal zweckmäßig, da sie die gekrümmte Fläche in einer Zeichenebene wiedergibt, so daß man die eine Seite der gesamten Fläche zugleich überblicken kann.

Wir wollen nun einen der beiden Pfeile in Fig. 2.2 umkehren, wie Fig. 2.3 a zeigt. Wenn man nun etwa die rechte Seite des Rechtecks umwendet und dann mit der linken so zusammenfügt, daß die beiden mit AB bezeichneten Strecken aufeinanderfallen, wobei die Pfeile wieder in dieselbe Richtung weisen, dann erhält man eine Mannigfaltigkeit, die „Möbiussches Band“ heißt (Fig. 2.3 b). Wie bei Fig. 2.2 müssen die waagerechten Strecken oben und unten in Fig. 2.3 a

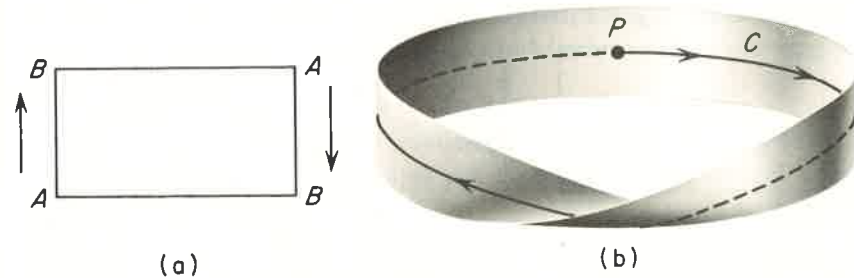


Fig. 2.3. Möbiussches Band

ausgeschlossen werden, wenn man eine Mannigfaltigkeit erhalten will. Indessen stellen diese beiden Strecken jetzt nicht mehr zwei Kreise dar, sondern vielmehr zwei Hälften einer einzigen geschlossenen Kurve. Ein Möbiussches Band hat nur eine Seite. Um dies einzusehen, stellen wir uns einen Käfer vor, der auf der Fläche vom Punkt P aus entlang der Kurve C krabbelt, bis er längs des gestrichelten Stücks von C wieder in P ankommt. Da der Käfer die Fläche nicht durchstößt und auch keine Kante der Fläche überquert, muß er die ganze Zeit über auf derselben Seite der Fläche bleiben. Andererseits scheint er im Punkte P auf der „anderen Seite“ als der ursprünglichen anzukommen. Die Fläche hat also bei P nicht, wie es ursprünglich schien, zwei Seiten; vielmehr handelt es sich um zwei verschiedene Stücke derselben Seite der Fläche. Man beachte, daß die Einseitigkeit eine äußere Eigenschaft einer Fläche und keine innere ist. Dies bedeutet, daß die Prüfung, ob eine Fläche einseitig oder nicht

einseitig ist, nicht innerhalb dieser Fläche selbst durchgeführt werden kann, sondern daß dazu auch der Raum mit benötigt wird, der die Fläche umgibt. In unserem Beispiel mit dem Käfer haben wir stillschweigend vereinbart, daß der Käfer, wenn er mit seinen Füßen auf der Fläche bleibt und keine Kante überschreitet, mit seinem Kopf stets auf derselben Seite der Fläche bleibt. Wenn die Fläche ein Möbiussches Band ist, dann kann der Käfer seinen Kopf von jedem Punkt in der Nähe der Fläche offenbar an jeden anderen Punkt in der Nähe der Fläche bringen. Daher liegen alle Punkte auf derselben Seite der Fläche, und die Fläche ist einseitig. Die Aufgaben 5 bis 9 beziehen sich auf eine innere Eigenschaft von Flächen, die in engem Zusammenhang mit der Einseitigkeit steht.

Ein anderes Beispiel einer einseitigen Fläche zeigt Figur 2.4. Diese Mannigfaltigkeit heißt „Kleinsche Flasche“; sie kann im drei-

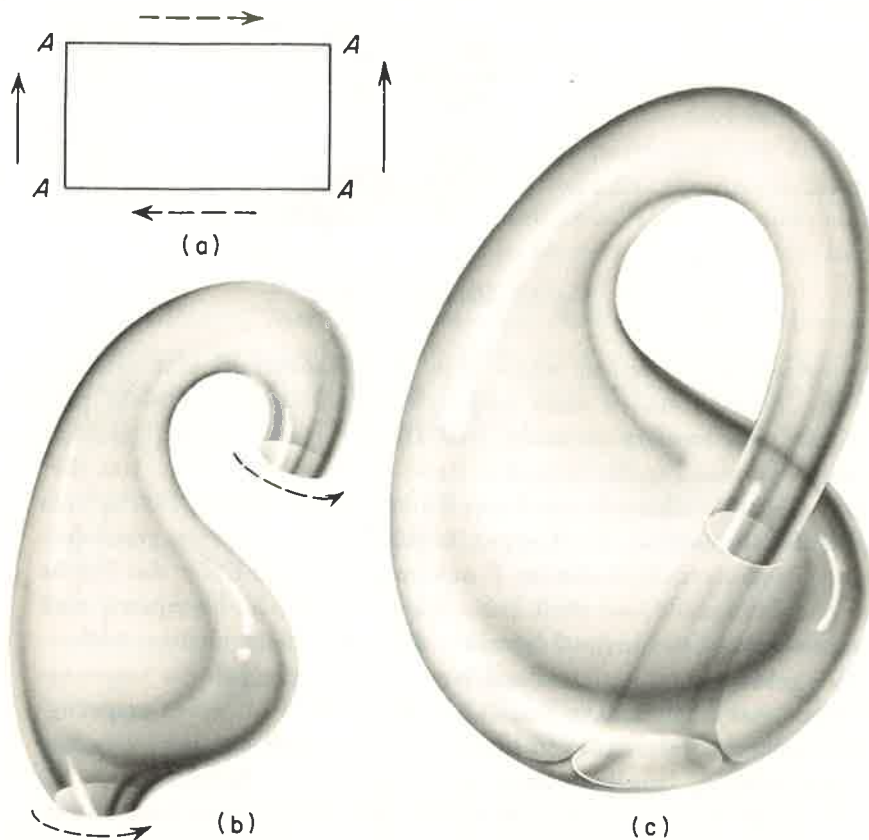


Fig. 2.4. Kleinsche Flasche

dimensionalen Raum nicht realisiert werden. Fig. 2.4 a gibt die Darstellung einer Kleinschen Flasche als Rechteck, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten zu identifizieren sind. Die Identifikation der beiden mit ausgezogenen Pfeilen markierten Seiten ergibt zunächst eine Zylinderfläche (Fig. 2.4 b), deren beide Begrenzungslinien nun auch identifiziert werden müssen. Dies ist der Schritt, der im dreidimensionalen Raum nicht ausgeführt werden kann; die eine der beiden Begrenzungen muß durch die Fläche hindurchgeführt und dann im Innern mit der anderen verbunden werden, wie Fig. 2.4 c zeigt. Jedoch darf die Fläche sich dort, wo der Hals die Flaschenwand durchdringt, nicht selbst schneiden (man benötigt eine vierte Dimension, wenn man „um die Fläche herum“ gehen will, statt durch sie hindurch).

Der nächste Satz liefert eine interessante Klassifikation der geschlossenen zweiseitigen Mannigfaltigkeiten. Eine ähnliche Klassifikation der einseitigen Mannigfaltigkeiten findet man in der angegebenen Literatur.

Satz 2.1. Jede geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit ist topologisch äquivalent zu einer Kugel mit einer geeigneten Anzahl von Henkeln.

Beweis: Der Beweis dieses Satzes würde den Rahmen dieses Buches überschreiten. Der daran interessierte Leser findet einen Beweis z. B. in Seifert/Threlfall, Lit. V. [25] (S. 141, Hauptsatz der Flächen-topologie) «.

A U F G A B E N

- I. Gib für jede der folgenden Flächen an, ob sie (I) geschlossen ist oder nicht, (II) eine Mannigfaltigkeit ist oder nicht, (III) einseitig oder zweiseitig, (IV) beschränkt oder nicht beschränkt ist. Bestimme für jede Fläche, die eine geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit ist, diejenige Anzahl p , für welche die Fläche topologisch äquivalent zu einer Kugel mit p Henkeln ist.
 - (a) Eine Ebene.
 - (b) Ein Torus.
 - (c) Ein Möbiussches Band.
 - (d) Eine Kleinsche Flasche.
 - (e) Eine offene Kreisscheibe.
 - (f) Eine abgeschlossene Kreisscheibe.

- (g) Die Fläche von Fig. 2.5a.
- (h) Die Fläche von Fig. 2.5b.
- (i) Derjenige Teil der Doppelkegelfläche, der in Fig. 2.5c dargestellt ist.
- (j) Die gesamte Oberfläche (Beine, Sitzfläche, Armstützen, Lehne usw.) eines Sessels.

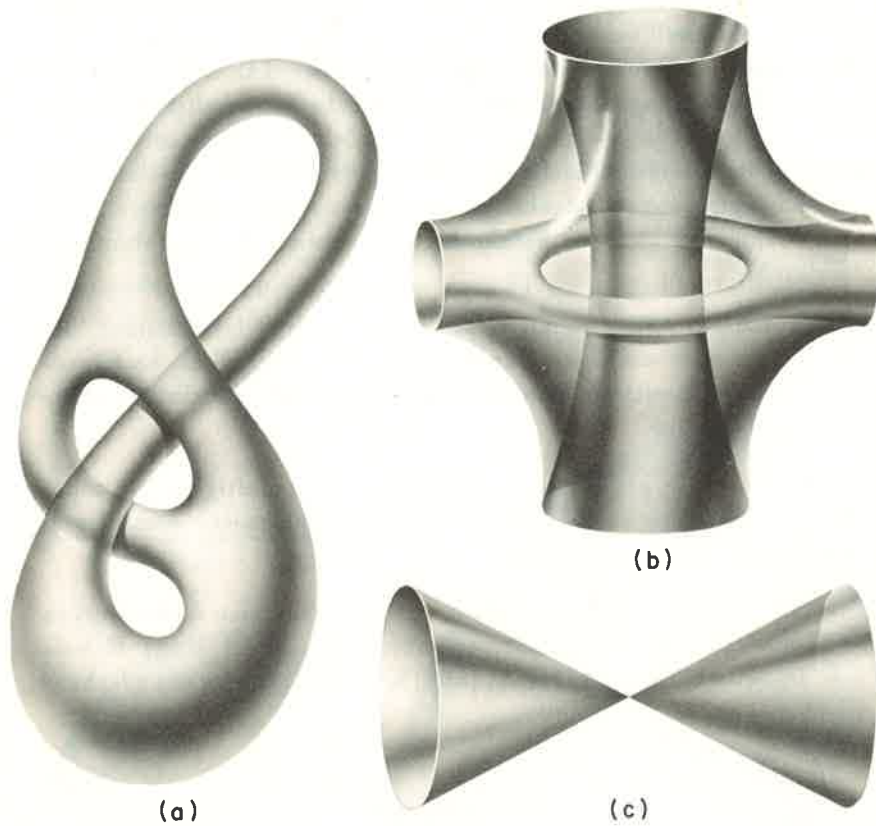


Fig. 2.5

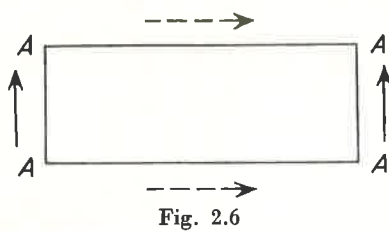
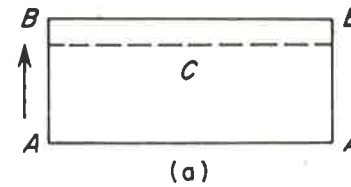


Fig. 2.6

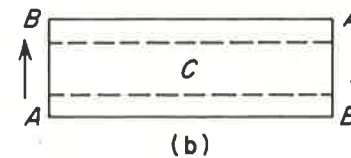
2. Welche Fläche wird durch das Viereck mit zu identifizierenden Seiten in Fig. 2.6 dargestellt?

3. Experimentiere mit der Zylinderfläche und dem Möbiusschen Band, die in Fig. 2.7 dargestellt sind: verdrehe das eine Ende des Streifens vor dem Zusammenkleben mit dem andern einmal oder

mehrmals und schneide dann die Fläche längs der gestrichelten Kurve auf. Welche Wirkung haben die zusätzlichen Drehungen?



(a)



(b)

Fig. 2.7

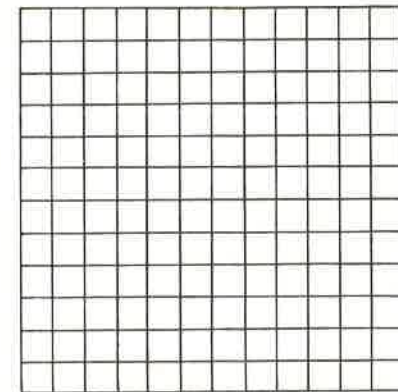


Fig. 2.8

4. Es gibt ein altes orientalisches Brettspiel mit dem Namen Go-Moku oder „Fünf in einer Reihe“, das von zwei Spielern gespielt wird. Das Brett trägt 13 oder 25 waagerechte und ebenso viele senkrechte Linien (Fig. 2.8); jeder Spieler hat einen Satz Steine, der eine hat weiße, der andere schwarze Steine. Die Spieler setzen abwechselnd je einen Stein auf einen der Kreuzungspunkte; danach dürfen die Steine auf dem Brett nicht mehr bewegt werden. Der erste Spieler, dem es gelingt, fünf von seinen Steinen in eine Reihe (waagrecht, senkrecht, oder in Diagonalrichtung) zu bringen, hat gewonnen. Spiele dieses Spiel auf einem Torus (Fig. 2.6) oder auf einer Kleinschen Flasche (Fig. 2.4a), mit etwa acht Linien in jeder Richtung. Da jetzt gegenüberliegende Seiten des Bretts zu identifizieren sind, setzt man zweckmäßig die Steine in die Quadrate und nicht auf die Kreuzungspunkte der Linien.

5. (a) Beweise: Auf einem Möbiusschen Band kann man für einen beliebigen Punkt P einen Drehsinn (für eine Drehung um diesen Punkt) wählen und dann den Punkt P ohne Wechsel des Drehsinns so auf der Fläche herumbewegen, daß der Drehsinn von dem ursprünglich gewählten verschieden ist, wenn P wieder in seine alte Lage kommt. Eine Fläche mit dieser Eigenschaft heißt nicht-

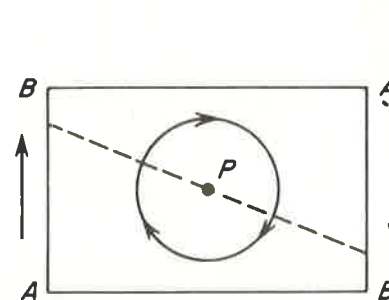


Fig. 2.9

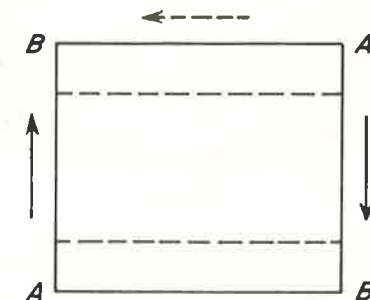


Fig. 2.10

orientierbar, im entgegengesetzten Fall ist die Fläche orientierbar. (Anleitung: Bewege den Punkt P längs der gestrichelten Linie in Fig. 2.9.)

(b) Ist ein Torus orientierbar oder nicht-orientierbar?

(c) Ist eine Kleinsche Flasche orientierbar oder nicht-orientierbar?

6. Die in Fig. 2.10 dargestellte Fläche heißt *projektive Ebene*; denn sie ist topologisch äquivalent mit einer Fläche, die in der projektiven Geometrie eingeführt wird, obwohl man dabei von einem etwas anderen Gesichtspunkt ausgeht.

(a) Beweise, daß man eine projektive Ebene auffassen kann als eine Kreisscheibe und ein Möbiussches Band, deren Kanten miteinander verbunden sind. (Anleitung: Zerschneide die projektive Ebene von Fig. 2.10 längs der gestrichelten Linie.)

(b) Ist die projektive Ebene orientierbar?

(c) Ist die projektive Ebene eine Mannigfaltigkeit?

7. Beweise, daß eine Mannigfaltigkeit, die im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum liegt, dann und nur dann orientierbar ist, wenn sie zweiseitig ist. (Anleitung: Stelle dir einen Käfer vor, der auf der Fläche krabbelt und eine Schraube mit sich herumträgt, die von seinem Kopf zu seinen Füßen weist.)

8. Ist die in Fig. 2.11 gezeigte Fläche eine Mannigfaltigkeit? Ist sie orientierbar oder nicht-orientierbar? Was passiert, wenn man die Fläche längs einer Kurve aufschneidet, die rund um die Fläche läuft und immer unterhalb der oberen Kante (in der Zeichnung) bleibt? Was passiert, wenn die Fläche längs der gestrichelten Kurve C aufgeschnitten wird?

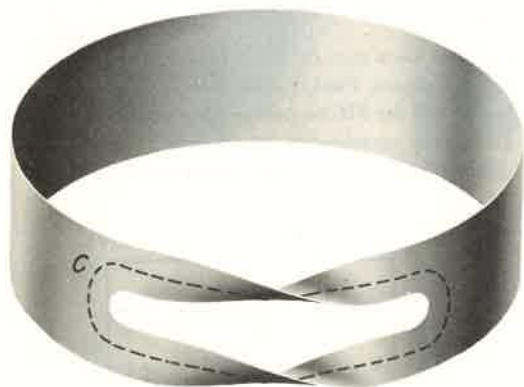


Fig. 2.11

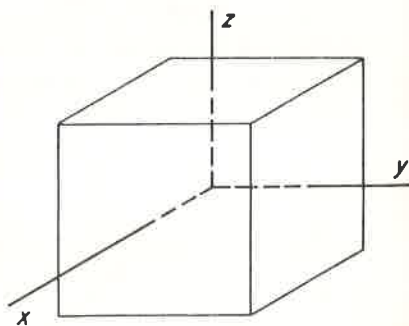


Fig. 2.12

*9. Figur 2.12 zeigt einen massiven Würfel von 2 Einheiten Kantenlänge, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Wir identifizieren Punktepaare auf der Oberfläche dieses Würfels nach folgender Regel: Auf den Seitenflächen $x = 1$ und $x = -1$ sind Punkte zu identifizieren, die symmetrisch zur z -Achse liegen;

d. h. $(1, y, z)$ ist zu identifizieren mit $(-1, -y, z)$. Auf den Seitenflächen $y = 1$ und $y = -1$ sind Punkte zu identifizieren, die symmetrisch zur x -Achse liegen; d. h. $(x, 1, z)$ ist zu identifizieren mit $(x, -1, -z)$. Auf den Seitenflächen $z = 1$ und $z = -1$ sind Punkte zu identifizieren, die symmetrisch zur xy -Ebene liegen; d. h. $(x, y, 1)$ ist zu identifizieren mit $(x, y, -1)$.

Wir haben nun einen Körper, in dem für jeden Punkt die Menge aller benachbarten Raumpunkte topologisch äquivalent mit einer Vollkugel ist. Einen solchen Körper nennt man eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Jedoch herrschen in dieser Mannigfaltigkeit eigentümliche Zusammensetzungsverhältnisse. Wir wollen die drei Flächen betrachten, die als Schnitte dieses Körpers mit den drei Koordinatenebenen entstehen.

(a) Welche von diesen Flächen ist orientierbar?

(b) Welche von diesen Flächen ist einseitig in diesem Körper? (Anleitung: Stelle dir einen Käfer vor, der mit seinen Füßen auf einer Fläche bleibt, und überlege, an welche Raumpunkte dabei sein Kopf gelangen kann.)

(c) Diskutiere in ähnlicher Weise die Fläche, die aus allen Punkten besteht, deren Koordinaten der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

genügen.