

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut



seit 1558

Bachelorarbeit

Einfluss von Higgsbindungszuständen auf W/Z-Streuung am Large Hadron Collider

Daniel Reiche
Matrikelnummer: 125920

Erstgutachter: PD Dr. habil. Axel Maas
Zweitgutachter: Prof. Dr. habil. Holger Gies

Abgabedatum:

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Symbole	3
1. Zusammenfassung	4
2. Einleitung und Fragestellung	5
3. Grundlagen	6
3.1. Metrik und Einheiten	6
3.2. Der Higgs-Sektor im Standardmodell	6
3.3. Der angeregte Higgs-Zustand	8
3.4. Schwerpunktsystem	8
3.5. Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt	9
3.6. Polarisation der Eichbosonen	10
3.7. Numerische Berechnungen	11
3.8. Pseudorapidität	11
3.9. Feynman-Regeln für Vertices und Propagatoren	12
4. Berechnungen	15
4.1. Streuamplituden	15
4.2. Einheiten und Konvergenzen	17
4.3. Wirkungsquerschnitt im Standardmodell σ_{St}	19
4.4. Wirkungsquerschnitt σ innerhalb des \mathcal{L}_{II} -Ansatzes mit drei verschiedenen Propagatoren	20
4.4.1. \mathcal{L}_{II} -Ansatz in Kombination mit dem Propagator D_a	20
4.4.2. \mathcal{L}_{II} -Ansatz in Kombination mit dem Propagator D_b	21
4.4.3. \mathcal{L}_{II} -Ansatz in Kombination mit dem Propagator D_c	24
4.5. Wirkungsquerschnitt σ innerhalb des \mathcal{L}_I -Ansatzes	25
5. Ergebnisse und Diskussion	27
Quellenangaben	29
Danksagung	31
A. Anhang	32
A.1. Einsetzen des Higgs-Dublett-Ansatzes in die Lagrange-Dichte des Higgs-Sektors im Standardmodell	32
A.2. Mathematica®-Code	36
Eigenständigkeitserklärung	38

Abkürzungen und Symbole

Abkürzung	Bedeutung
$\text{diag}(\cdot)$	Diagonalmatrix
$[A, B] = AB - BA$	Kommutator der Operatoren A und B
$*, \dagger$	komplexe bzw. hermitesche Konjugation
\mathbf{x}	euklidischer Dreier-Vektor
$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \mathbf{x})$	Vierer-Vektor des Minkowski-Raumes
$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla)$	Vierer-Ableitung mit dem Nabla-Operator ∇
$SU(2)$	spezielle unitäre Gruppe in zwei Dimensionen
$U(1)$	unitäre Gruppe in einer Dimension
$\langle O \rangle$	Erwartungswert eines Operators O
atanh	Areatangens Hyperbolicus
arctan	Arcus Tangens
ϵ^{abc}	Levi-Civita-Tensor in drei Dimensionen
δ^{ab}	Kronecker-Delta
$\delta^{(n)}(x)$	Dirac'sche Delta-Distribution in n Dimensionen
$ \mathbf{k} , z $	Betrag eines Vektors \mathbf{k} bzw. einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$
\times	Multiplikation
\propto	Proportionalität
$\int d^n x$	Integral von $-\infty$ bis ∞ in n Dimensionen
\mathcal{L}	Lagrange-Dichte
\mathcal{M}	Streuamplitude
σ_{CM}	Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem
\sqrt{s}	Schwerpunktenergie
η	Pseudorapidität
$D_x(\cdot)$	Propagator des angeregten Higgs-Zustandes
m_W	Masse W-Boson
μ	Masse Higgs-Boson
M	Masse angeregter Higgs-Zustand
$\epsilon_L^\mu(k)$	Polarisationsvektor

1. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird, unter der Annahme, dass Higgs-Bosonen gebundene Zustände eingehen können, die Auswirkung eines ersten angeregten Higgsbindungszustandes auf den totalen Wirkungsquerschnitt untersucht. Das geschieht anhand der elastischen Streuung zweier longitudinal polarisierter W-Bosonen und es wird Störungsrechnung in niedrigster Ordnung genutzt. Der angeregte Zustand wird formal als eigenständiges Teilchen behandelt und über zwei verschiedene effektive Ansätze der Theorie des Standardmodells hinzugefügt. Jeweils werden drei verschiedene Propagatoren diskutiert.

Es stellt sich heraus, dass eine Kopplung des angeregten Zustandes über den Feldstärketensor $G_{\mu\nu}^a$ an die Lagrange-Dichte der Theorie als mögliche Näherung einer solchen Situation dienen könnte.

2. Einleitung und Fragestellung

Der Physiknobelpreis 2013 würdigt die Arbeit zweier Forscher an der theoretischen Formulierung des Mechanismus, der subatomaren Teilchen Masse verleiht. Die beiden Physiker Peter W. Higgs und Francois Englert diskutierten den Prozess der spontanen Symmetriebrechung anhand eines eigens dafür eingeführten Skalarfeldes [1–3]. Dessen Quanta sind heute als Higgs-Teilchen bekannt [4]. Seine zentrale Bedeutung gewinnt dieses Boson durch die Vervollständigung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik. Allerdings lag lange Zeit kein Nachweis über die eigentliche Existenz vor. Der notwendige Beleg wurde erst 50 Jahre später durch den Large Hadron Collider (LHC) an der Europäischen Organisation für Kernforschung (CERN) erbracht. Die Detektoren *Atlas* und *CMS* fanden 2012 unabhängig voneinander ein bis dahin nicht gemessenes Teilchen der Masse 125 GeV, welches als Higgs-Boson identifiziert werden kann [5, 6].

Trotzdem gibt es innerhalb der Theorie des Standardmodells noch offene Fragen. Zum Beispiel ist es nicht zwingend notwendig von einem Higgs-Elementarteilchen auszugehen. Alternativ kann auch die Existenz eines Higgsbindungszustandes angenommen werden, da dies in führender Ordnung identische Ergebnisse liefern würde [7]. Folglich wären dann auch *angeregte* Zustände möglich, was einen wesentlichen Unterschied im Verständnis für die physikalische Realität bedeuten würde.

Unter der Annahme, dass solche gebundenen Zustände möglich sind, ist es Ziel dieser Arbeit den Einfluss eines ersten angeregten Zustandes auf die elastische Streuung von 2 longitudinal polarisierten W-Bosonen zu untersuchen. Dabei wird sich auf Störungsrechnung mithilfe von Feynman-Diagrammen in niedrigster Ordnung beschränkt. Der Prozess der Streuung von W-Bosonen wird deshalb in der vorliegenden Arbeit verwendet, weil er Teil eines der Zerfallskanäle war, an denen das Higgs-Boson experimentell nachgewiesen werden konnte [6].

Am Ergebnis wird anschließend abgeschätzt, unter welchen Voraussetzungen die hier gemachten Ansätze im Experiment zu beobachten wären. So muss man zum Beispiel erwarten, dass die neuen Effekte auf eine Observable nicht stärker als diejenigen des Standardmodells sein werden. Zusätzlich soll die Frage beantwortet werden, ob eine Erweiterung auf höhere angeregte Zustände sinnvoll ist.

3. Grundlagen

3.1. Metrik und Einheiten

Als Metrik wird die flache Metrik $g_{\mu\nu}$ im Minkowski-Raum \mathbb{M} der Form

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1)$$

gewählt. Dann gilt für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{M}$ unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention mit $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ und \mathbf{x} dem entsprechenden Vektor in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten:

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\mathbf{x}) \quad (2)$$

$$x \cdot y \equiv x^\mu y_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (3)$$

Abkürzend soll auch $x \cdot x \equiv x^2$ verwendet werden. Die Begriffe *Skalar* und *Vektor* beziehen sich auf Transformationen im Minkowski-Raum. Lateinische Buchstaben (a,b,c) laufen von eins bis drei und griechische Indizes (μ, ν, ξ etc.) von null bis drei.

Alle Berechnungen erfolgen, wenn nicht anders angegeben, in natürlichen Einheiten: Für das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum \hbar und die Lichtgeschwindigkeit c gilt $c = \hbar = 1$.

3.2. Der Higgs-Sektor im Standardmodell

Betrachtet wird die Lagrange-Dichte \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Gauge}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + a \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (4)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (5)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + g T^a W_\mu^a \quad (6)$$

$$T^a = -\frac{i}{2} \tau^a, \quad (7)$$

mit dem komplexen Skalarfeld Φ , der kovarianten Ableitung D_μ , den Vektorfeldern W_μ^a und dem dazugehörigen Feldstärketensor $G_{\mu\nu}^a$. Die T^a sind die Erzeugenden der schwachen Isospin Eichgruppe $SU(2)$ und bestehen im wesentlichen aus den Pauli-Matrizen τ^a . Für die zugehörigen Strukturkonstanten f^{abc} der Lie-Algebra erhält man:

$$\begin{aligned} f^{abc} T^c &\equiv [T^a, T^b] = \left[-\frac{i}{2} \tau^a, -\frac{i}{2} \tau^b \right] = -\frac{1}{4} [\tau^a, \tau^b] \\ &= -\frac{2}{4} i \epsilon^{abc} \tau^c = \epsilon^{abc} T^c \Rightarrow f^{abc} = \epsilon^{abc}, \end{aligned} \quad (8)$$

wobei die Beziehung $[\tau^a, \tau^b] = 2i \epsilon^{abc} \tau^c$ verwendet wird. Die reellen Kopplungskonstanten g , a und λ werden als positiv angenommen, damit der Effekt der spontanen Symmetriebrechung ausgenutzt werden kann.

Für das Feld Φ wird ein Ansatz in Form eines komplexen skalaren Dubletts

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) + i\beta(x) \\ \frac{v+h(x)+i\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \langle h \rangle = \langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = \langle \eta \rangle = 0, v = \text{const.} \quad (9)$$

gewählt. Voraussetzung ist an dieser Stelle, dass die Quantenfluktuationen, hervorgerufen durch die reellen Felder $\alpha(x), \beta(x), h(x)$ und $\eta(x)$, klein gegenüber dem Vakuumerwartungswert $\langle \Phi \rangle_0 = v^2/2$ sind. Ein Zusammenhang zwischen den Kopplungskonstanten kann durch Betrachtung des Potentialtermes $V(\Phi)$ innerhalb der entsprechenden Hamilton-Dichte \mathcal{H} erhalten werden:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{Kin} + V(\Phi) = \mathcal{H}_{Kin} - a\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \quad (10)$$

$$\partial_{\Phi^\dagger\Phi}\{-a\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2\} = -a + 2\lambda\Phi^\dagger\Phi \stackrel{!}{=} 0 \quad (11)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2\lambda} = \frac{v^2}{2} \quad (12)$$

Dabei stellt \mathcal{H}_{Kin} den hier nicht weiter betrachteten kinetischen Anteil der Hamilton-Dichte dar. Schreibt man (4) mithilfe von (9), so stellt sich unter Verwendung der Relation (12) heraus, dass h ein Feld mit massiven Quanten ist [8]. Dieses Feld wird von nun an als Higgs-Feld mit den Higgs-Bosonen als Quanten der Masse μ bezeichnet. Die anderen Felder aus (9) sind, in Übereinstimmung mit dem Goldstone-Theorem [4], masselos. Weiterhin¹ gibt es drei massive Bosonen der Eichfelder W_μ^a , für die die Substitution

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (13)$$

vorgenommen wird. Die W_μ^\pm werden zusammen mit W_μ^3 in der vorliegenden Arbeit als W-Bosonen bezeichnet und tragen die Masse m_W . Sie sind in der betrachteten Theorie nicht unterscheidbar und werden deswegen als degeneriert² bezeichnet [9].

Damit kann eine Analogie zur standartmäßigen $SU(2) \times U(1)$ -Theorie hergestellt werden, wie sie in der Beschreibung der elektroschwachen Wechselwirkung Anwendung findet [4]. Vernachlässigt wird die elektromagnetische Wechselwirkung³. Damit ist die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung identisch zu der in dieser Arbeit verwendeten. Somit können auch die bekannten Feynman-Regeln übernommen werden (siehe Abschnitt 3.9).

Im Folgenden beschreibt der Ausdruck *innerhalb des Standardmodells* das soeben diskutierte System ohne angeregten Higgs-Zustand.

¹Eine ausführliche Berechnung dieser Ergebnisse, die außerdem in [8] aufgeführt sind, ist im Anhang (A.2.) zu finden.

²Wird die elektromagnetische Wechselwirkung mit einbezogen geht W_μ^3 zum sogenannten Z-Boson über [4].

³Praktisch setzt man dafür den Weinberg-Winkel θ_W und Elementarladung e gleich null.

3.3. Der angeregte Higgs-Zustand

Bis hierhin besteht die verwendete Theorie aus einer vereinfachten Form des elektroschwachen Sektors im Standardmodell.

Ziel ist es nun einen ersten angeregten Higgs-Bindungszustand in die Theorie einzufügen. Dafür müsste zunächst das elementare Higgs-Boson des Standardmodells mit einem gebundenen Zustand ersetzt werden. Da diese Änderung auf Tree-Level Niveau äquivalente Ergebnisse liefern würde [7], wird hierauf allerdings verzichtet. Stattdessen wird der Higgs-Sektor des Standardmodells als Grundlage genutzt. Ein vergleichsweise einfacher Weg einen ersten angeregten Higgs-Zustand in die Betrachtungen einzufügen führt über eine effektive Theorie. Dabei wird der neue Zustand formal als unabhängiges Teilchen eines Feldes ψ behandelt und mittels eines Wechselwirkungsterms der Lagrange-Dichte hinzugefügt. In dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Möglichkeiten dafür untersucht: Eine Wechselwirkung von ψ mit den Eichfeldern W_μ^a ergibt zum einen eine Lagrange-Dichte \mathcal{L}_I der Form

$$\mathcal{L}_I = \gamma \psi W_\mu^a W_a^\mu. \quad (14)$$

Zum anderen erhält man über die Wechselwirkung mit dem Feldstärketensor $G_{\mu\nu}^a$ die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{II} = \tilde{\gamma} \psi G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a. \quad (15)$$

Dabei tragen die Kopplungskonstanten γ und $\tilde{\gamma}$ die Dimension einer Masse ([Masse]) beziehungsweise einer inversen Masse ([1/Masse]). An dieser Stelle ist es wichtig darauf hinzuweisen, dass der erste Ansatz nicht vollkommen eichinvariant ist und der zweite wäre ohne eine Kopplungskonstante von der Dimension [Masse⁵]. Dies kann eventuell zu Divergenzen im Bereich hoher Energien führen, worauf in Abschnitt 4.2 eingegangen wird.

3.4. Schwerpunktsystem

Die Streuung $W^+ W^- \rightarrow W^+ W^-$ wird im Schwerpunktsystem betrachtet, welches die folgenden Eigenschaften aufweist: Vor der Streuung soll die Ausbreitungsrichtung der Bosonen parallel zur z-Achse liegen, von welcher aus der Streuwinkel θ gemessen wird (siehe Abbildung 1). Die Viererimpulse der kollidierenden Teilchen werden mit k_1, k_2 und die der auslaufenden Streuprodukte mit k_3, k_4 bezeichnet. Jedes der einlaufenden Teilchen habe die Energie E , sodass nach relativistischer Energie-Impuls-Beziehung für $K = K(E) = \sqrt{E^2 - m_W^2}$ folgt. Für spätere Betrachtungen ist es zusätzlich zweckmäßig sogenannte Mandelstam-Variablen einzuführen [4]:

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + k_4)^2 \quad (16)$$

$$t = (k_4 - k_2)^2 = (k_1 - k_3)^2 \quad (17)$$

$$u = (k_3 - k_2)^2 = (k_4 - k_1)^2, \quad (18)$$

wobei \sqrt{s} der gesamten Schwerpunktenergie entspricht.

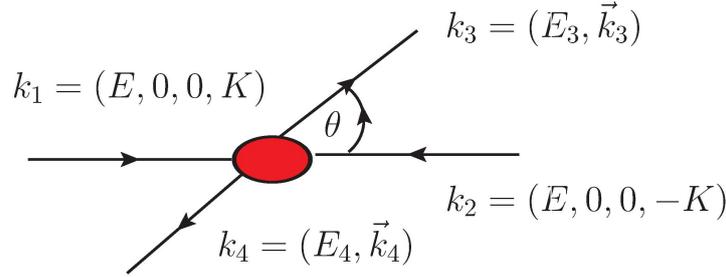


Abbildung 1: Schematische Darstellung des elastischen Streuprozesses zweier Teilchen im Schwerpunktsystem.

3.5. Differentieller und totaler Wirkungsquerschnitt

In natürlichen Einheiten haben der differentielle sowie der totale Wirkungsquerschnitt die Einheit $[1/\text{Masse}^2]$ [10]. Wenn f die im Prozess entstandenen Teilchen nummeriert, ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt σ [4] :

$$\sigma = \frac{1}{2E_{k_1} 2E_{k_2} |v_{k_1} - v_{k_2}|} \left(\prod_f \int \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow \{k_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(k_1 + k_2 - \sum_f k_f \right) \quad (19)$$

Dabei bezeichnet $|v_{k_1} - v_{k_2}| \stackrel{!}{=} 2$ die Geschwindigkeitsdifferenz der kollidieren Teilchen mit der jeweiligen Energie E_{k_1} beziehungsweise E_{k_2} . Die Streuamplitude \mathcal{M} wird mithilfe von Feynman-Diagrammen bestimmt. Daraus folgt für den Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem σ_{CM} :

$$\sigma_{CM} = \frac{1}{2^3 E^2} \iint \frac{d^3 k_3 d^3 k_4}{(2\pi)^6} \frac{1}{2^2 E_3 E_4} |\mathcal{M}(k_1, k_2 \rightarrow k_3, k_4)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \quad (20)$$

Die relativistische Impulserhaltung wird durch die Delta-Distribution beschrieben, sodass sich im Schwerpunktsystem mit $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ und Integration über $d^3 k_4$ die Beziehungen $\mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_4 \equiv \tilde{\mathbf{k}}$ und $E_3 = \sqrt{\mathbf{k}_3^2 + m_w^2} = E_4 = \sqrt{\tilde{\mathbf{k}}^2 + m_w^2} \equiv \tilde{E}$ ergeben. Damit ist die Streuamplitude nur noch von den Energien E , \tilde{E} und dem Winkel θ abhängig und man erhält für den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{CM} = \frac{1}{2^7 E^2 \pi^2} \int \frac{d^3 \tilde{k}}{\tilde{E}^2} |\mathcal{M}(E, \tilde{E}, \theta)|^2 \delta(2E - 2\tilde{E}) \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2^8 E^2 \pi^2} \int d\Omega \int_{m_w}^{\infty} d\tilde{E} \frac{\sqrt{\tilde{E}^2 - m_w^2}}{\tilde{E}} |\mathcal{M}(E, \tilde{E}, \theta)|^2 \delta(E - \tilde{E}) \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2^8 E^2 \pi^2} \int d\Omega \frac{\sqrt{E^2 - m_W^2}}{E} |\mathcal{M}(E, \tilde{E} = E, \theta)|^2 \Leftrightarrow E \geq m_W, \quad (23)$$

wobei im vorletzten Schritt zu Kugelkoordinaten mit dem Raumwinkelement $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ ($\varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]$) übergegangen wird. Außerdem ist $d|\mathbf{k}|$ mit $\frac{\tilde{E}}{|\mathbf{k}|} d\tilde{E}$ substituiert worden. Gleichung (23) verdeutlicht, dass die Energie der einfallenden Teilchen mindestens ihrer Masse entsprechen muss, was der physikalischen Erwartung entspricht. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist im Schwerpunktsystem mit der Streuamplitude \mathcal{M} also:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{\sqrt{E^2 - m_W^2}}{2^8 E^3 \pi^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\sqrt{s/4 - m_W^2}}{2^5 s^{3/2} \pi^2} |\mathcal{M}|^2. \quad (24)$$

Zusammenfassend erhält man für die Impulsvektoren mit $\kappa = \sqrt{1 - 4m_W^2/s}$:

$$k_1 = (E, 0, 0, \sqrt{E^2 - m_W^2}) = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, \kappa) \quad (25)$$

$$k_2 = (E, 0, 0, -\sqrt{E^2 - m_W^2}) = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -\kappa) \quad (26)$$

$$k_3 = (E, 0, \sqrt{E^2 - m_W^2} \sin\theta, \sqrt{E^2 - m_W^2} \cos\theta) = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, \kappa \sin\theta, \kappa \cos\theta) \quad (27)$$

$$k_4 = (E, 0, -\sqrt{E^2 - m_W^2} \sin\theta, -\sqrt{E^2 - m_W^2} \cos\theta) = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, -\kappa \sin\theta, -\kappa \cos\theta) \quad (28)$$

Durch eine Multiplikation mit $(\hbar c)^2 \approx (0.19733 \text{ GeVfm})$ kann der Wirkungsquerschnitt in SI-Einheiten umgerechnet werden [11].

3.6. Polarisation der Eichbosonen

Da es sich bei W-Bosonen um Vektorbosonen handelt, kann ihnen eine Polarisationsrichtung zugeordnet werden. Die Polarisationsvektoren $\epsilon(k)$ erfüllen per Definition [11] die Relationen

$$\epsilon^\mu k_\mu = 0 \quad \epsilon^2 = -1. \quad (29)$$

Damit sind die $\epsilon_\mu(k)$ zum Viererimpuls k senkrechte und zeitartige Vektoren. Bei einer Bewegung in beliebiger Richtung \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$), werden die transversalen Polarisationsvektoren konventionell [11] senkrecht zur Bewegungsrichtung gewählt. Für den verbleibenden longitudinalen Vektor folgt [11]:

$$\epsilon_L^\mu(k) = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m_W}, \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 - m_W^2}}{m_W} \mathbf{n} \right) = (\epsilon_L^\mu(k))^* \quad (30)$$

In den folgenden Berechnungen werden ausschließlich longitudinal polarisierte W-Bosonen berücksichtigt, die sich im Schwerpunktsystem schreiben lassen als [11]:

$$\epsilon_L(k_1) = \frac{\sqrt{s}}{2m_W}(\kappa, 0, 0, 1) \qquad \epsilon_L(k_2) = \frac{\sqrt{s}}{2m_W}(\kappa, 0, 0, -1) \quad (31)$$

$$\epsilon_L(k_3) = \frac{\sqrt{s}}{2m_W}(\kappa, 0, \sin \theta, \cos \theta) \qquad \epsilon_L(k_4) = \frac{\sqrt{s}}{2m_W}(\kappa, 0, -\sin \theta, -\cos \theta) \quad (32)$$

3.7. Numerische Berechnungen

Ein Großteil der algebraischen sowie numerischen Berechnungen wurde mit dem Programm Wolfram Mathematica® Version 9.0.1.0 durchgeführt. Um den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu integrieren wurde die interne Funktion *NIntegrate* verwendet. Eine zusätzliche Kontrolle wurde mittels einer eigens implementierten Gauß-Legendre-Integration nach [12, 13] durchgeführt. Der Code der Berechnungen ist im Anhang (A.2.) zu finden.

3.8. Pseudorapidität

Der differentielle Wirkungsquerschnitt kann entweder in Abhängigkeit des Winkels θ oder mithilfe der sogenannten Pseudorapidität η angegeben werden. Diese ist definiert als [10]:

$$\eta = -\ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \Leftrightarrow \theta = 2 \arctan [e^{-\eta}] \quad (33)$$

Die Detektoren *Atlas* und *CMS* decken das Intervall $|\eta| < 2.5$ ab [5, 6], was einem Winkelbereich von ungefähr $10^\circ < \theta < 170^\circ$ entspricht.

3.9. Feynman-Regeln für Vertices und Propagatoren

$$\begin{aligned}
 W^\pm, W^3(k) \text{ (wavy line)} &= \frac{-i}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} + (\xi - 1)k_\mu k_\nu / (k^2 - \xi m_W^2)) \\
 h(k) \text{ (dashed line)} &= \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \\
 \text{W-Vertex (3 lines)} &= -ig[(k_1 - k_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\lambda\mu}] \\
 \text{W-Vertex (4 lines)} &= ig^2 S_{\mu\nu,\lambda\rho} \\
 \text{h-Vertex (2 lines)} &= igm_W g_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

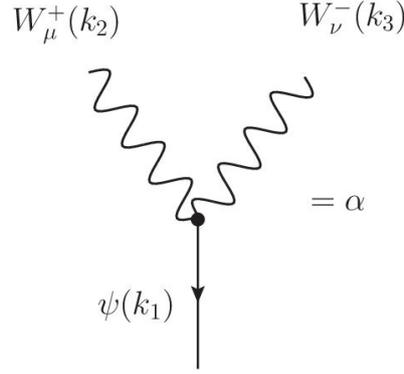
Abbildung 2: Feynman-Regeln der verwendeten Propagatoren und Vertices [8]. Dabei ist $S_{\mu\nu,\lambda\rho} = 2g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}$ und $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl.

Die Feynman-Regeln für den Higgs-Sektor innerhalb des Standardmodells (siehe Abschnitt 3.2) können aus der Literatur entnommen werden [8]. Die für diese Arbeit relevanten Propagatoren und Vertices sind in Abbildung 2 dargestellt. Wenn nicht anders angegeben, werden die Teilchen als zum Vertex hin laufend angenommen. Alle angegebenen Feynman-Regeln und Berechnungen beziehen sich auf den Impulsraum. Die entsprechenden Viererimpulse der Teilchen sind in Klammern angegeben und seien vorerst willkürlich gewählt. Der Propagator der W-Bosonen (Abbildung 2 oben) enthält zusätzlich die Eichvariable ξ . Diese kann willkürlich gewählt werden. Da das Ergebnis aller Berechnungen unabhängig von ihr sein muss [4], wird sie als Kontrolle beibehalten.

Die Feynman-Regeln für den angeregten Higgs-Zustand wurden mithilfe des Programmes *FeynRules 2.0* [14] abgeleitet. Dabei erhält man für \mathcal{L}_I und \mathcal{L}_{II} jeweils einen weiteren Vertex, dessen Struktur in Abbildung 3 verdeutlicht ist. Mithilfe der abgeleiteten Feynman-Regeln ergeben sich die Beziehungen für den Vertex α :

$$\mathcal{L}_I : \quad \alpha = -2i\gamma g_{\mu\nu} \quad (34)$$

$$\mathcal{L}_{II} : \quad \alpha = -4i\tilde{\gamma}k_{2\nu}k_{3\mu} + 4i\tilde{\gamma}g_{\mu\nu}(k_2 \cdot k_3) \quad (35)$$


 Abbildung 3: Zusätzlicher Vertex des angeregten Higgs-Zustandes ψ .

Nach [15] können für den Propagator $D(k)$ des angeregten Higgs-Zustandes, welcher durch eine durchgezogene Linie in Feynman-Diagrammen repräsentiert wird, drei verschiedene Ansätze gewählt werden:

$$D_a(k) = \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (36)$$

$$D_b(k) = \frac{i}{k^4 - 2M^2 \cos(2\beta)k^2 + M^4 + i\epsilon} \quad (37)$$

$$D_c(k) = i \left(-k^2 + \left(M + i\frac{\Gamma}{2} \right)^2 - w^2 \left(\Pi(k^2, M^2, \Lambda^2) - \Pi \left(\left(M + i\frac{\Gamma}{2} \right)^2, M^2, \Lambda^2 \right) \right) - v^2 \left(\Pi(k^2, m_w^2, \Lambda^2) - \Pi \left(\left(M + i\frac{\Gamma}{2} \right)^2, m_w^2, \Lambda^2 \right) \right) + i\epsilon \right)^{-1} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Pi(k^2, M^2, \Lambda^2) = & -\sqrt{1 + \frac{4M^2}{-k^2}} \operatorname{atanh} \sqrt{\frac{-k^2}{4M^2 - k^2}} \\ & + \frac{(2\Lambda^2 + 4M^2 - k^2) \operatorname{atanh} \sqrt{\frac{-k^2}{4\Lambda^2 + 4M^2 - k^2}}}{\sqrt{-k^2} \sqrt{4(\Lambda^2 + M^2) - k^2}} + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

Der einfachste Propagator $D_a(k)$ entspricht formal dem Propagator des Higgs-Teilchens im Standardmodell [4] und simuliert damit ein stabiles Teilchen. Dieser hat einen Pol an der Stelle $k^2 = M^2$, sodass M in Analogie zum Standardmodell [11] als Masse des angeregten Zustandes interpretiert werden kann.

Einem solchen Konzept kann im Sinne eines effektiven Ansatzes künstlich eine Breite hinzugefügt werden, sodass ein Zerfall möglich wird. Beim Propagator $D_b(k)$ wird dies über die Konstante β durchgeführt. Für D_b existieren Pole an den Stellen

$$Me^{\pm i\beta} = M(\cos\beta \pm i \sin\beta), \quad (40)$$

wobei der Realteil der Polstelle wieder als Masse und der Imaginärteil als Breite des Teilchens interpretiert wird. Obwohl nun die Masse von der Konstanten β abhängt, ist im Folgendem weiterhin die Variable M die *Masse* des angeregten Zustands.

Der Propagator $D_C(k)$ wurde mithilfe einer Störungsrechnung unter Einbeziehung von Schleifen erster Ordnung in Feynman-Diagrammen ermittelt [16]. Er stellt den genauesten Ansatz dar, da er es sowohl ermöglicht die Selbstwechselwirkung, als auch die Stärke des Zerfallskanals zu modellieren. Die Selbstwechselwirkung ist eine zusätzliche Eigenschaft des angeregten Zustandes und wird durch die Konstante w bestimmt. Die Stärke des Zerfallskanals ist auf dem betrachteten Tree-Level Niveau proportional zur Zerfallswahrscheinlichkeit und wird durch v festgelegt [16]. Beide Konstanten haben die Einheit [Masse]. Die Breite des Teilchens ist durch Γ gegeben ($[\Gamma] = [\text{Masse}]$). Die Variable Λ gibt den sogenannten Cutoff an, d.h. die maximal betrachtete Energieskala. Es wird der Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ betrachtet. Der Pol dieses Propagators wird aufgrund der hyperbolischen Terme numerisch bestimmt. Im Fall $w=v=0$ entspricht der Realteil des Pols der Variable M und der Imaginärteil dem Ausdruck $\Gamma/2$. Die Abweichung von diesen beiden Werten für wachsende w und v ist in den Abbildungen 4 und 5 beispielhaft dargestellt. Man erkennt, dass die stärkste Variation im Imaginärteil des Pols durch die Konstante v vorgenommen werden kann. Dies begründet sich aus dem kausalen Zusammenhang der Breite eines Teilchens und dessen Zerfallswahrscheinlichkeit.

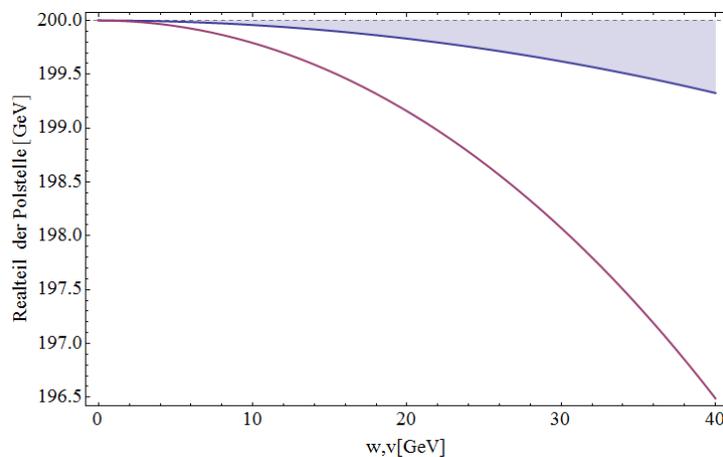


Abbildung 4: Realteil der Polstelle des Propagators D_C in Abhängigkeit von w (blau) beziehungsweise v (rot) für den Fall $M=200$ GeV und $\Gamma=40$ GeV. Die jeweils andere Variable ist Null gesetzt.

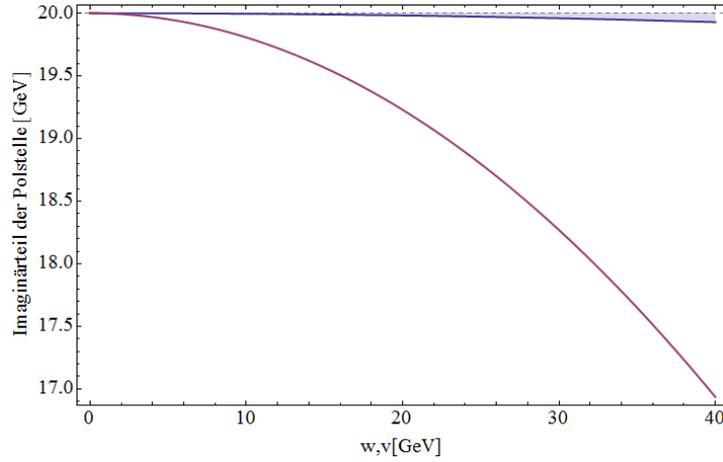


Abbildung 5: Imaginärteil der Polstelle des Propagators D_c in Abhängigkeit von w (blau) beziehungsweise v (rot) für den Fall $M=200$ GeV und $\Gamma=40$ GeV. Die jeweils andere Variable ist Null gesetzt.

4. Berechnungen

4.1. Streuamplituden

Die Viererimpulse der Resonanzen beziehungsweise der ausgetauschten virtuellen Teilchen sind gegeben durch

$$s = k^2 = p^2 = q^2 = 4E^2 \quad (41)$$

$$t = k'^2 = p'^2 = q'^2 = (4m_W^2 - s) \left(\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right). \quad (42)$$

Die Streuamplitude $i\mathcal{M}$ der longitudinalen W-Streuung berechnet sich in niedrigster Ordnung über die Summe der in Abbildung 6 dargestellten Diagramme:

$$\mathcal{M}_{4W} = \frac{g^2 s}{32m_W^4} [16m_W^2 - 5s + 12(s - 4m_W^2) \cos \theta + s \cos(2\theta)] \quad (43)$$

$$\mathcal{M}_{sW} = -\frac{g^2(4m_W^2 - s)(2m_W^2 + s)^2 \cos \theta}{4m_W^4(m_W^2 - s)} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{tW} = & \frac{-g^2}{64m_W^4(-2m_W^2 + s + (4m_W^2 - s) \cos \theta)} [256m_W^6 - 384m_W^4 s + 120m_W^2 s^2 \\ & - 14s^3 + (256m_W^6 + 448m_W^4 s - 196m_W^2 s^2 + 17s^3) \cos \theta \\ & - 2s(160m_W^4 - 36m_W^2 s + s^2) \cos(2\theta) + (4m_W^2 s^2 - s^3) \cos(3\theta)] \end{aligned} \quad (45)$$

$$\mathcal{M}_{sH} = -g^2 \frac{(s - 2m_W^2)^2}{4m_W^2(s - \mu^2)} \quad (46)$$

$$\mathcal{M}_{tH} = \frac{g^2(4m_W^2 - s + s \cos \theta)^2}{8m_W^2(-4m_W^2 + s + 2\mu^2 + (4m_W^2 - s) \cos \theta)} \quad (47)$$

Alle Ergebnisse sind wie erwartet unabhängig vom Eichparameter ξ .

Für die zwei vom angeregten Higgs-Zustand abhängigen Diagramme ist eine Unterscheidung nach verwendeter Lagrange-Dichte notwendig. Man findet mit $x = a, b, c$ für \mathcal{L}_I

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{saH}^I &= (-2i\gamma)^2 \epsilon_L^\nu(k_1) \epsilon_{L\nu}(k_2) \epsilon_L^\rho(k_3) \epsilon_{L\rho}(k_4) (-iD_x(q)) \\ &= (-\gamma^2) \frac{(s - 2m_W^2)^2}{m_W^4} (-iD_x(q)) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{taH}^I &= (-2i\gamma)^2 \epsilon_L^\nu(k_1) \epsilon_{L\nu}(k_3) \epsilon_L^\rho(k_2) \epsilon_{L\rho}(k_4) (-iD_x(q')) \\ &= -\frac{\gamma^2(4m_W^2 - s + s \cos \theta)^2}{4m_W^4} (-iD_x(q')), \end{aligned} \quad (49)$$

wobei $D_x(\cdot)$ einen der drei Propagatoren angibt. Analog ergibt sich bei Verwendung von \mathcal{L}_{II} :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{saH}^{II} &= (4i\tilde{\gamma})^2 [-\epsilon_L^\nu(k_1) k_{2\nu} \epsilon_L^\mu(k_2) k_{1\mu} + \epsilon_L^\nu(k_1) \epsilon_{L\nu}(k_2) k_{1\mu} k_2^\mu] \\ &\quad \times [-\epsilon_L^\rho(k_3) k_{4\rho} \epsilon_L^\lambda(k_4) k_{3\lambda} + \epsilon_L^\lambda(k_4) \epsilon_{L\lambda}(k_3) k_{3\rho} k_4^\rho] (-iD_x(q)) \\ &= (-16\tilde{\gamma}^2) m_W^4 (-iD_x(q)) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{taH}^{II} &= (4i\tilde{\gamma})^2 [-\epsilon_L^\nu(k_1) k_{3\nu} \epsilon_L^\rho(k_3) k_{1\rho} + \epsilon_L^\nu(k_1) \epsilon_{L\nu}(k_3) k_{1\nu} k_3^\nu] \\ &\quad \times [-\epsilon_L^\mu(k_2) k_{4\mu} \epsilon_L^\lambda(k_4) k_{2\lambda} + \epsilon_L^\mu(k_2) \epsilon_{L\mu}(k_4) k_2^\lambda k_{4\lambda}] (-iD_x(q')) \\ &= (-16\tilde{\gamma}^2) m_W^4 \cos^2 \theta (-iD_x(q')) \end{aligned} \quad (51)$$

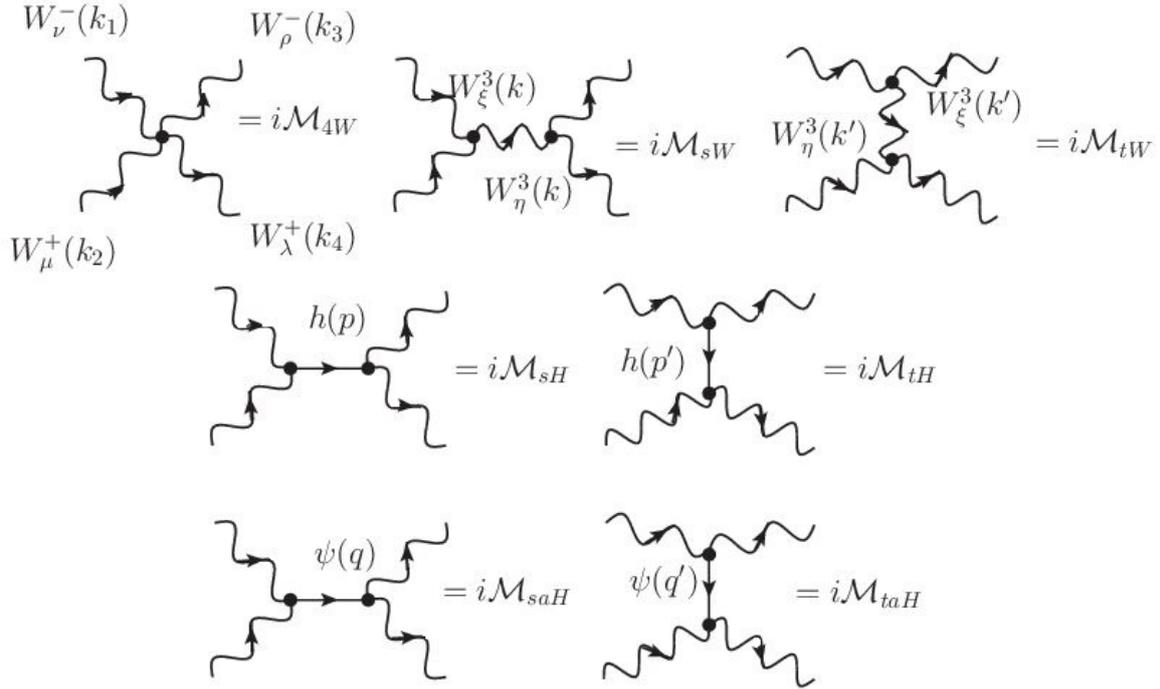


Abbildung 6: Feynman-Diagramme für longitudinale W-Streuung in niedrigster Ordnung. Die ein- und auslaufenden Teilchen sind im ersten Diagramm (4-Punkt-Vortex links oben) spezifiziert und gelten für alle weiteren Diagramme in identischer Weise. Die beiden untersten Diagramme beinhalten den angeregten Higgs-Zustand. Die Zeitachse verläuft horizontal.

4.2. Einheiten und Konvergenzen

Die Amplituden des Higgs-Sektors im Standardmodell (43)-(47) haben keine Einheit, sodass der differentielle Wirkungsquerschnitt (siehe (24)) die gewünschte Einheit $[1/Masse^2]$ erhält (siehe Abschnitt 3.5).

Für $\theta \rightarrow 0$, was dem Grenzfall der Vorwärtsstreuung entspricht, tritt eine sogenannte kollineare Singularität für hohe Schwerpunktennergien auf. Mathematisch findet dies seine Ursache in führender Ordnung in der Amplitude \mathcal{M}_{tW} . Für $\theta = 0$ wird der Nenner von \mathcal{M}_{tW} unabhängig von s , sodass $\mathcal{M}_{tW} \propto s$ ist. Eingesetzt in Gleichung (24) folgt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM}(\theta = 0) \propto s$. Dadurch wird eine Divergenz im Wirkungsquerschnitt für hohe Schwerpunktennergien verursacht.

Da der Fall $\theta = 0$ für den LHC aufgrund geometrischer Verhältnisse nicht relevant ist, wird sich in dieser Arbeit darauf beschränkt den Bereich einer Pseudorapidität von $|\eta| < 2.5$ zu betrachten (siehe Abschnitt 3.8).

Eine Übersicht des Verhaltens der Amplituden der Amplituden, die den angeregten Higgs-Zustandes enthalten, ist in Tabelle 1 gegeben. Es wird der Fehler der effektiven Theorie bemerkbar: In Kombination mit den Propagatoren D_a und D_c ist die Unabhängigkeit der Streu-

amplituden von einer Einheit wie im Standardmodell nur durch die speziellen Kopplungskonstanten ($[\gamma] = [Masse]$, $[\tilde{\gamma}] = [1/Masse]$) möglich. Dieses Problem kann beim Propagator D_b nicht gelöst werden, sodass die entsprechende Amplitude die Einheit $[1/Masse^2]$ erhält. Dieser Fehler entsteht deshalb, weil bei diesem Propagator auch ein effektiver Ansatz gewählt wurde.

Die Konvergenzbetrachtung⁴ zeigt, dass Probleme bei der Kombination von \mathcal{L}_I mit D_a und D_b auftreten. Deshalb wird hier ein Ansatz der Form

$$\gamma \rightarrow \gamma(q, q') = \frac{c\zeta}{(q^2 + \chi^2)^y(q'^2 + \chi^2)^y} \quad (52)$$

gewählt, um die Divergenzen für hohe Schwerpunktennergien zu unterdrücken. Die Konstanten χ und ζ sollen das Entstehen einer Polstelle im betrachteten Bereich verhindern beziehungsweise die Stärke der Kopplung steuern. Der Wert von χ trägt die Dimension einer Masse, sodass ζ von der Dimension $[Masse^5]$ sein muss, um $[\gamma] = [Masse]$ zu gewährleisten. Die dimensionslosen Konstanten c und y dienen einer weiteren Steuerung der Dämpfung. Die Zahlenwerte werden so gewählt, dass

$$\gamma(q = 0, q' = 0, c = 1) = \frac{\zeta}{\chi^{4y}} = 1 \quad (53)$$

gilt.

Tabelle 1: Einheiten und Verhalten für große s der Amplituden der Diagramme, die den angeregten Higgs-Zustand enthalten. Die Propagatoren sind separat angegeben. Der Fall $\theta \rightarrow 0$ wird nicht betrachtet. Eine weitere Ausnahme ist der Fall $\theta \rightarrow \pi/2$ für die Amplitude \mathcal{M}_{taH}^{II} , die dann gegen 0 geht.

		Einheit	Konvergenz
Propagator	D_a	$[1/Masse^2]$	$\propto 1/s$
	D_b	$[1/Masse^4]$	$\propto 1/s^2$
	D_c	$[1/Masse^2]$	$\propto 1/s$
angeregter Higgs-Zustand	\mathcal{M}_{saH}^I (ohne Propagator)	$[\gamma^2] = [Masse^2]$	$\propto s^2$
	\mathcal{M}_{taH}^I (ohne Propagator)	$[\gamma^2] = [Masse^2]$	$\propto s^2$
	\mathcal{M}_{saH}^{II} (ohne Propagator)	$[\tilde{\gamma}^2 \cdot Masse^4] = [Masse^2]$	$\propto const.$
	\mathcal{M}_{taH}^{II} (ohne Propagator)	$[\tilde{\gamma}^2 \cdot Masse^4] = [Masse^2]$	$\propto const.$

⁴Kombiniert man \mathcal{L}_I mit D_a oder D_b so erhält man $|\mathcal{M}|^2 \propto s^2$, was durch der zusätzlichen $1/s$ -Proportionalität des Faktors $\sqrt{s/4 - m_w^2}/(2^5 s^{3/2} \pi^2)$ im differentiellen Wirkungsquerschnittes nicht kompensiert werden kann.

4.3. Wirkungsquerschnitt im Standardmodell σ_{St}

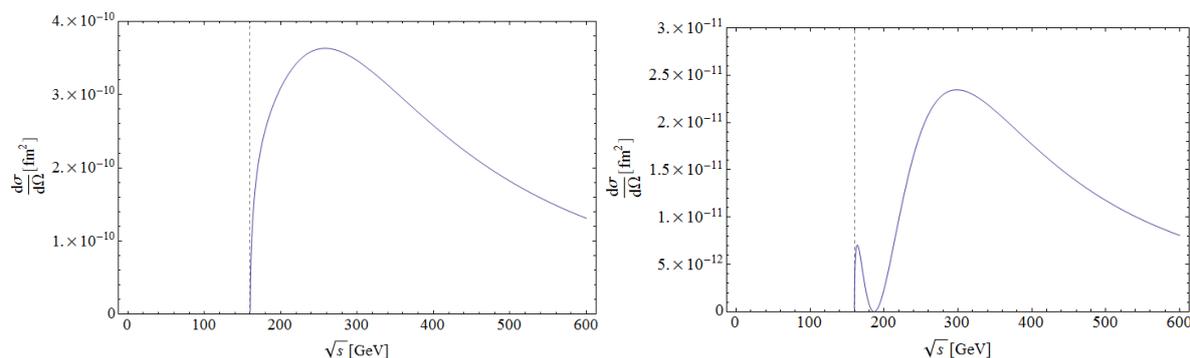


Abbildung 7: Differentieller Wirkungsquerschnitt der Amplituden innerhalb des Standardmodells für $\theta = \pi/4$ (links) und $\theta = \pi/3$ (rechts).

In Abbildung 7 ist der differentiellen Wirkungsquerschnitt⁵ für zwei verschiedene Winkel in $[fm^2]$ zu sehen. Die Kurve beginnt bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 160$ GeV an der Stelle $0 fm^2$. An diesem Punkt haben die W-Bosonen keinerlei kinetische Energie und deshalb ist eine Kollision nicht möglich. Für $\sqrt{s} \rightarrow \infty$ geht der differentielle Wirkungsquerschnitt gegen Null. Im Bereich zwischen $\sqrt{s} = 160$ GeV bis $\sqrt{s} \approx 600$ GeV ist die Struktur der elastischen W-Streuung zu erkennen, welche in der Regel die Form eines einzelnen Peaks hat (siehe Abbildung 7 links). Für bestimmte Winkelbereiche kommt es zusätzlich zu Interferenzerscheinungen (siehe Abbildung 7 rechts). Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{St} ist in Abbildung 8 aufgetragen. Er dient den Modellen inklusive angeregtem Higgs-Zustand als Vergleich. Integriert wurde über den in Abschnitt 3.8 angegebenen Winkelbereich.

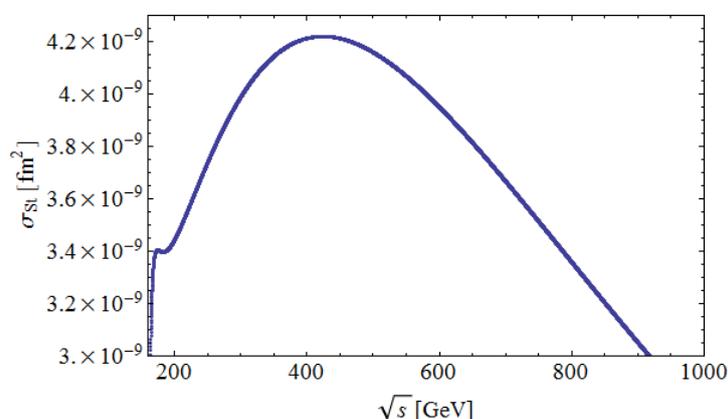


Abbildung 8: Totaler Wirkungsquerschnitt σ_{St} innerhalb des Standardmodells.

⁵Nach Überführung in SI-Einheiten.

4.4. Wirkungsquerschnitt σ innerhalb des \mathcal{L}_{II} -Ansatzes mit drei verschiedenen Propagatoren

Im Folgenden wird zunächst der Einfluss der unterschiedlichen Propagatoren untersucht. Dies geschieht zuerst anhand des \mathcal{L}_{II} -Ansatzes, da sich dessen Amplituden im wesentlichen durch die Multiplikation mit einer Konstante vom eigentlichen Propagator unterscheiden⁶. Im Anschluss erfolgt eine Darstellung der zentralen Unterschiede zum \mathcal{L}_I -Ansatz. Es werden dabei Kopplungskonstanten gewählt, die den diskutierten Effekt deutlich hervortreten lassen. Zudem gilt immer $g=1$. Die Masse des angeregten Zustandes M wird für drei Werte untersucht: 160 GeV, 200 GeV und 260 GeV. Ersteres entspricht der doppelten W -Masse und letzteres übersteigt die Schwelle von zwei Higgs-Massen. Die Abkürzungen σ und $d\sigma/d\Omega$ bezeichnen den totalen beziehungsweise differentiellen Wirkungsquerschnitt der im jeweiligen Unterpunkt betrachteten Theorie.

4.4.1. \mathcal{L}_{II} -Ansatz in Kombination mit dem Propagator D_a

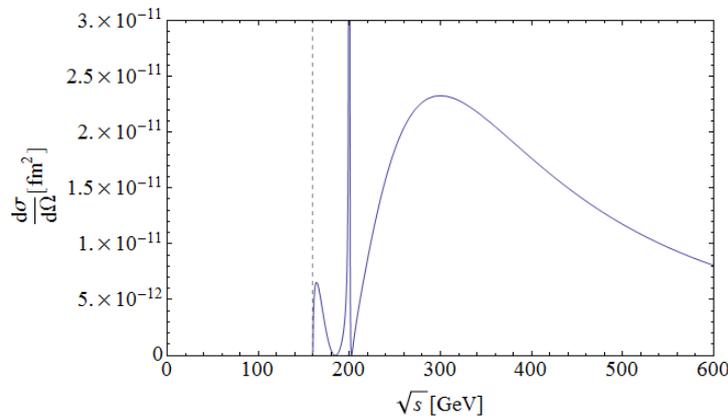


Abbildung 9: Differentieller Wirkungsquerschnitt für $\theta = \pi/3$, $\tilde{\gamma} = 0.0004/\text{GeV}$ und $M=200$ GeV.

In Abbildung 9 ist beispielhaft der differentielle Wirkungsquerschnitt für $\theta = \pi/3$ dargestellt. Der angeregte Higgs-Zustand bedingt eine Divergenz an der Stelle $\sqrt{s} = M$. Eine Variation der Masse verursacht nur eine Verschiebung dieser Divergenz. Um den Einfluss auf Punkte außerhalb dieser Divergenz zu untersuchen, wurde in den Abbildungen 10 und 11 das Verhältnis σ/σ_{St} des totalen Wirkungsquerschnittes σ mit dem des Standardmodells σ_{St} für zwei verschiedene Kopplungen geplottet. Neben der Dominanz der Divergenzen erkennt man ein rasches Streben gegen $\sigma/\sigma_{St}=1$ für hohe Schwerpunktsenergien.

⁶Eine Ausnahme stellt der Fall $\theta \rightarrow \pi/2$ dar, wodurch $\mathcal{M}_{taH}^{II} \rightarrow 0$ geht.

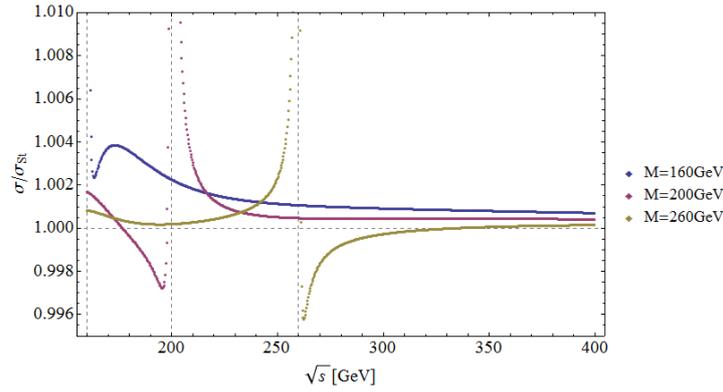


Abbildung 10: Verhältnis σ/σ_{St} in Abhängigkeit der Masse M des angeregten Higgs-Zustandes mit einer Kopplung von $\tilde{\gamma} = 0.0004/\text{GeV}$.

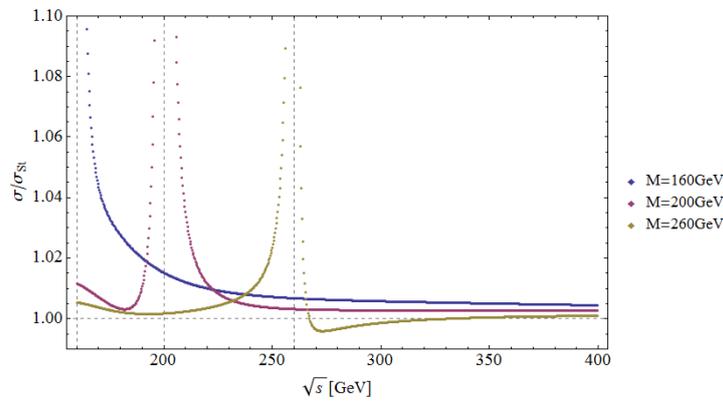


Abbildung 11: Verhältnis σ/σ_{St} in Abhängigkeit der Masse M des angeregten Higgs-Zustandes mit einer Kopplung von $\tilde{\gamma} = 0.001/\text{GeV}$.

4.4.2. \mathcal{L}_{II} -Ansatz in Kombination mit dem Propagator D_b

Analog zu den Betrachtungen in Abschnitt 4.4.1 ist die Stelle des stärksten Einflusses durch den Pol des Propagators und somit mit M und β gegeben (siehe Gleichung (40)). In Abhängigkeit von der Breite β sind sowohl konstruktive als auch destruktive Interferenzen möglich. Es wird $\beta = 0.1$ betrachtet, was eine Breite des angeregten Zustandes von ungefähr 10% seiner Masse modelliert. Für wesentlich größere Werte von β , was einem stabilen Teilchen nahe kommt⁷, gewinnen vor allem die Effekte des Standardmodells an Bedeutung. Ein ähnliches Verhalten ist für $\beta \rightarrow 0$ zu beobachten, da der Propagator dadurch in die Form $D_b(k, \beta \rightarrow 0) = i/(k^2 - M^2)^2$ übergeht. Dies entspricht bis auf die Quadratur D_a und würde somit keine neuen Erkenntnisse liefern.

Bei einer angenommenen Masse von $M = 160 \text{ GeV}$, d.h. der doppelten W-Masse, kommt es im totalen Wirkungsquerschnitt zu einer konstruktiven Überlagerung der Effekte des Standardmodells und des angeregten Higgs-Zustandes bei $\sqrt{s} \approx 160 \text{ GeV}$. Mit steigender Schwer-

⁷Exakt wäre dies im Grenzfall $\beta \rightarrow \pi/4$ gegeben.

punktenergie findet man zunächst eine destruktive Interferenz und im Anschluss ein Streben gegen $\sigma/\sigma_{St} = 1$. Ein Verhalten dieser Art war auch bei dem Propagator D_a zu beobachten (siehe Abbildung 10), allerdings ist es im divergenten Verhalten des Wirkungsquerschnittes „untergegangen“. Dieses Ergebnis ist in Abbildung 12 verdeutlicht.

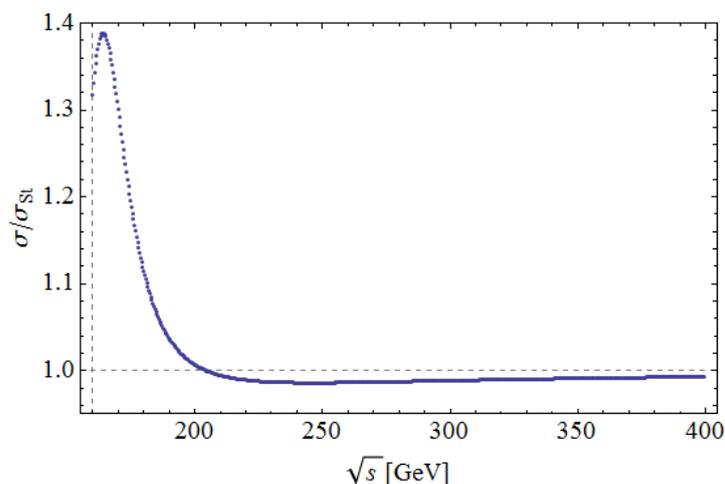


Abbildung 12: Verhältnis σ/σ_{St} bei einer Kopplung von $\tilde{\gamma} = 0.1/\text{GeV}$ und einer Masse $M=160$ GeV sowie einer Breite von $0.1M$ ($\beta \approx 0.1$).

Erhöht man die betrachtete Masse auf $M = 200$ GeV, so wird die Ursache der destruktiven Interferenz im totalen Wirkungsquerschnitt deutlicher: Wählt man wieder eine konstante Breite von 10% der Masse M , so entsteht im differentiellen Wirkungsquerschnitt für Winkel⁸ bis $\theta \approx 57^\circ$ ebenfalls eine destruktive Interferenz (siehe Abbildung 13 links). Für größere Winkel geht dieses Minimum zwar in ein lokales Maximum über (siehe Abbildung 13 rechts), doch überschreitet es nicht die Werte innerhalb des Standardmodells. Somit bleibt letztendlich eine negative Bilanz im totalen Wirkungsquerschnitt bestehen. Diese Betrachtung gilt aber ausschließlich bei konstanter und nicht zu starker Kopplung, die hier mit $\tilde{\gamma} = 0.2/\text{GeV}$ gewählt wurde: Da in die Wirkungsquerschnitte nur Absolutbeträge eingehen, würde die destruktive Interferenz wieder in einen Peak übergehen, sobald der Beitrag des Standardmodells und der Beitrag des angeregten Higgs-Zustandes betragsmäßig gleich sind. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass dies nicht der Fall ist, was der physikalischen Intuition entspricht.

⁸Dieser Wert ist willkürlich durch Wahl von β festgelegt. Für kleinere Werte von β wird dieser Punkt zu kleineren Winkeln hin verschoben.

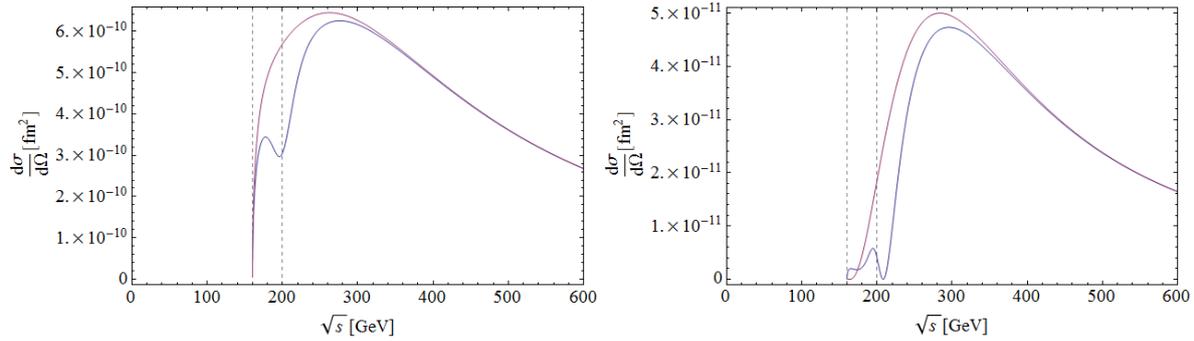


Abbildung 13: Differentieller Wirkungsquerschnitt (blau) bei $\theta \approx 40^\circ$ (links) und $\theta \approx 57^\circ$ (rechts) mit $\tilde{\gamma} = 0.2/\text{GeV}$, $M = 200 \text{ GeV}$ und $\beta = 0.1$. Die Kurve des Standardmodells ist in rot eingezeichnet.

Erhöht man die Masse M weiter auf $M = 260 \text{ GeV}$, so gewinnen zusätzlich Effekte unterhalb von $\sqrt{s} = M$ an Bedeutung⁹: Obwohl die Energie der kollidierenden W -Bosonen theoretisch nicht ausreicht, um einen angeregten Higgs-Zustand zu erzeugen, kommt es trotzdem zu einem Einfluss im Wirkungsquerschnitt. Dies hängt damit zusammen, dass durch Einführen einer Breite des Teilchens Konzepte, wie die Masse als Pol im Propagator zu interpretieren oder die kollidierenden W -Bosonen als *on-shell* zu betrachten, nicht mehr klar definiert sind. Vielmehr spielen quantenmechanische Effekte eine Rolle: Die Attraktivität der Teilchen ist groß genug, um auch schon vor der eigentlichen Resonanz zu interagieren. Als intuitives klassisches Analogon kann man sich einen getriebenen harmonischen Oszillator vorstellen, der ein ähnliches Verhalten in der Nähe seiner Resonanzfrequenz aufweist.

Ein direkter Vergleich zum Standardmodell ist in Abbildung 14 für den differentiellen und in Abbildung 15 für den totalen Wirkungsquerschnitt zu sehen. In beiden Fällen erkennt man deutlich den Einfluss unterhalb des Thresholds (gestrichelte Linie).

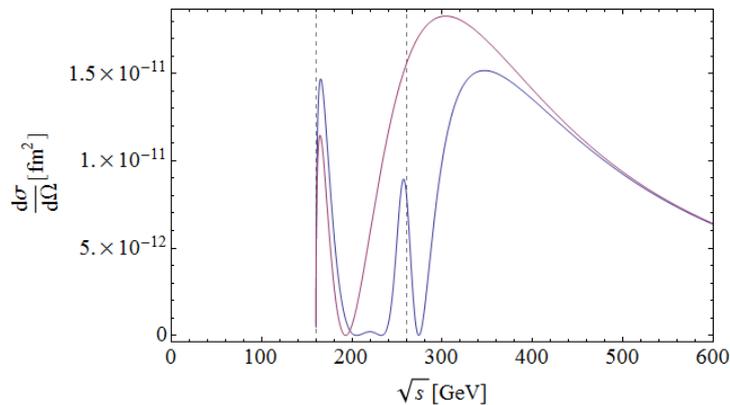


Abbildung 14: Differentieller Wirkungsquerschnitt bei $\theta \approx 61^\circ$ mit $M = 260 \text{ GeV}$, $\beta = 0.08$ und $\tilde{\gamma} = 0.3/\text{GeV}$.

⁹Man spricht hier vom sogenannten 'Threshold'.

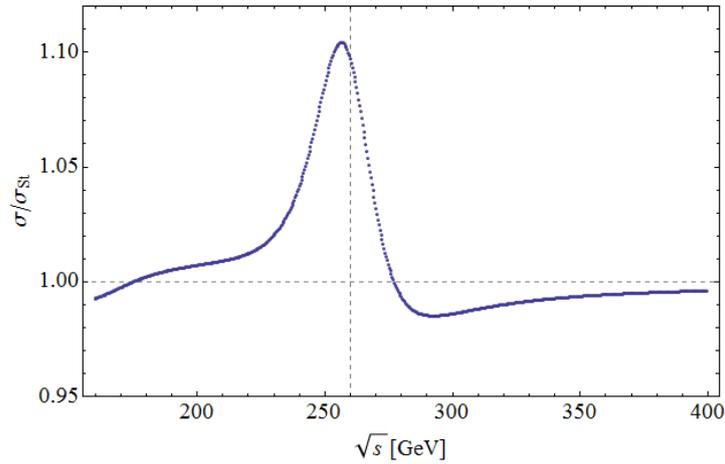


Abbildung 15: Verhältnis σ/σ_{St} mit $M=260$ GeV, $\beta=0.08$ und $\tilde{\gamma}=0.3/\text{GeV}$.

4.4.3. \mathcal{L}_{II} -Ansatz in Kombination mit dem Propagator D_c

Im Grenzfall $w, v \rightarrow 0$ geht D_c in die Form

$$D_c(k, w = v = 0) = \frac{i}{-k^2 + (M + i\Gamma/2)^2} \quad (54)$$

über, was formal dem Propagator D_b entspricht, obgleich die höchste vorkommende Potenz in k eine andere ist. Daraus resultiert für diesen Spezialfall ein ähnliches¹⁰ Verhalten wie im Abschnitt 4.4.2.

Wählt man beispielsweise eine Masse $M=200$ GeV, eine Breite von $\Gamma/2 \approx 10\%M$ und fügt die Selbstwechselwirkung über den Parameter w hinzu, ändert sich zunächst die Lage der Polstelle des Propagators (siehe Abbildung 4 und 5). Das macht sich wiederum in der Lage des Peaks im Verhältnis σ/σ_{St} bemerkbar, welcher sich zu niedrigeren Schwerpunktenenergien hin verschiebt (siehe Abbildung 16). Zusätzlich kommt es zu einer Verringerung des Maximalwertes. Im Gegensatz dazu wird der Betrag des Maximums erhöht, wenn man die Stärke des Zerfallskanals über die Variable v erhöht. Der Versatz des Maximums findet hier in ähnlicher Art und Weise statt.

Für eine Masse von $M=160$ GeV beziehungsweise $M=260$ GeV kann der Kurvenverlauf in ähnlicher Weise durch die Variation von w und v beeinflusst werden. Zusätzlich treten bei letzterem wieder vermehrt sub-threshold Effekte in den Vordergrund (siehe Abschnitt 5).

¹⁰Gemeint sind hier dieselben auftretenden Effekte mit anderen Absolutwerten.

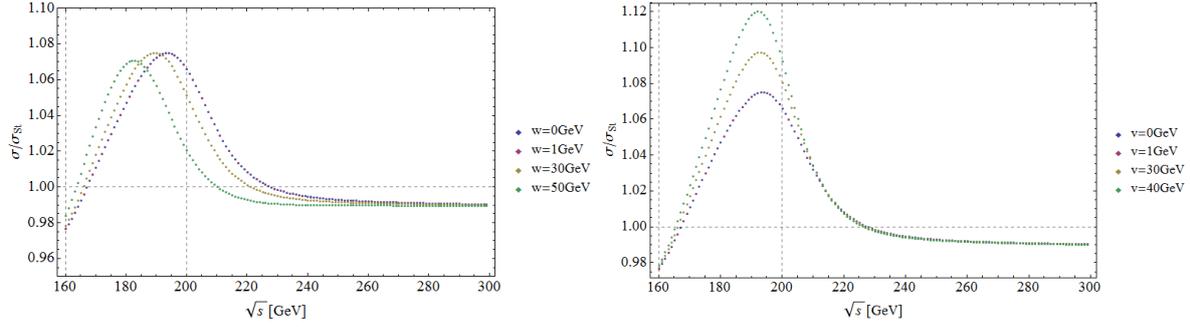


Abbildung 16: Verhältnis σ/σ_{St} bei $M = 200$ GeV, $\Gamma = 40$ GeV, $\tilde{\gamma} = 0.002/\text{GeV}$ und verschiedenen Werten für w (links) sowie v (rechts). Die entsprechend andere Konstante wurde null gewählt. Es sind große Werte für w und v vonnöten um eine deutliche Veränderung zu sehen, sodass die Kurven für 0 und 1 GeV kaum zu unterscheiden sind.

4.5. Wirkungsquerschnitt σ innerhalb des \mathcal{L}_I -Ansatzes

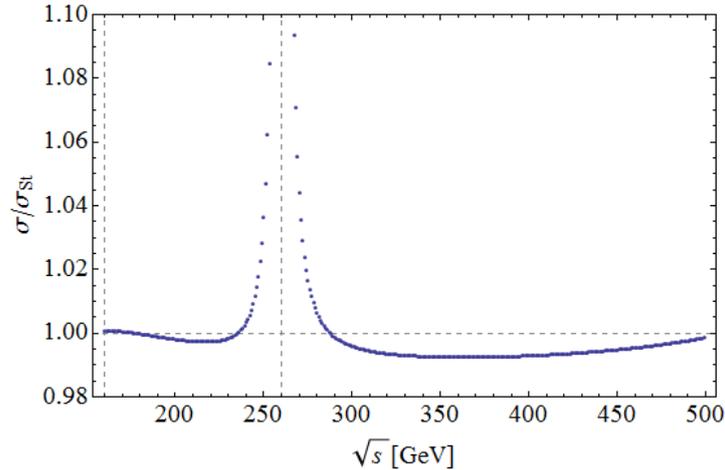


Abbildung 17: Verhältnis σ/σ_{St} des Propagators D_a bei einer Kopplung von $y=1$, $c=5$, $\zeta = 600^4(\text{GeV})^5$ und $\chi = 600$ GeV und einer Masse $M=260$ GeV.

Obgleich die zu beobachtenden Effekte bei Verwendung des \mathcal{L}_I -Ansatz in ähnlicher Weise durch die verwendeten Propagatoren bestimmt werden, ist deren Ausprägung und Absolutwert im Verhältnis σ/σ_{St} durchaus verschieden zum \mathcal{L}_{II} -Ansatz. Dies begründet sich durch die zusätzliche s^2 -Proportionalität der Amplituden (siehe Gleichung (48) bis (51)). Des Weiteren kommt es zu der erwarteten Divergenz der Wirkungsquerschnitte für hohe Schwerpunktsenergien in Kombination mit den Propagatoren D_a und D_c . Das Verhalten in Kombination mit D_a ist in Abbildung 17 aufgetragen. Dieser, zu Abbildung 10 sehr ähnliche Kurvenverlauf, unterscheidet sich vor allem dadurch, dass für Schwerpunktsenergien unterhalb des Thresholds Werte von $\sigma/\sigma_{St} < 1$ erreicht werden. Ähnliches gilt für den Propagator D_b : Es ergibt sich im wesentlichen der Kurvenverlauf des \mathcal{L}_{II} -Ansatzes (siehe Abbildung 18). Unterschiede zeigen

sich für niedrige Schwerpunktennergien und in der Breite des Peaks. Möchte man die Effekte hervorheben, so bedarf es sehr hohen Werten für γ , die die Kopplungskonstante g des Standardmodells um einiges übersteigen, was als physikalisch unrealistisch einzuschätzen ist.

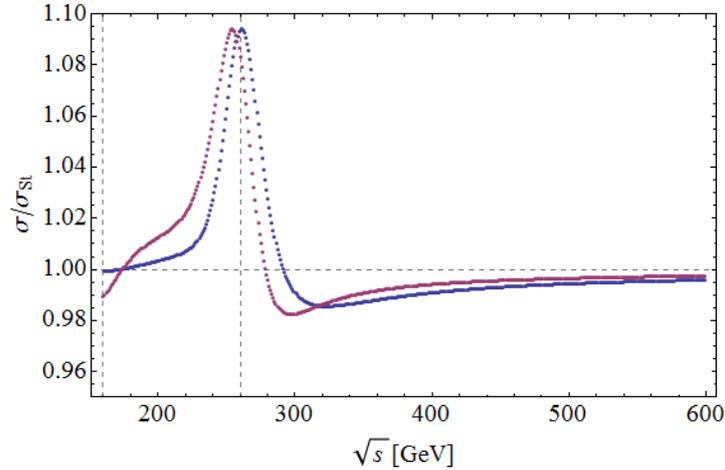


Abbildung 18: Vergleich des Ansatzes \mathcal{L}_I (blau) mit \mathcal{L}_{II} (rot) in Kombination mit dem Propagator D_b . Es wurde $M=260$ GeV, $\beta=0.1$, $\gamma=1100$ GeV und $\tilde{\gamma}=0.365/\text{GeV}$ gewählt.

Der Einfluss der Dämpfung (Gleichung (52)) soll anhand des Propagators D_c verdeutlicht werden. Dessen Verhalten ist in Abbildung 19 aufgetragen. Man erkennt zunächst die Threshold-Effekte bei der beispielhaft gewählten Masse $M=\sqrt{s}=200$ GeV. Deren Verlauf ist in Übereinstimmung mit dem \mathcal{L}_{II} -Ansatz (siehe Abbildung 16). Für steigende Schwerpunktennergien entfaltet die Dämpfung ihre volle Wirkung und verhindert divergentes Verhalten. Der erneute Anstieg für $\sqrt{s} \rightarrow 700$ GeV deutet die künstlich erzeugt Polstelle der Dämpfungsfunktion $\gamma(q, q')$ an. Sie ist gegeben durch die θ -abhängige Beziehung

$$s \rightarrow 4m_W^2 + \chi^2 \frac{2}{1 - \cos \theta}, \quad (55)$$

welche ihren Minimalwert bei maximalem Winkel θ annimmt. Für das in Abbildung 19 gewählte $\chi = 800$ GeV erhält man beispielsweise einem Wert von $\sqrt{s} \approx 819$ GeV.

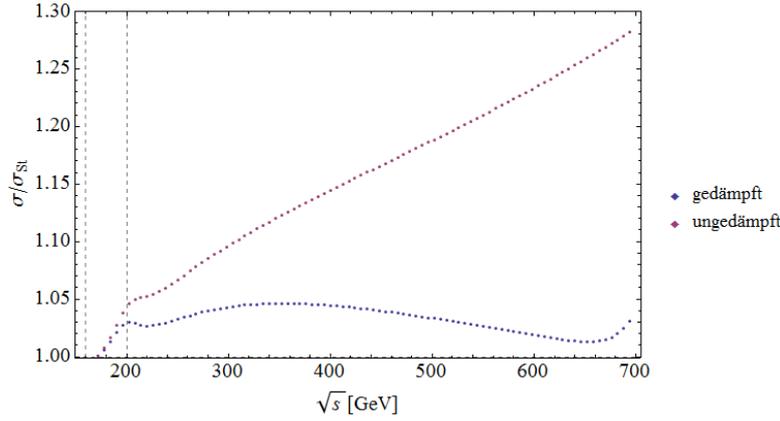


Abbildung 19: Vergleich des Propagators D_c mit und ohne Dämpfung. Es wurden die Werte $M=200$ GeV, $c=10$, $y=2$, $\chi = 800$ GeV, $\zeta = 800^8(\text{GeV})^5$ und $\Gamma=40$ GeV gewählt.

5. Ergebnisse und Diskussion

Das Verhalten und der Einfluss eines möglichen angeregten Higgs-Zustandes auf die elastische W-Streuung wurde ausführlich anhand von zwei verschiedenen Ansätzen mit jeweils drei Propagatoren untersucht. Nun ist es möglich abzuschätzen, welche Werte die Kopplungskonstanten mindestens annehmen müssen, um den Effekt im Experiment eindeutig beobachten zu können. Als Referenz dafür wurde eine minimale lokale Abweichung von $\Delta(\sigma/\sigma_{St}) \approx \pm 0.1$ von dem Verhältnis $\sigma/\sigma_{St} = 1$ gewählt. Zudem wird die Berechnung unter Benutzung des Propagators D_c gemacht, da dieser den physikalischen Sachverhalt am besten nähert. Die Ergebnisse sind für den Fall $g=1$ in Tabelle 2 aufgelistet. Für den Ansatz \mathcal{L}_I ist eine Dämpfung nach Gleichung (52) notwendig. Die angegebenen Zahlen sind als Richtwerte zu verstehen.

Tabelle 2: Zusammenstellung der Kopplungskonstanten des angeregten Higgs-Zustandes, die notwendig sind, damit das Verhältnis σ/σ_{St} einen Wert von ≈ 1.1 annimmt. Es ist der Fall $g=1$ und $\Gamma \approx 10\%M$ diskutiert.

Lagrange-Dichte	Masse M [GeV]	Breite [GeV] Γ	$c/\tilde{\gamma}$
$\mathcal{L}_I (D_c)$ mit $y=2$, $\chi = 800$ GeV und $\zeta = 800^8(\text{GeV})^5$	160	32	24*
	200	40	13
	260	52	9.5
$\mathcal{L}_{II} (D_c)$	160	32	0.00210/GeV
	200	40	0.00215/GeV
	260	52	0.00310/GeV

Es ist zunächst erkennbar, dass mit steigender Masse M die notwendigen Kopplungen für den \mathcal{L}_I -Ansatz sinken und für den \mathcal{L}_{II} -Ansatz steigen.

Für die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_I fällt auf, dass die erforderlichen Werte für c deutlich größer sind als die eigentliche Kopplungskonstante ($g=1$) des Standardmodells. Wählt man hingegen Werte von $c < 1$, bewegt sich die maximale lokale Abweichung von $\sigma/\sigma_{St} = 1$ unterhalb

des Promillebereiches. Bei der mit einem * gekennzeichneten Zahl ($M=160$ GeV) wurde sich auf die Ausmaße der Threshold-Effekte bezogen. Für eine Kopplung dieser Größe zeigen die höherenergetischen Streueffekte (siehe Abbildung 15, $\sqrt{s} > 250$ GeV) bereits eine Abweichung von $\Delta(\sigma/\sigma_{St}) \approx 0.4$. Es handelt sich hierbei um einen Effekt, der nur an dieser Stelle auftritt. Zusammenfassend sind das alles Hinweise darauf, dass die Kopplung des angeregten Zustandes in der Lagrange-Dichte über die Felder W_μ^a zwar einen physikalisch relevanten Sachverhalt darstellen könnte, ein eindeutiger Nachweis innerhalb des betrachteten Streukanals aber wahrscheinlich nicht möglich ist.

Für den Ansatz \mathcal{L}_H wurden Effekte schon bei Kopplungen $\tilde{\gamma}$, die sich im 2-3 Promillebereich der Kopplung des Standardmodells g bewegen, beobachtet. Das entspricht den Erwartungen wesentlich besser. Hinzu kommt, dass bei Wahl dieser Theorie keine Dämpfung notwendig ist, um Divergenzen für hohe Schwerpunktennergien zu vermeiden. Wenn das Higgs-Boson gebundene Zustände eingeht und damit eine Anregung des Systems ermöglicht, würde die Kopplung über den Feldstärketensor $G_{\mu\nu}^a$ innerhalb eines effektiven Ansatzes deshalb die bessere Beschreibung liefern.

Für beide Ansätze ist eine zusätzliche Beeinflussung durch die Stärke des Zerfallskanals und die Selbstwechselwirkung (v,w) möglich. Variiert man diese zwischen Werten von 0 bis 20 GeV, so ändert sich die maximale lokale Abweichung des Verhältnisses σ/σ_{St} um $\approx \pm 0.02$.

In Anbetracht dessen ist es zunächst nicht zu erwarten, dass die Auswirkungen eines zweiten oder höheren angeregten Zustandes die Ergebnisse signifikant beeinflussen werden. Vielmehr wäre es zukünftig interessant einen ähnlichen Streuprozess mit drei Teilchen im Endzustand zu betrachten, da durch die Einbeziehung komplexerer Prozesse ein weiterer Erkenntnisgewinn denkbar ist.

Quellenangaben

Literatur

- [1] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, 13, Number 16 pg. 508-509, 1964.
- [2] Peter W. Higgs. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. *Physical Review*, 145, Number 4 pg. 1156-1157, 1966.
- [3] F. Englert and R. Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Physical Review Letters*, 13, Number 9 pg. 321-322, 1964.
- [4] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [5] CMS-Collaboration. Observation of a new boson at a mass of 125 gev with the cms experiment at the lhc. *Physics Letters B*, 716 (2012) 30-61, 2012.
- [6] ATLAS-Collaboration. Observation of a new particle in the search for the standart model higgs boson with the atlas detector at the lhc. *Science Magazine*, 338 no. 6114 pp. 1576-1582, 2012.
- [7] Axel Maas. Bound-state/elementary-particle duality in the higgs sector and the case for an excited 'higgs' within the standart model. Institute for Theoretical Physics, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, D-07743 Jena, Germany, 2013.
- [8] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge Theory of elementary particle physics*. Oxford Scientific Publications, 2000.
- [9] Axel Maas and Tajdar Mufti. Two- and three-point functions in landau gauge yang-mills-higgs theory. *Journal of High Energy Physics*, 10.1007/JHEP04(2014)006, 2014.
- [10] Christoph Berger. *Elementarteilchenphysik-Von den Grundlagen zu den modernen Experimenten*. Springer Verlag, 2006.
- [11] Franz Mandl and Graham Shaw. *Quantum Field Theory*. Wiley, 2010.
- [12] Werner Sanns and Marco Schuchmann. *Praktische Numerik mit Mathematica - Eine Einführung*. B.G. Teubner, 2001.
- [13] William Press, Saul Teukolsky, William Vetterling, and Brian Flanery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2002.
- [14] Adam Alloul, Neil D. Christensen, Celine Degrande, Claude Duhr, and Benjamin Fuks. Feynrules 2.0-a complete toolbox for tree-level phenomenology. *Accepted by CPC*, 2014. arXiv:1310.1921.

- [15] Axel Maas. *Gauge Bosons at zero and finite Temperature*, volume 524, issue 4. Elsevier, 2013. Physics Reports.
- [16] P. Gerhold. *Upper and lower Higgs boson mass bounds from a chirally invariant lattice Higgs-Yukawa model*. PhD thesis, Humboldt-University Berlin, 2010. 1002.2569.
- [17] John F. Gunion, Howard E. Haber, Gordon Kane, and Sally Dawson. *The Higgs Hunter's Guide*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990. Frontiers in Physics Lecture Note Series.

Danksagung

Ich danke vor allem meinem Betreuer Axel Maas, der mir immer für Fragen zur Verfügung stand und mir die Möglichkeit gegeben hat, mich diesem interessanten Thema zu nähern. Ich habe sehr viel gelernt.

A. Anhang

A.1. Einsetzen des Higgs-Dublett-Ansatzes in die Lagrange-Dichte des Higgs-Sektors im Standardmodell

Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Gauge} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + a\Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \\ D_\mu &= \partial_\mu + gT^a W_\mu^a \\ T^a &= -\frac{i}{2}\tau^a \quad , \text{ mit } \Phi(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) + i\beta(x) \\ \frac{v+h(x)+i\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Zudem gilt $\langle h \rangle = \langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = \langle \eta \rangle = 0$ und $v = \text{const.}$ mit den reellen Feldern $\alpha(x), \beta(x), h(x)$ und $\eta(x)$. Dann ergibt sich für die einzelnen Terme:

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger \Phi &= \left(\frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{2}} \right) = (\alpha - i\beta)(\alpha + i\beta) + \frac{1}{2}(v + h - i\eta)(v + h + i\eta) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + vh + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}v^2 \\ (\Phi^\dagger \Phi)^2 &= \left(\alpha^2 + \beta^2 + vh + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}v^2 \right)^2 \\ &= \alpha^4 + \beta^4 + h^4/4 + v^4/4 + \eta^4/4 + 2\alpha^2\beta^2 + h^2\alpha^2 + h^2\beta^2 + \alpha^2\eta^2 + \beta^2\eta^2 + h^2\eta^2/2 \\ &\quad + v^2\alpha^2 + v^2\beta^2 + v^2\eta^2/2 + 2vh\alpha^2 + 2vh\beta^2 + v\eta^2 + vh^3 + 3v^2h^2/2 + v^3h \\ \Rightarrow a\Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 &= (a - \lambda v^2)(\alpha^2 + \beta^2) + (a/2 - \lambda v^2/2)\eta^2 + (a/2 - 3\lambda v^2/2)h^2 + \dots\end{aligned}$$

Untersuche Potential $V(\Phi)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_{Kin} + V(\Phi) = \mathcal{H}_{Kin} - a\Phi^\dagger \Phi + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ \partial_{\Phi^\dagger \Phi} \{-a\Phi^\dagger \Phi + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2\} &= -a + 2\lambda\Phi^\dagger \Phi \Rightarrow (\Phi^\dagger \Phi)_0 = \frac{a}{2\lambda} = \frac{v^2}{2} \\ \Rightarrow (a - \lambda v^2) = 0 \quad , (a - 3\lambda v^2)/2 = -a &\equiv -\mu^2/2 \quad , \lambda v = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\mu\end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung linearer und konstanter Terme:

$$\begin{aligned}a\Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 &= -\frac{\mu^2}{2}h^2 - \lambda\alpha^4 - \lambda\beta^4 - \lambda h^4/4 - \lambda\eta^4/4 - 2\lambda\alpha^2\beta^2 - \lambda h^2\alpha^2 - \lambda h^2\beta^2 \\ &\quad - \lambda\alpha^2\eta^2 - \lambda\beta^2\eta^2 - \lambda h^2\eta^2/2 - 2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\mu h\alpha^2 - 2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\mu h\beta^2\end{aligned}$$

$$- \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \mu h \eta^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \mu h^3$$

Kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &= \{(\partial_\mu + gT^a W_\mu^a) \Phi\}^\dagger \{(\partial^\mu + gT^b W^{b\mu}) \Phi\} \\ &= \{(\partial_\mu \Phi)^\dagger + (gT^a W_\mu^a \Phi)^\dagger\} \{\partial^\mu \Phi + gT^b W^{b\mu} \Phi\} \\ &= \{(\partial_\mu \Phi)^\dagger + (-\frac{ig}{2} \tau^a W_\mu^a \Phi)^\dagger\} \{\partial^\mu \Phi - \frac{ig}{2} \tau^b W^{b\mu} \Phi\} \\ NR: \quad (-\frac{ig}{2} \tau^a W_\mu^a \Phi)^\dagger &= \frac{ig}{2} W_\mu^a \Phi^\dagger (\tau^a)^\dagger = \frac{ig}{2} W_\mu^a \Phi^\dagger \tau^a \\ (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &= \{(\partial_\mu \Phi)^\dagger + \frac{ig}{2} W_\mu^a \Phi^\dagger \tau^a\} \{\partial^\mu \Phi - \frac{ig}{2} \tau^b W^{b\mu} \Phi\} \\ &= \underbrace{(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi)}_{1.)} - \underbrace{\frac{ig}{2} W^{b\mu} (\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi + \frac{ig}{2} W_\mu^a \Phi^\dagger \tau^a (\partial^\mu \Phi)}_{2.)} + \underbrace{\frac{g^2}{4} W_\mu^a W^{b\mu} \Phi^\dagger \tau^a \tau^b \Phi}_{3.)} \end{aligned}$$

1.)

$$(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) = (\partial_\mu \Phi^\dagger) (\partial^\mu \Phi) = (\partial_\mu \alpha)^2 + (\partial_\mu \beta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2$$

2.)

$$\begin{aligned} W_\mu^a (\dots) \tau^a (\partial^\mu \Phi) &= W^{b\mu} (\dots) \tau^b (\partial_\mu \Phi) \\ \Rightarrow -\frac{ig}{2} W^{b\mu} (\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi + \frac{ig}{2} W_\mu^a \Phi^\dagger \tau^a (\partial^\mu \Phi) &= -\frac{ig}{2} W^{b\mu} (\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi + \frac{ig}{2} W^{b\mu} \Phi^\dagger \tau^b (\partial_\mu \Phi) \\ &= \frac{ig}{2} W^{b\mu} \left(\Phi^\dagger \tau^b (\partial_\mu \Phi) - (\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi \right) = \frac{ig}{2} W^{b\mu} \left(\{(\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi\}^\dagger - (\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi \right) \\ &= \frac{ig}{2} W^{b\mu} \left(\{(\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi\}^* - (\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi \right), \text{ da } (\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi \equiv z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$NR: \quad z^* - z = -2i\Im(z)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2.) &= g W^{b\mu} \Im \left((\partial_\mu \Phi)^\dagger \tau^b \Phi \right) \\ &= g W^{b\mu} \Im \left(\begin{pmatrix} \partial_\mu \alpha - i \partial_\mu \beta \\ \frac{\partial_\mu h - i \partial_\mu \eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta^{b3} & \delta^{b1} - i \delta^{b2} \\ \delta^{b1} + i \delta^{b2} & -\delta^{b3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x) + i \beta(x) \\ \frac{v+h(x)+i\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \\ &= g W^{b\mu} \left\{ \delta^{b1} \left(\frac{\partial_\mu \alpha}{\sqrt{2}} \eta - \frac{\partial_\mu \eta}{\sqrt{2}} \alpha + \frac{\partial_\mu h}{\sqrt{2}} \beta - \frac{\partial_\mu \beta}{\sqrt{2}} h - \frac{\partial_\mu \beta}{\sqrt{2}} v \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta^{b2} \left(\frac{\partial_\mu \eta}{\sqrt{2}} \beta - \frac{\partial_\mu \beta}{\sqrt{2}} \eta + \frac{\partial_\mu h}{\sqrt{2}} \alpha - \frac{\partial_\mu \alpha}{\sqrt{2}} h - \frac{\partial_\mu \alpha}{\sqrt{2}} v \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta^{b3} \left(\frac{1}{2} h (\partial_\mu \eta) - \frac{1}{2} \eta (\partial_\mu h) + \beta (\partial_\mu \alpha) - \alpha (\partial_\mu \beta) + \frac{1}{2} v (\partial_\mu \eta) \right) \right\} \end{aligned}$$

3.)

$$\begin{aligned}
\frac{g^2}{4} W_\mu^a W^{b\mu} \Phi^\dagger \tau^a \tau^b \Phi &= \frac{g^2}{4} W_\mu^a W^{b\mu} \Phi^\dagger (\delta^{ab} \mathbb{1}_2 + i\epsilon^{abc} \tau^c) \Phi \\
&= \frac{g^2}{4} W_\mu^a W^{a\mu} \Phi^\dagger \Phi + \frac{ig^2}{4} W_\mu^a W^{b\mu} \epsilon^{abc} \Phi^\dagger \tau^c \Phi \\
&= \frac{g^2}{4} W_\mu^a W^{a\mu} (\alpha^2 + \beta^2 + v h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} v^2) \\
&\quad + \frac{ig^2}{4} W_\mu^a W^{b\mu} \epsilon^{abc} \left(\left(\frac{\alpha(x) - i\beta(x)}{\sqrt{2}} \right)^T \begin{pmatrix} \delta^{c3} & \delta^{c1} - i\delta^{c2} \\ \delta^{c1} + i\delta^{c2} & -\delta^{c3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x) + i\beta(x) \\ \frac{v+h(x)+i\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^{abc} \delta^{cd} = \epsilon^{abd} \quad \frac{g^2}{4} W_\mu^a W^{a\mu} (\frac{1}{2} v^2 + \alpha^2 + \beta^2 + v h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} \eta^2) \\
+ \frac{ig^2}{4} W_\mu^a W^{b\mu} \left\{ \epsilon^{ab1} \sqrt{2} (h\alpha + v\alpha + \beta\eta) \right. \\
\left. - \epsilon^{ab2} \sqrt{2} (h\beta + v\beta - \alpha\eta) \right. \\
\left. - \epsilon^{ab3} \frac{1}{2} (h^2 + 2vh + v^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + \eta^2) \right\}
\end{aligned}$$

Im Term $\frac{v^2 g^2}{8} W_\mu^a W^{a\mu}$ kann man die für alle 3 W-Bosonen gleiche Masse $m_W^2 \equiv \frac{v^2 g^2}{8}$ identifizieren. Des Weiteren ist ϵ^{ab1} genau dann ungleich Null, wenn $a = 2$ und $b = 3$ oder umgedreht ist. Mit $\epsilon^{231} = -\epsilon^{321} = 1$ und $W_\mu^2 W^{3\mu} = W_\mu^3 W^{2\mu}$ werden zwei identische Terme voneinander subtrahiert. Auf dieselbe Art und Weise argumentiert man bei ϵ^{ab2} und ϵ^{ab3} , sodass der gesamte hintere Teil wegfällt.

$$3.) = \frac{g^2}{4} W_\mu^a W^{a\mu} (\frac{1}{2} v^2 + \alpha^2 + \beta^2 + v h + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} \eta^2)$$

 \mathcal{L}_{Gauge} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Gauge} &= -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c) (\partial^\mu W^{a\nu} - \partial^\nu W^{a\mu} + g\epsilon^{ade} W^{d\mu} W^{e\nu}) \\
&= -\frac{1}{4} \left\{ (\partial_\mu W_\nu^a) (\partial^\mu W^{a\nu}) + (\partial_\nu W_\mu^a) (\partial^\nu W^{a\mu}) - (\partial_\mu W_\nu^a) (\partial^\nu W^{a\mu}) - (\partial_\nu W_\mu^a) (\partial^\mu W^{a\nu}) \right. \\
&\quad + g(\partial_\mu W_\nu^a) \epsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu} + g(\partial^\mu W^{a\nu}) \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \\
&\quad \left. - g(\partial_\nu W_\mu^a) \epsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu} - g(\partial^\nu W^{a\mu}) \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c + g^2 (\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c) (\epsilon^{ade} W^{d\mu} W^{e\nu}) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ (\partial_\mu W_\nu^a) (\partial^\mu W^{a\nu}) - (\partial_\mu W_\nu^a) (\partial^\nu W^{a\mu}) + g(\partial_\mu W_\nu^a) \epsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu} \right. \\
&\quad \left. - g(\partial_\nu W_\mu^a) \epsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu} + \frac{1}{2} g^2 (\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c) (\epsilon^{ade} W^{d\mu} W^{e\nu}) \right\}
\end{aligned}$$

$$NR : \quad g(\partial_\mu W_\nu^a) \epsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu} - g(\partial_\nu W_\mu^a) \epsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu} =$$

$$\begin{aligned}
& g(\partial_\mu W_\nu^a) \epsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu} - g(\partial_\nu W_\mu^a) \epsilon^{acb} W^{b\nu} W^{c\mu} = 2g(\partial_\mu W_\nu^a) \epsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu} \\
\mathcal{L}_{Gauge} = & -\frac{1}{2} \left\{ (\partial_\mu W_\nu^a)(\partial^\mu W^{a\nu}) - (\partial_\mu W_\nu^a)(\partial^\nu W^{a\mu}) + 2g(\partial_\mu W_\nu^a) \epsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} g^2 \left((W_\mu^b W^{b\mu})^2 - W_\mu^b W^{c\mu} W_\nu^c W^{b\nu} \right) \right\}
\end{aligned}$$

A.2. Mathematica[®]-Code

Listing 1: Initialisierung

```

1 Polarisationsvektoren
2  $\kappa = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}};$ 
3  $\epsilon 1 = \frac{\sqrt{s}}{2 * m} \{\kappa, 0, 0, 1\};$ 
4  $\epsilon 2 = \frac{\sqrt{s}}{2 * m} \{\kappa, 0, 0, -1\};$ 
5  $\epsilon 3 = \frac{\sqrt{s}}{2 * m} \{\kappa, 0, \text{Sin}[\theta], \text{Cos}[\theta]\};$ 
6  $\epsilon 4 = \frac{\sqrt{s}}{2 * m} \{\kappa, 0, -\text{Sin}[\theta], -\text{Cos}[\theta]\};$ 
7 Impulsvektoren
8  $k 1 = \frac{\sqrt{s}}{2} \{1, 0, 0, \kappa\};$ 
9  $k 2 = \frac{\sqrt{s}}{2} \{1, 0, 0, -\kappa\};$ 
10  $k 3 = \frac{\sqrt{s}}{2} \{1, 0, \kappa * \text{Sin}[\theta], \kappa * \text{Cos}[\theta]\};$ 
11  $k 4 = \frac{\sqrt{s}}{2} \{1, 0, -\kappa * \text{Sin}[\theta], -\kappa * \text{Cos}[\theta]\};$ 
12 Metrik
13  $\eta = \{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, -1, 0, 0\}, \{0, 0, -1, 0\}, \{0, 0, 0, -1\}\};$ 
14 Impulse der Resonanz und des ausgetauschten virtuellen Teilchens
15  $qs = k 1 + k 2;$  (*s-channel*)
16  $qt = k 3 - k 1;$  (*t-channel*)
17  $t = \text{Simplify}[(qt.\eta.qt)];$ 
18 Propagatoren des angeregten Higgs-Zustandes
19  $Da[x_, M_] = \text{FullSimplify}\left[\frac{1}{x - M^2}\right];$ 
20  $Db[y_, M_, \beta_] = \text{FullSimplify}\left[\frac{1}{y^2 - 2M^2 * y * \text{Cos}[2\beta] + M^4}\right];$ 
21  $j[z_, M_, \Lambda_] = \frac{1}{2} \text{Log}\left[\frac{\Lambda^2}{M^2} + 1\right] + \frac{(2\Lambda^2 + 4M^2 + z) * \text{ArcTanh}\left[\sqrt{\frac{z}{4\Lambda^2 + 4M^2 + z}}\right]}{\sqrt{z} \sqrt{4(\Lambda^2 + M^2) + z}}$ 
22  $- \sqrt{\frac{4M^2}{z} + 1} * \text{ArcTanh}\left[\sqrt{\frac{z}{4M^2 + z}}\right];$ 
23  $Dc[z_, M_, \Gamma_, w_, v_, m_] = \text{Simplify}[\text{Limit}\left[\left(z - \left(M + I\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - w^2 \left(j[z, M, \Lambda] - j\left[\left(M + I\frac{\Gamma}{2}\right)^2, M, \Lambda\right]\right)\right.\right.$ 
24  $\left.\left. - v^2 \left(j[z, m, \Lambda] - j\left[\left(M + I\frac{\Gamma}{2}\right)^2, m, \Lambda\right]\right)\right)^{-1}, \Lambda \rightarrow \infty\right];$ 

```

Listing 2: Berechnung der einzelnen Streuamplituden

```

1 Standardmodell
2  $M4W = g^2 * \text{Simplify}[2(\epsilon1.\eta.\epsilon4)(\epsilon2.\eta.\epsilon3) - (\epsilon1.\eta.\epsilon3)(\epsilon2.\eta.\epsilon4) - (\epsilon1.\eta.\epsilon2)(\epsilon3.\eta.\epsilon4)];$ 
3  $M5W = \text{Simplify}[\frac{g^2}{s-m^2} * (((-qs-k2).\eta.\epsilon1)((qs+k3).\eta.\epsilon4)(\epsilon2.\eta.\epsilon3) + ((k4-k3).\eta.\epsilon2)(\epsilon4.\eta.\epsilon3)$ 
4  $+((-k4-qs).\eta.\epsilon3)(\epsilon2.\eta.\epsilon4) + (\epsilon1.\eta.\epsilon2)((qs+k3).\eta.\epsilon4)((k2-k1).\eta.\epsilon3)$ 
5  $+((k2-k1).\eta.(k4-k3))(\epsilon4.\eta.\epsilon3) + ((-k4-qs).\eta.\epsilon3)((k2-k1).\eta.\epsilon4)$ 
6  $+((k1+qs).\eta.\epsilon2)((qs+k3).\eta.\epsilon4)(\epsilon1.\eta.\epsilon3) + ((k4-k3).\eta.\epsilon1)(\epsilon4.\eta.\epsilon3) + ((-k4-qs).\eta.\epsilon3)(\epsilon4.\eta.\epsilon1)];$ 
7  $MtW = \text{Simplify}[\frac{g^2}{(qt.\eta.qt)-m^2} * (((qt-k1).\eta.\epsilon3)((-qt+k4).\eta.\epsilon2)(\epsilon1.\eta.\epsilon4) + ((-k4-k2).\eta.\epsilon1)(\epsilon2.\eta.\epsilon4)$ 
8  $+((k2+qt).\eta.\epsilon4)(\epsilon2.\eta.\epsilon1) + (\epsilon1.\eta.\epsilon3)((-qt+k4).\eta.\epsilon2)((k1+k3).\eta.\epsilon4)$ 
9  $+((k1+k3).\eta.(-k4-k2))(\epsilon2.\eta.\epsilon4) + ((k2+qt).\eta.\epsilon4)((k1+k3).\eta.\epsilon2) + ((-k3-qt).\eta.\epsilon1)$ 
10  $((-qt+k4).\eta.\epsilon2)(\epsilon3.\eta.\epsilon4) + ((-k4-k2).\eta.\epsilon3)(\epsilon2.\eta.\epsilon4) + ((k2+qt).\eta.\epsilon4)(\epsilon3.\eta.\epsilon2))];$ 
11  $M5H = \text{Simplify}[\frac{-m^2}{s-\mu^2} * (\epsilon1.\eta.\epsilon2)(\epsilon3.\eta.\epsilon4) * g^2];$ 
12  $MtH = \text{Simplify}[\frac{-m^2}{t-\mu^2} * (\epsilon1.\eta.\epsilon3)(\epsilon2.\eta.\epsilon4) * g^2];$ 
13  $Mst[s, \theta, m, \mu, g] = \text{FullSimplify}[M4W + M5W + MtW + M5H + MtH];$ 
14 angeregter Higgs-Zustand
15 ohne Propagator
16  $MIs = \text{Simplify}[(-2\gamma * I)^2 * (\epsilon1.\eta.\epsilon2)(\epsilon3.\eta.\epsilon4)];$ 
17  $MIt = \text{Simplify}[(-2\gamma * I)^2 * (\epsilon1.\eta.\epsilon3)(\epsilon2.\eta.\epsilon4)];$ 
18  $MIIs = \text{Simplify}[(\gamma * 4I)^2(-(\epsilon1.\eta.k2)(\epsilon2.\eta.k1) + (k1.\eta.k2)(\epsilon1.\eta.\epsilon2))(-(\epsilon3.\eta.k4)(\epsilon4.\eta.k3) + (k3.\eta.k4)(\epsilon3.\eta.\epsilon4));$ 
19  $MIIIt = \text{Simplify}[(\gamma * 4I)^2(-(\epsilon1.\eta.k3)(\epsilon3.\eta.k1) + (k1.\eta.k3)(\epsilon1.\eta.\epsilon3))(-(\epsilon2.\eta.k4)(\epsilon4.\eta.k2) + (k2.\eta.k4)(\epsilon2.\eta.\epsilon4));$ 
20 mit Propagator
21  $MaIa[\gamma, m, s, M, \theta] = \text{Simplify}[MIs * Da[(qs.\eta.qs), M] + MIt * Da[(qt.\eta.qt), M]];$ 
22  $MaIb[\gamma, m, s, M, \beta, \theta] = \text{Simplify}[MIs * Db[(qs.\eta.qs), M, \beta] + MIt * Db[(qt.\eta.qt), M, \beta]];$ 
23  $MaIc[\gamma, m, s, M, \Gamma, w, v, \theta]$ 
24  $= \text{Simplify}[MIs * Dc[-(qs.\eta.qs), M, \Gamma, w, v, m] + MIt * Dc[-(qt.\eta.qt), M, \Gamma, w, v, m]];$ 
25  $MaIIa[\gamma, m, s, M, \theta] = \text{Simplify}[MIIs * Da[(qs.\eta.qs), M] + MIIIt * Da[(qt.\eta.qt), M]];$ 
26  $MaIIb[\gamma, m, s, M, \beta, \theta] = \text{Simplify}[MIIs * Db[(qs.\eta.qs), M, \beta] + MIIIt * Db[(qt.\eta.qt), M, \beta]];$ 
27  $MaIIc[\gamma, m, s, M, \Gamma, w, v, \theta]$ 
28  $= \text{Simplify}[MIIIs * Dc[-(qs.\eta.qs), M, \Gamma, w, v, m] + MIIIt * Dc[-(qt.\eta.qt), M, \Gamma, w, v, m]];$ 
29 Gesamtamplitude
30  $MIA[s, m, \mu, g, \gamma, M, \theta] = \text{Simplify}[Mst[s, \theta, m, \mu, g] + MaIa[\gamma, m, s, M, \theta]];$ 
31  $MIB[s, m, \mu, g, \gamma, M, \beta, \theta] = \text{Simplify}[Mst[s, \theta, m, \mu, g] + MaIb[\gamma, m, s, M, \beta, \theta]];$ 
32  $MIC[s, m, \mu, g, \gamma, M, \Gamma, w, v, \theta] = \text{Simplify}[Mst[s, \theta, m, \mu, g] + MaIc[\gamma, m, s, M, \Gamma, w, v, \theta]];$ 
33  $MIIA[s, m, \mu, g, \gamma, M, \theta] = \text{Simplify}[Mst[s, \theta, m, \mu, g] + MaIIa[\gamma, m, s, M, \theta]];$ 
34  $MIIB[s, m, \mu, g, \gamma, M, \beta, \theta] = \text{Simplify}[Mst[s, \theta, m, \mu, g] + MaIIb[\gamma, m, s, M, \beta, \theta]];$ 
35  $MIIIC[s, m, \mu, g, \gamma, M, \Gamma, w, v, \theta] = \text{Simplify}[Mst[s, \theta, m, \mu, g] + MaIIc[\gamma, m, s, M, \Gamma, w, v, \theta]];$ 

```

Listing 3: Berechnung der Polstelle des Propagators $D_c(k)$. Bis auf x und y müssen für alle Variablen im Propagator Zahlen eingesetzt werden.

```

1 Realteil
2 FindRoot[{Re[(Dc[-(x+I*y)^2, M, \Gamma, w, v, m])^-1], Im[(Dc[-(x+I*y)^2, M, \Gamma, w, v, m])^-1]}, {x, 1}, {y, 1}][[1, 2]]
3 Imaginärteil
4 FindRoot[{Re[(Dc[-(x+I*y)^2, M, \Gamma, w, v, m])^-1], Im[(Dc[-(x+I*y)^2, M, \Gamma, w, v, m])^-1]}, {x, 1}, {y, 1}][[2, 2]]

```

Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen angefertigt habe. Die eingereichte Arbeit ist nicht anderweitig als Prüfungsleistung verwendet worden.

Jena, 30. Juni 2014
