(обозначения прежние). Обозначим также $g = vC$, $g = (g_0, \bar{g})$, где $\bar{g}$ есть $(n-1)$-строка. Тогда

$$R = \det \begin{Vmatrix} P & z \\ g & 0 \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} 0 & 0 & z_0 \\ 0 & K & 0 \\ g_0 & \bar{g} & 0 \end{Vmatrix} = -g_0 z_0 \det K =$$

$$= -g\dot{z} \det K = -vCC^{-1}y_\circ \det K = -vy_\circ \det K.$$

Из этой формулы следует утверждение леммы 2.

Теорема 3. *Для линейного пучка* $D(\lambda) = A - \lambda E$ *условия* (2.2), (2.3), *где* $vy_\circ \neq 0$, $x_\circ u \neq 0$, *являются следствиями того, что* $\lambda_\circ$ *— некратное с.з. матрицы* A *или, что то же самое, нуль — некратное с.з. матрицы* $D(\lambda_\circ) = A - \lambda_\circ E$.

Доказательство. Пусть $\lambda_\circ$ — некратное с.з. матрицы A. Обозначим $M = D(\lambda_\circ) = A - \lambda_\circ E$. Тогда $D'(\lambda_\circ) = -E$ и $x_\circ D'(\lambda_\circ) y_\circ = -x_\circ y_\circ$. Из леммы 1 следует выполнение условия (2.2). Покажем, что из леммы 2 следует выполнение условия (2.3). Действительно,

$$\det \begin{Vmatrix} D(\lambda_\circ) & D'(\lambda_\circ) y_\circ \\ v & 0 \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} M & -y_\circ \\ v & 0 \end{Vmatrix} \neq 0,$$

если $vy_\circ \neq 0$, что и требовалось доказать.

В заключение авторы выражают благодарность А. А. Абрамову и А. В. Гулину за обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Икрамов Х. Д.* Несимметричная проблема собственных значений. М.: Наука, 1991.
2. *Гулин А. В., Дроздова О. М., Картышов С. В.* Итерационный метод решения задачи на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра: Препринт № 137. М.: ИПМатем. АН СССР, 1986.
3. *Картышов С. В.* О кубической сходимости метода обратных итераций с обобщенным отношением Рэлея по собственному вектору для нелинейной спектральной задачи: Препринт № 8. М.: Всес. Центр матем. моделирования РАН, 1992.
4. *Neumaier A.* Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem//SIAM J. Numer. Analys. 1985. V. 22. № 5. P. 914—923.
5. *Anselone P. M., Rall L. B.* The solution of the characteristic value-vector problems by Newton's method//Numer. Math. 1968. V. 11. № 1. P. 38—45.
6. *Диткин В. В.* Модифицированный метод Крандалла — Кикута//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Т. 16. № 4. С. 838—846.

Поступила в редакцию 28.10.92
Переработанный вариант 20.01.93

УДК 519.6:517.97

© 1993 г. В. А. КОВТУНЕНКО
(*Новосибирск*)

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В КОНТАКТНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ШТРАФОВ

Рассматривается система вариационных неравенств, описывающая контакт упругопластической пластины Кирхгоффа с жестким штампом при неизвестных границах области контакта и зоны пластичности. Неизвестные границы определяют ограничения

типа неравенств на решение, которые заменяются операторами штрафа. Для полученной задачи со штрафом построена итерационная процедура, линеаризующая уравнение, и доказан результат о сходимости решений.

§ 1. Постановка задачи

Постановка задачи о контакте упругопластической пластины, жестко защемленной по краям, с жестким штампом имеет следующий вид [1]. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ требуется найти функции w, $m = (m_{ij})$, $i, j = 1, 2$, удовлетворяющие неравенствам

(1а) $\quad w \geq \varphi,$

(1б) $\quad (m_{ij.ij} + f, \bar{w} - w) \leq 0 \quad \forall \bar{w} \geq \varphi,$

(1в) $\quad |m| \leq a,$

(1г) $\quad (c_{ijkl}m_{kl} + w_{.ij}, \bar{m}_{ij} - m_{ij}) \geq 0 \quad \forall |\bar{m}| \leq a,$

(1д) $\quad w = w_\nu = 0$ на $\partial\Omega.$

Здесь заданными являются $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, φ на $\partial\Omega$ строго меньше нуля;

$$f \in L^2(\Omega);\ a > 0;\ c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),\ c_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c\xi_{ij}\xi_{ij},\ c > 0.$$

Скобки (.,.) обозначают скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, модуль вектор-функции понимается как $|m|^2 = m_{ij}m_{ij}$, w_ν — производная по внешней нормали. Здесь и далее по повторяющимся нижним индексам производится суммирование, нижние индексы после запятой означают дифференцирование по соответствующим координатам, все рассматриваемые функции предполагаются симметричными по нижним индексам.

В данной модели функции w, m_{ij}, φ, f описывают соответственно прогиб срединной поверхности пластины, изгибающие моменты, форму штампа, внешнюю нагрузку. Неравенство (1а) представляет собой геометрическое условие непроникания пластины через штамп, (1в) есть физическое условие перехода материала в пластическое состояние [2, с. 256]. Строгое неравенство (1в) соответствует упругому поведению материала, равенство достигается при пластичности. Вариационное неравенство (1б) вытекает из уравнения движения, (1г) — из уравнения состояния.

§ 2. Построение задачи со штрафом

Обычный подход к вариационным неравенствам состоит в их замене на задачу минимизации некоторого функционала типа энергии на выпуклом множестве (например, [3]), или задачу отыскания седловой точки лагранжиана задачи [4], или задачу со штрафом. Для доказательства существования решения и конструктивной аппроксимации односторонней краевой задачи (1) в [1] предложена процедура введения штрафных операторов. Варианты применения метода штрафов и его модификаций к задачам механики излагаются, например, в [5]—[7].

Введем операторы штрафа следующим образом. Определим

$$\beta(w) = \begin{cases} 0, & w \geq \varphi, \\ w - \varphi, & w < \varphi. \end{cases}$$

Пусть P — оператор ортогонального проецирования пространства $\mathbb{R}^4$ на множество $\{m \in \mathbb{R}^4 / |m| \leq a\}$. Определим $\alpha(m) = m - Pm$, тогда

$$\alpha(m) = \begin{cases} 0, & |m| \leq a, \\ (1 - a/|m|)\, m, & |m| > a. \end{cases}$$

Сформулируем следующую задачу, содержащую параметры $e > 0$, $q > 0$:

(2а) $$-m_{ij.ij} + e^{-1}\beta(w) = f,$$

(2б) $$c_{ijkl} m_{kl} + q^{-1}\alpha(m)_{ij} = -w_{.ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

(2в) $$w = w_{\nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Зависимость искомых функций w, m_{ij} от параметров здесь и далее не указывается, чтобы не усложнять запись. В [1] при некоторых предположениях на правую часть f доказан результат о существовании обобщенного решения $w \in H_0^1(\Omega)$, $w_{.ij} \in C_0^*(\Omega)$, $m_{ij} \in L^2(\Omega)$ задачи (1) и слабой сходимости к нему решения задачи (2) при e, $q \to 0$. Поэтому дальнейшей целью будет исследование задачи со штрафом (2), ассоциированной с исходной моделью. Обозначение $H^k(\Omega)$ соответствует пространству Соболева обобщенных функций, имеющих k производных из $L^2(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$ есть замыкание гладких финитных функций по норме $H^k(\Omega)$.

§ 3. Построение итерационного метода для задачи со штрафом

Полученная модель (2) является краевой задачей эллиптического типа с сильно выраженной нелинейностью. Линеаризуем ее следующим образом. Зафиксируем параметры $e > 0$, $q > 0$. Перепишем (2б) в виде

(3) $$m_{ij} + q^{-1}\alpha(m)_{ij} = g_{ij},$$

где

(4) $$g_{ij} = -w_{.ij} + (\delta_{ik}\delta_{ij} - c_{ijkl})\, m_{kl}.$$

Л е м м а. *Уравнение* (3) *эквивалентно почти всюду в* Ω *уравнению*

(5) $$m_{ij} = g_{ij} - (1 + q)^{-1}\alpha(g)_{ij}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, выполнено (3). Пусть $|m| \leq a$ почти всюду в Ω , тогда $\alpha(m) = 0$ и из (3) следует $m_{ij} = g_{ij}$, поэтому $|g| < a$, $\alpha(g) = 0$ и (5) тоже выполнено. Пусть $|m| > a$, тогда уравнение (3) примет вид

$$[1 + q^{-1}(1 - a/|m|)]\, m_{ij} = g_{ij}.$$

Возведя в квадрат и просуммировав по i, j, получим

$$|m| = (q\,|g| + a)/(1 + q), \tag{6}$$

следовательно, $|g| > a$. Подставив (6) в (3), получим

$$m_{ij} = g_{ij} - (1 + q)^{-1}(1 - a/|g|)\, g_{ij},$$

а значит, уравнение (5) выполнено. Наоборот, можно аналогично получить (3) из (5). Лемма доказана.

Введем следующее обозначение:

$$a_{ijkl} = (c_{ijkl} - \delta_{ik}\delta_{ij})^{-1}. \tag{7}$$

Выразим m_{ij} из (4), используя обозначение (7):

$$m_{ij} = -a_{ijkl}(w_{.kl} + g_{kl}), \quad i, j = 1, 2. \tag{8}$$

Подставив в (5), получим

$$(a_{ijkl} + \delta_{ik}\delta_{ij})\, g_{kl} - (1 + q)^{-1}\alpha(g)_{ij} = -a_{ijkl}w_{.kl}, \quad i, j = 1, 2. \tag{9}$$

Подставив (8) в (2a), получим

$$a_{ijkl}w_{klij} + e^{-1}\beta(w) = f - a_{ijkl}g_{kl.ij}. \tag{10}$$

В силу леммы, система уравнений (2) эквивалентна почти всюду в Ω системе (8)—(10).

Для произвольных $w^0 \in H_0^2(\Omega)$, $g_{ij}^0 \in L^2(\Omega)$ построим следующую итерационную процедуру:

$$a_{ijkl}w_{.klij}^{n+1} + e^{-1}w^{n+1} = f + e^{-1}[w^n - \beta(w^n)] - a_{ijkl}g_{kl.ij}^n, \tag{11а}$$

$$(a_{ijkl} + \delta_{ik}\delta_{jl})\, g_{kl}^{n+1} = (1 + q)^{-1}\alpha(g^n)_{ij} - a_{ijkl}w_{.kl}^{n+1}, \quad i, j = 1, 2, \tag{11б}$$

$$m_{ij}^{n+1} = -a_{ijkl}(w_{.kl}^{n+1} + g_{kl}^{n+1}), \quad i, j = 1, 2, \tag{11в}$$

$$w^{n+1} = w_{\nu}^{n+1} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{11г}$$

Данная система является линейной, правая часть (11а) принадлежит $H^{-2}(\Omega)$, а (11б) принадлежит $L^2(\Omega)$, поэтому, исходя из общей теории монотонных операторов [8], можно показать существование единственного обобщенного решения системы (11)

$$w^{n+1} \in H_0^2(\Omega), \quad m_{ij}^{n+1},\ g_{ij}^{n+1} \in L^2(\Omega),$$

которое понимается в смысле распределения:

$$(a_{ijkl}w^{n+1}_{.kl},\ \xi_{.ij}) + e^{-1}(w^{n+1} - w^n + \beta(w^n),\ \xi) = (f, \xi) - (a_{ijkl}g^n_{kl},\ \xi_{.ij}),$$

$$((a_{ijkl} + \delta_{ik}\delta_{jl})\, g^{n+1}_{kl},\ \eta) = (1+q)^{-1}(\alpha(g^n)_{ij},\ \eta) - (a_{ijkl}w^{n+1}_{.kl},\ \eta),$$

$$(m^{n+1}_{ij},\ \theta) = -(a_{ijkl}(w^{n+1}_{.kl} + g^{n+1}_{kl}),\ \theta) \quad \forall \xi \in H^2_0(\Omega),\ \eta, \theta \in L^2(\Omega).$$

Теорема. *Пусть выполнено условие*

(12) $$c_1(\xi_{ij}, \xi_{ij}) \le (a_{ijkl}\xi_{kl}, \xi_{ij}) \le c_2(\xi_{ij}, \xi_{ij}),\ c_1, c_2 > 0;$$

тогда имеют место следующие сходимости:

$$w^n \to w \ \textit{сильно в}\ H^2_0(\Omega),$$

$$m^n_{ij} \to m_{ij} \ \textit{сильно в}\ L^2(\Omega) \ \textit{при}\ n \to \infty,$$

где w, m_{ij} — решение системы (2).

Доказательство. Обозначим $u^{n+1} = w^{n+1} - w^n$, $v^{n+1}_{ij} = g^{n+1}_{ij} - g^n_{ij}$, тогда (11а, б) дает

(13а) $$a_{ijkl}u^{n+1}_{.klij} + e^{-1}u^{n+1} = e^{-1}[u^n - \beta(w^n) + \beta(w^{n-1})] - a_{ijkl}v^n_{kl.ij},$$

(13б) $$(a_{ijkl} + \delta_{ik}\delta_{jl})\, v^{n+1}_{kl} = (1+q)^{-1}[\alpha(g^n)_{ij} - \alpha(g^{n-1})_{ij}] - a_{ijkl}u^{n+1}_{.kl}.$$

В силу монотонности операторов штрафа, можно показать следующие свойства:

(14) $$|\alpha(s^1) - \alpha(s^2)| \le |s^1 - s^2|,$$

$$|s^1 - s^2 - [\beta(s^1) - \beta(s^2)]| \le |s^1 - s^2|.$$

Далее, в силу (12) и симметричности c_{ijkl} можно ввести скалярное произведение

$$\langle s^1_{ij}, s^2_{ij}\rangle = (a_{ijkl}s^1_{kl}, s^2_{ij})$$

и эквивалентные нормы в $L^2(\Omega)$ и $H^2_0(\Omega)$ соответственно:

$$[s]^2_0 = \langle s_{ij}, s_{ij}\rangle, \quad [s]^2_2 = \langle s_{.ij}, s_{.ij}\rangle.$$

Умножим (13а) скалярно на u^{n+1}, (13б) — на v^{n+1}_{ij} и просуммируем. Применив неравенство Гёльдера с учетом (13) и введенных обозначений получим

$$[u^{n+1}]^2_2 + e^{-1}\|u^{n+1}\|^2_0 \le [v^n]^2_0 + e^{-1}\|u^n\|^2_0,$$

$$[v^{n+1}]^2_0 + (1+2q)(1+q)^{-1}\sum_{i,j}\|v^{n+1}_{ij}\|^2_0 \le [u^{n+1}]^2_2 + (1+q)^{-1}\sum_{i,j}\|v^n_{ij}\|^2_0.$$

$\|\cdot\|_k$ — обычная норма в $H^k(\Omega)$, $k = 0{,}2$. Умножим второе неравенство на константу $k > 0$ и просуммируем, воспользовавшись оценкой норм

$$c_2^{-1}[v]^2_0 \le \sum_{i,j}\|v_{ij}\|^2_0 \le c_1^{-1}[v]^2_0, \quad \|u\|^2_0 \le \|u\|^2_2 \le c_1^{-1}[u]^2_2.$$

В итоге можем записать

$$(15)\qquad (1-k)\,[u^{n+1}]_2^2 + e^{-1}\,\|u^{n+1}\|_0^2 + k\,\{1+(1+2q)\,c_2^{-1}\,(1+q)^{-1}\}\,[v^{n+1}]_0^2 \le$$
$$\le b\,[u^n]_2^2 + (e^{-1} - bc_1)\,\|u^n\|_0^2 + \{1 + kc_1^{-1}\,(1+q)^{-1}\}\,[v^n]_0^2.$$

Найдем константы k, b, ρ из следующей системы уравнений:

$$\rho\,(1-k) = b, \quad \rho e^{-1} = e^{-1} - bc_1,$$
$$\rho k\,\{1 + (1+2q)\,c_2^{-1}\,(1+q)^{-1}\} = 1 + kc_1^{-1}\,(1+q)^{-1}.$$

Исключив k и b, получим квадратное уравнение для ρ:

$$(16)\qquad A\rho^2 - B\rho + c_2 = 0,$$

где

$$A = c_1\,(1 + c_1 e)\,[1 + c_2 + (2 + c_2)\,q],$$
$$B = c_1\,[1 + c_2 + (2+c_2)\,q] + c_2\,[1 + c_1 e + c_1^2 e\,(1+q)].$$

Рассмотрим функцию $F(x) = Ax^2 - Bx + c_2$. Имеем $F(0) > 0$, $F(1) = c_1 e[c_1(1+2q - c_2] < 0$ если $q < 0.5(c_2 c_1^{-1} - 1)$. Поэтому найдется такой корень уравнения (16), что $0 < \rho < 1$. Тогда $1 - k > 0, b > 0$ и из (15) получим равномерную по n оценку

$$c_3\,[u^{n+1}]_2^2 + c_4\,\|u^{n+1}\|_0^2 + c_5\,[v^{n+1}]_0^2 \le$$
$$\le \rho\,\{c_3\,[u^n]_2^2 + c_4\,\|u^n\|_0^2 + c_5\,[v^n]_0^2\}$$

Здесь $c_3 = (1-k)$, $c_4 = e^{-1} - bc_1$, $c_5 = 1 + kc_1^{-1}(1+q)^{-1}$. Полученные константы зависят от e, q, c_1, c_2. Видно, что при уменьшении e, q оценка ухудшается.

Таким образом, получили

$$(17)\qquad u^n \to 0 \text{ сильно в } H_0^2(\Omega),\quad v_{ij}^n \to 0 \text{ сильно в } L^2(\Omega) \text{ при } n \to \infty.$$

Поскольку сумма ряда геометрической прогрессии с показателем $\rho < 1$ ограничена, то существует предельный элемент

$$w \in H_0^2(\Omega), \quad g_{ij} \in L^2(\Omega),$$

такой что

$$(18)\qquad w^n \to w \text{ сильно в } H_0^2(\Omega),\quad g_{ij}^n \to g_{ij} \text{ сильно в } L^2(\Omega) \text{ при } n \to \infty.$$

Используя сходимости (17), (18), в силу непрерывности операторов штрафа переходим к пределу при $n \to \infty$ в (11а—в). В итоге получим w, g_{ij}, $m_{ij} = -a_{ijkl}(w_{kl} + g_{kl})$ — решение системы (8)—(10) с краевым условием (2в), которая, как было показано выше, эквивалентна системе (2). Теорема доказана.

Таким образом, построена линейная система дифференциальных уравнений (11), которая при $n \to \infty$, $e, q \to 0$ сходится к решению исходных вариационных неравенств (1). Для нахождения решения линейной системы (11), в отличие от исходной, возможно применение стандартных численных методов. Так, с помощью метода конечных элементов, была реализована программа нахождения численного решения системы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хлуднев А. М.* О вариационных неравенствах в контактных пластических задачах//Дифференц. ур-ния. 1988. № 9. С. 1622—1628.
2. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.
3. *Баничук Н. В.* Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями//Механ. твердого тела. 1967. № 4. С. 138—141.
4. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972
6. *Khludnev A. M.* Contact viscoelastoplastic problem for a beam//Free Boundary Problems in Continuum Mech. Internat. Ser. Numer. Math. 1992. V. 106. P. 159—166.
7. *Новикова Н. М.* Стохастические методы численного решения выпуклых вариационных неравенств//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 2. С. 186—197.
8. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Физматгиз, 1973.

Поступила в редакцию 02.12.92

УДК 517.958

© 1993 г. В. В. ГУДКОВ

(Рига)

РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРЕЙФОДИФФУЗИОННОЙ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО МНОГОПОЛЮСНИКА

Рассмотрена многоточечная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующей одномерный стационарный процесс протекания тока через полупроводниковый многополюсник. Доказаны существование, единственность и априорная ограниченность решения поставленной задачи.

Введение

В работе [1] поставлена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующей одномерный стационарный процесс протекания тока через полупроводниковый многополюсник. Там же построены и обоснованы асимптотические разложения решений поставленной задачи. В настоящей работе показывается существование, единственность и априорная ограниченность решения этой задачи, при этом существенно используются