МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996

УДК 539.214; 539.374

 В.А. КОВТУНЕНКО

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКИ ДЛЯ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО

Рассматривается система вариационных неравенств, описывающая задачу равновесия упругопластической балки, шарнирно закрепленной по краям, под действием жесткого штампа. Границы контакта и зоны пластичности заранее неизвестны. Для описания поведения материала используется модель пластического течения.

В [1] с помощью метода штрафов доказана теорема существования для исследуемой модели. В настоящей статье построена итерационная система линейных дифференциальных уравнений и доказана сходимость ее решения к решению исходной задачи. Численные рассчеты по построенной схеме проиллюстрированы на модельных примерах.

Задача контакта упругопластической балки с жестким штампом формулируется следующим образом. На прямоугольнике $(0,1) \times (0, T)$ требуется найти неизвестные функции поперечного прогиба балки $w(x, t)$ и изгибающего момента $m(x, t)$, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$
\begin{aligned}
& w \geq \phi, \quad |m| \leqslant a \\
& (m_{xx} + f, \overline{w} - w) \leqslant 0 \quad \forall \overline{w} \geqslant \phi \\
& (-c\dot{m}_{xx} + \dot{m} + \dot{w}_{xx},\ \overline{m} - m) \geqslant 0 \quad \forall |\overline{m}| \leqslant a \\
& m = w = 0, \quad \text{при} \quad x = 0, 1 \\
& m = {}^0m, \quad w = {}^0w \quad \text{при} \quad t = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Заданными считаются функции формы штампа $\phi \in L^\infty(0,T; H^2(0, 1))$ ($\phi \leqslant 0$ при $x = 0, 1$), внешняя нагрузка $f \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ и константы $a > 0$, $c > 0$. Скобки $(\cdot, \cdot)$ обозначают скалярное произведение в $L^2(0, 1)$, точка над функцией – производную по параметру $t$. Здесь и далее через $H^k(0, 1)$, $k = 1, 2$ обозначается пространство обобщенных функций Соболева $W_2^k(0,1)$, $H_0^k(0,1)$ – замыкание в соответствующей норме гладких финитных функций.

Односторонняя начально-краевая задача (1) содержит в себе геометрическое ограничение $w(x, t) \geqslant \phi(x, t)$, которое обозначает непроникание балки через штамп, и физическое ограничение на момент. Строгое неравенство $|m(x, t)| < a$ описывает состояние упругости, равенства $|m(x, t)| = a$ определяет участки балки $0 \leqslant x \leqslant 1$, точки $x$ которых находятся в состоянии пластичности в момент $t$ [2].

Обычный подход к численному решению вариационных неравенств состоит в их замене на задачу минимизации функционала [3] или отыскания седловой точки лагранжиана [4]. Система вариационных неравенств (1) не является условием для существования седловой точки лагранжиана. Другой из возможных подходов состоит в применении метода штрафа [5]. Использование этого метода возможно для аппроксимации как упругоидеальнопластического течения [6], так и контактного взаимодействия. В частности, для задачи контакта упругой пластины со штампом в [7] изложены некоторые итерационные схемы, основанные на методе штрафа. Цель данной работы состоит в построении итерационного метода для штрафной задачи, ассоциированной с исходной моделью контакта упругопластической балки Тимошенко.

Задачу (1) можно переформулировать в приращениях. Разобьем отрезок $(0, T)$ на интервалы длиной $\Delta t$ точками $k = 0, 1, 2, ..., K$. Будем обозначать значения функций в точке $t = k\,\Delta t$ левым верхним индексом $k$. Получим последовательность уже деформированных задач при каждом $k = 0, 1, 2, ..., K - 1$:

$$
\begin{gathered}
{}^{k+1}w \geqslant {}^{k+1}\phi, \quad |{}^{k+1}m| \leqslant a \\
({}^{k+1}m_{xx} + f, \overline{w} - {}^{k+1}w) \leqslant 0 \quad \forall \overline{w} \geqslant {}^{k+1}\phi \\
\left(-c\frac{{}^{k+1}m_{xx} - {}^{k}m_{xx}}{\Delta t} + \frac{{}^{k+1}m - {}^{k}m}{\Delta t} + \frac{{}^{k+1}w_{xx} - {}^{k}w_{xx}}{\Delta t}, \quad \overline{m} - {}^{k+1}m\right) \geqslant 0 \\
\forall |\overline{m}| \leqslant a \\
{}^{k+1}m = {}^{k+1}w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ 1
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Введем операторы штрафа

$$
\beta(w) = \begin{cases} 0, & \text{если } w \geqslant \phi \\ w - \phi, & \text{если } w < \phi \end{cases}
$$

$$
\alpha(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } |m| \leqslant a \\ m - a, & \text{если } m > a \\ m + a, & \text{если } m < -a \end{cases}
$$

Тогда уравнения со штрафом, ассоциированные с системой (2), будут следующими:

$$
\begin{gathered}
-{}^{k+1}m(e,q)_{xx} + \beta({}^{k+1}w(e,q))/e = f \\
-c\,{}^{k+1}m(e,q)_{xx} + {}^{k+1}m(e,q) + \Delta t\alpha({}^{k+1}m(e,q))/q + {}^{k+1}w(e,q)_{xx} = -c\,{}^{k}m_{xx} + {}^{k}m + {}^{k}w_{xx} \\
{}^{k+1}w(e,q) = {}^{k+1}m(e,q) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,1
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где $e$ и $q$ – малые положительные параметры. В [1] доказан результат

$$
({}^{k+1}w(e,q),\ {}^{k+1}m(e,q)) \to ({}^{k+1}w, {}^{k+1}m) \quad \text{слабо в} \ (H_0^1(0,1))^2
\tag{4}
$$

при $e, q \to 0$, где ${}^{k+1}w$, ${}^{k+1}m$ – решение задачи (2). Полученные уравнения со штрафом (3) являются существенно нелинейными. Линеаризуем их следующим образом. Для простоты записи зависимость искомых функций от параметров $e, q, t$ указывать не будем. Зафиксируем эти параметры и рассмотрим итерационную схему

$$
\begin{gathered}
g_{xx}^{n+1} - \frac{1}{c}g^{n+1} = \frac{\Delta t}{q + \Delta t}\alpha(g_{xx}^{n} - {}^{k}m) - \frac{1}{c}(w^n - {}^{k}w) \\
-w_{xx}^{n+1} + \frac{c}{e}w^{n+1} = cf + c(w^n - \beta(w^n))/e - g_{xx}^{n+1} + c\,{}^{k}m_{xx} - {}^{k}w_{xx},
\end{gathered}
\tag{5}
$$

$$m^{n+1} = (w^{n+1} - g^{n+1} - {}^k w)c + {}^k m$$

$$g^{n+1} = w^{n+1} = m^{n+1} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,1$$

для $n = 0, 1, 2,...$ и произвольных $g^0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $w^0 \in H_0^1(0,1)$.

Тогда из (4) следует, что известная правая часть первого уравнения (5) принадлежит $L^2(0, 1)$, а второго – $H^{-1}(0, 1)$. Следовательно, исходя из общей теории эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, существует единственное решение задачи (5) $g^{n+1} \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $w^{n+1}, m^{n+1} \in H_0^1(0,1)$.

*Теорема 1*. Имеет место сходимость $(w^{n+1}, m^{n+1}) \to (w, m)$ сильно в $(H_0^1(0,1))^2$ при $n \to \infty$, где $(w, m)$ – решение системы (3).

*Доказательство*. Обозначим $u^{n+1} = w^{n+1} - w^n$, $\upsilon^{n+1} = g^{n+1} - g^n$, тогда из (5) следует

$$\upsilon_{xx}^{n+1} - \frac{1}{c}\upsilon^{n+1} = \frac{\Delta t}{q + \Delta t}(\alpha(g_{xx}^n - {}^k m) - \alpha(g_{xx}^{n-1} - {}^k m)) - \frac{1}{c}u^n$$

$$-u_{xx}^{n+1} + \frac{c}{e}u^{n+1} = \frac{c}{e}(u^n - \beta(w^n) + \beta(w^{n-1})) - \upsilon_{xx}^{n+1} \qquad (6)$$

$$u^{n+1} = \upsilon^{n+1} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,1$$

Заметим следующие свойства операторов штрафа:

$$|\alpha(s^1) - \alpha(s^2)| \leqslant |s^1 - s^2|, \;\; |s^1 - s^2 - (\beta(s^1) - \beta(s^2))| \leqslant |s^1 - s^2| \qquad (7)$$

Умножим первое уравнение в (6) на $\upsilon_{xx}^{n+1}$, второе на $u^{n+1}$ и проинтегрируем по (0, 1) с учетом краевых условий, далее воспользуемся неравенством Гельдера и (7), в итоге получим оценки

$$\left(\frac{2q}{q + \Delta t} + \frac{\Delta t}{q + \Delta t}\right)\|\upsilon_{xx}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{c}\|\upsilon_x^{n+1}\|^2 \leqslant \frac{\Delta t}{q + \Delta t}\|\upsilon_{xx}^n\|^2 + \frac{1}{c}\|u_x^n\|^2$$

$$\frac{1}{c}\|u_x^{n+1}\|^2 + \frac{1}{e}\|u^{n+1}\|^2 \leqslant \frac{1}{c}\|\upsilon_x^{n+1}\|^2 + \frac{1}{e}\|u^n\|^2 \qquad (8)$$

Поскольку для $u^{n+1} \in H_0^1(0,1)$, $\upsilon_x^{n+1} \in H^1(0,1)$, $\int_0^1 \upsilon_x^{n+1} dx = 0$ выполнено неравенство Пуанкаре $\|u^{n+1}\| \leqslant \|u_x^{n+1}\|$, $\|\upsilon_x^{n+1}\| \leqslant \|\upsilon_{xx}^{n+1}\|$, то из (8) после сложения можно найти такое $\rho$, $0 < \rho < 1$, зависящее от $e$, $q$, $c$, что

$$\frac{\Delta t}{q + \Delta t}\|\upsilon_{xx}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{c}\|u_x^{n+1}\|^2 + \frac{1}{e}\|u^{n+1}\|^2 \leqslant \rho\left(\frac{\Delta t}{q + \Delta t}\|\upsilon_{xx}^n\|^2 + \frac{1}{c}\|u_x^n\|^2 + \frac{1}{e}\|u^n\|^2\right) \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \rho^n\left(\frac{\Delta t}{q + \Delta t}\|\upsilon_{xx}^1\|^2 + \frac{1}{c}\|u_x^1\|^2 + \frac{1}{e}\|u^1\|^2\right) \equiv c_1\rho^n$$

Таким образом при фиксированных $e$, $q$: (9)

$$\|\upsilon_{xx}^{n+1}\|, \; \|u_x^{n+1}\|, \; \|u^{n+1}\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Поскольку сумма ряда геометрической прогрессии с показателем $\sqrt{\rho} < 1$ ограничена, то существует предельный элемент

$$g = g^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon^i, \quad w = w^0 + \sum_{i=1}^{\infty} u^i$$

что

$$g^n \to g \quad \text{сильно в} \quad H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

$$w^n \to w \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(0,1) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{10}$$

В силу непрерывности операторов штрафа имеем

$$\alpha(g_{xx}^n) \to \alpha(g_{xx}), \quad \beta(w^n) \to \beta(w) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{11}$$

Используя сходимости (9)–(11), перейдем к пределу в (5) при $n \to \infty$, получим

$$g_{xx} - {}^k m - \frac{\Delta t}{q + \Delta t} \alpha(g_{xx} - {}^k m) = \frac{1}{c}(g - w + {}^k w) - {}^k m$$

$$-w_{xx} + c\beta(w)/e = cf - g_{xx} + c\,{}^k m_{xx} - {}^k w_{xx} \tag{12}$$

$$m = (w - g - {}^k w)/c + {}^k m$$

$$g = w = m = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,1$$

Поскольку равенства

$$g_{xx} - {}^k m - \frac{\Delta m}{q + \Delta t} \alpha(g_{xx} - {}^k m) = -m$$

$$m + \frac{\Delta t}{q} \alpha(m) = -g_{xx} + {}^k m$$

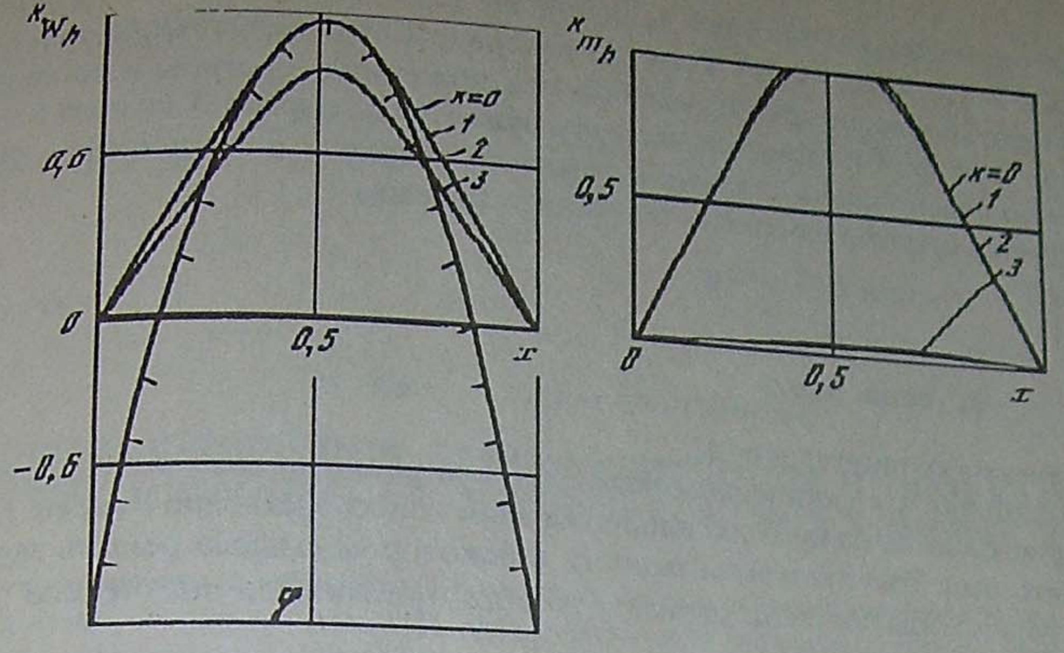
эквивалентны почти всюду на (0, 1), то после исключения из (12) функции $g$ получи искомое решение системы (3). Теорема доказана.

Для решения линейной системы дифференциальных уравнений (5) при фикси-рованном $n$ использовался метод конечных разностей. Разобьем отрезок (0, 1) на рав-ные промежутки длины $h$ и определим стандартные разностные операторы диффере-цирования в узловых точках. Применяя метод трехточечной прогонки для разностного аналога системы (5) при $n = 0, 1, 2, \ldots$, получим последовательность его численны решений, которые будем отмечать нижним индексом $h$. В силу доказанной теоре-мы итерационный процесс по $n$ сходится, тогда назовем ${}^{k+1}w_h(e,q) = {}^{k+1}w_h^{n+1}(e,q)$, ${}^{k+1}m_h(e,q) = {}^{k+1}m_h^{n+1}(e,q)$ решением уравнений (3), если выполнено условие

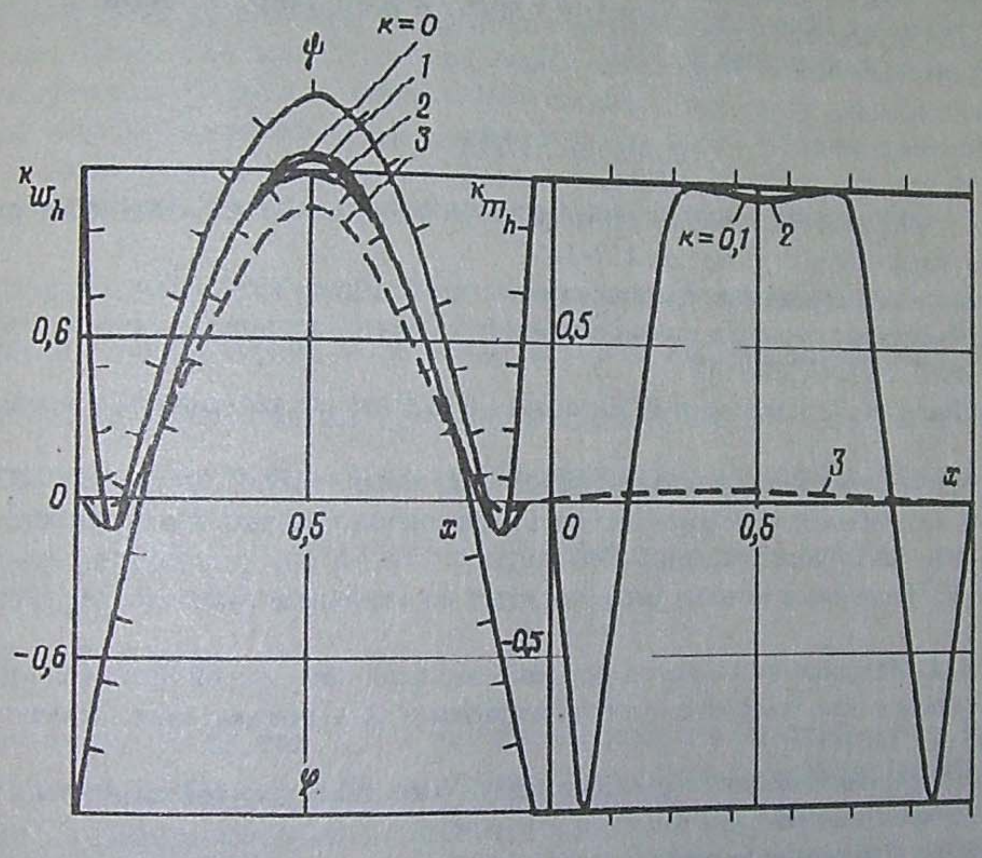
$$\max_x(|{}^{k+1}w_h^{n+1}(e,q) - {}^{k+1}w_h^n(e,q)| + |{}^{k+1}m_h^{n+1}(e,q) - {}^{k+1}m_h^n(e,q)|) \leq \delta$$

где $\delta > 0$ – заданная погрешность. Далее, используя сходимость (4), перейдем в (3) к пределу при $e, q \to 0$. Для этого выберем последовательность параметров $(e, q)_i \to 0$ при $i \to \infty$ и для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots$ найдем решение (3) ${}^{k+1}w_h(e,q)_i$, ${}^{k+1}m_h(e, q)_i$. Будем считать, что получено решение системы (2) ${}^{k+1}w_h = {}^{k+1}w_h(e,q)_{i+1}$, ${}^{k+1}m_h = {}^{k+1}m_h(e,q)_{i+1}$, если следующая величина не превосходит $\delta$:

$$\max_x(|{}^{k+1}w_h(e,q)_{i+1} - {}^{k+1}w_h(e,q)_i| + |{}^{k+1}m_h(e,q)_{i+1} - {}^{k+1}m_h(e,q)_i|)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Последовательность нахождения решения системы (2) при $k = 0, 1, 2,...$ даст численное решение $w_h(x, t)$, $m_h(x, t)$ исходных уравнений (1). После этого явно определяются неизвестные интервалы контакта, зоны пластической деформации, контактная сила $F$, скорость пластических деформаций $\xi$:

$$F = \lim_{e,q \to 0} \frac{1}{e} \beta(w(e,q)); \quad \xi = \lim_{e,q \to 0} \frac{1}{q} \alpha(m(e,q))$$

На модельных примерах был проведен ряд численных экспериментов: исследовалась зависимость получаемого решения от исходных данных $h$, $\Delta t$, $f$, $\phi$, $a$, $c$, $\delta$;

рассматривалась следующая схема нагружения. Мгновенное вдавливание штампа в ненагруженную балку ${}^0w = {}^0m = 0$ с последующей фиксацией на некоторое "время" $T$: $0 \leqslant k \leqslant s-1$, затем при $t = s\Delta t$ разгрузка, то есть штамп убирается. Данная схема проиллюстрирована на фигурах 1, 2 для $s = 3, f = 0, a = \Delta t = 1, c = 0,1, h = 10^{-2}$, $\delta = 10^{-4}$, $\phi(x) = 1,2 - 9,6(x - 0,5)^2$. Тогда за интервал $T$ первоначальные зоны пластичности убывают, после разгрузки сохраняются остаточные прогибы и моменты. Упругая балка за "время" $T$ не изменяется, а разгружается до первоначального состояния;

рассматривалась задача с двумя штампами: сверху $\psi$ и снизу $\phi$ (фиг. 2). В этом случае оператор штрафа изменится очевидным образом

$$\beta(w) = \begin{cases} 0 & \text{если } \phi \leqslant w \leqslant \psi \\ w - \phi, & \text{если } w < \phi \\ w - \psi, & \text{если } w > \psi \end{cases}$$

а все результаты останутся в силе.

При разработке в графическом режиме была реализована процедура изменения заданной формы штампа произвольным образом непосредственно с экрана дисплея на каждом шаге по $t$. Это дает возможность в некотором смысле решать задачу оптимального управления формой штампа, то есть приближать получаемое решение к заданному.

Аналогичные подходы в упругих и пластических контактных задачах для пластин и балок, описываемых с помощью модели пластин Кирхгоффа, были изучены в [8–10], их математическое обобщение в [11].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khludnev A.M., Hoffmann K.-H.* A variational inequality in a contact elastoplastic problem for a bar // Adv. in Math. Scien. and Appl. 1992. V. 1. № 1. P. 127–136
2. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. 288 с.
3. *Баничук Н.В.* Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями // Инж. ж. МТТ. 1967. № 4. С. 138–142.
4. *Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М., Мир, 1979. 574 с.
5. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
6. *Садовский В.М.* Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упругопластических тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1041–1048.
7. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во МГУ, 1987. 164 с.
8. *Ковтуненко В.А.* Итерационный метод решения вариационных неравенств в контактной упругопластической задаче с использованием метода штрафов // Ж. вычислит. математики и матем. физики. 1993. Т. 33. № 9. С. 1409–1415.
9. *Ковтуненко В.А.* Метод численного решения задачи о контакте упругой пластины с препятствием // ПМТФ. 1994. № 5. С. 142–146.
10. *Kovtunenko V.A.* Iteration penalty method for the contact elastoplastic problem // Control and Cybernetics. 1994. V. 23. No. 4. P. 803–808.
11. *Ковтуненко В.А.* Итерационный метод штрафа для вариационных неравенств с сильно монотонными операторами. Сиб. матем. ж. 1994. Т. 35. № 4. С. 826–829.

Новосибирск

Поступила в редакцию
27.XII.1994