

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ ШТРАФА

В.А. Ковтуненко

В работе рассматривается система вариационных неравенств, описывающая задачу о контакте упругопластической балки Кирхгоффа с жестким штампом. Интервалы контакта и пластических деформаций заранее неизвестны. Используется модель пластического течения. Построено приближенное дифференциальное уравнение четвертого порядка со штрафом, решение которого в пределе дает решение исходной системы. Используя итерационно-разностные методы, получено численное решение исходной задачи.

Рассматривается следующая математическая модель контакта упругопластической балки со штампом:

$$(1a) \quad w \geq \varphi, \quad (m_{xx} + f)(W - w) \leq 0 \quad \text{для любого } W \geq \varphi,$$

$$(1б) \quad |m| \leq 1, \quad (m_t + w_{xxt})(M - m) \geq 0 \quad \text{для любого } |M| \leq 1, \\ 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$(1в) \quad w = w_x = 0, \quad x = 0, 1,$$

$$(1г) \quad w = w^0, \quad m = m^0, \quad t = 0.$$

Здесь заданными функциями являются форма штампа  $\varphi \in C^2[0, 1]$ ,  $\varphi|_{x=0,1} < 0$  и внешняя нагрузка  $f \in L^2(0, 1)$  при каждом  $t > 0$ .



Требуется найти неизвестные функции поперечного прогиба балки  $w(x, t)$  и изгибающего момента  $m(x, t)$ . Задача (1) содержит в себе геометрическое ограничение на прогиб балки  $w \geq \varphi$  и физическое ограничение на момент  $|m| \leq 1$ . Строгое неравенство  $|m| < 1$  описывает состояние упругости, равенство достигается при переходе материала в пластическое состояние. Данная модель включает в себя как частный случай упругую контактную задачу, если ограничение на  $m$  отсутствует. С другой стороны, если нет ограничения на  $w$ , то система (1) описывает задачу равновесия упругопластической балки.

Для решения вариационных неравенств обычно используются следующие подходы. Неравенство заменяется задачей минимизации функционала [1] или отыскания седловой точки лагранжиана задачи [2, 3]. В данной работе предлагается воспользоваться методом штрафа [4].

Разобьем интервал изменения параметра нагружения  $t$  на равные промежутки точками  $t = kT$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , и аппроксимируем (1) по  $t$  следующим образом:

$$(2a) \quad {}^k w \geq \varphi, \quad ({}^k m_{xx} + f)(W - {}^k w) \leq 0 \quad \text{для любого } W \geq \varphi,$$

$$(2б) \quad |m| \leq 1, \quad T^{-1}({}^k m - {}^{k-1} m + {}^k w_{xx} - {}^{k-1} w_{xx})(M - {}^k m) \geq 0 \\ \text{для любого } |M| \leq 1,$$

$$(2в) \quad {}^k w = {}^k w_x = 0, \quad x = 0, 1,$$

$$(2г) \quad {}^0 w = w^0, \quad {}^0 m = m^0, \quad t = 0.$$

Положим  $T = 1$ . Полученная система при каждом  $k$  представляет собой уже деформационную модель. Зафиксируем  $k$ . Пусть  $e, q > 0$  малые параметры. Составим штрафную задачу для (2)

$$(3a) \quad -{}^k m_{xx} + e^{-1} \beta_\varphi({}^k w) = f,$$

$$(3б) \quad {}^k m + q^{-1} \alpha({}^k m) = -{}^k w_{xx} + {}^{k-1} w_{xx} + {}^{k-1} m,$$

$$(3в) \quad {}^k w = {}^k w_x = 0, \quad x = 0, 1,$$

где операторы штрафа имеют вид:

$$\beta_\varphi(w) = \begin{cases} 0 & , w \geq \varphi \\ w - \varphi & , w < \varphi \end{cases},$$

$$\alpha(m) = \begin{cases} 0 & , |m| \leq 1 \\ (1 - |m|^{-1})m & , |m| > 1 \end{cases}.$$



Здесь и далее зависимость искомым функций от  $e, q$  не указывается. В [5] доказан результат о сходимости решений задачи (3) к решению задачи (2), если оно достаточно гладкое, при  $e, q \rightarrow 0$ . Поэтому в дальнейшем будем искать решение (3). Заметим, что (3б) допускает следующее обращение:

$$(4) \quad {}^k m = {}^k g - (1 + q)^{-1} \alpha({}^k g),$$

где

$$(5) \quad {}^k g = -{}^k w_{xx} + {}^{k-1} w_{xx} + {}^{k-1} m.$$

Подставим (4) и (5) в (3а), получим

$$(6) \quad {}^k w_{xxxx} + e^{-1} \beta({}^k w) = f - (1 + q)^{-1} \alpha({}^k g)_{xx} + {}^{k-1} w_{xxxx} + {}^{k-1} m_{xx}.$$

Применим итерационный метод Ньютона-Канторовича [4,6] для уравнения (6), получим

$$(7) \quad {}^k u_{xxxx}^n + e^{-1} K({}^k w^{n-1}) {}^k u^n = f - e^{-1} \beta_\varphi({}^k w^{n-1}) + (1 + q)^{-1} \alpha({}^k g^{n-1})_{xx} - {}^k g_{xx}^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$(8) \quad {}^k u^n = {}^k w^n - {}^k w^{n-1}$$

приращение функции  ${}^k w$ , и

$$K(w) = \begin{cases} 0, & w \geq \varphi, \\ 1, & w < \varphi. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение четвертого порядка (7) с краевым условием (1г) решаем методом конечных разностей. Разобьем отрезок  $[0, 1]$  равномерной сеткой с шагом  $h = (N - 1)^{-1}$ ,  $N$  - количество узлов. Введем сеточные функции, заданные в узловых точках, будем обозначать их нижним индексом  $h$ , и определим стандартные конечно-разностные операторы дифференцирования. Тогда, решая (7) при фиксированных  $k, e, q, n$ , из (8) получим последовательность решений  ${}^k w_h^n(e, q)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Будем говорить, что найдено решение уравнения (6)  ${}^k w_h^n(e, q) = {}^k w_h^s(e, q)$ , если выполнено условие

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |{}^k w_h^s(e, q) - {}^k w_h^{s-1}(e, q)| \leq \delta.$$

Здесь  $\delta > 0$  - малая фиксированная величина. Выберем последовательность параметров  $e_i = q_i = 10^{-i}$ . Решаем последовательно



для  $e = e_i$ ,  $q = q_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  уравнение (6) и получим  ${}^k w_h = {}^k w_h(e_i, q_i)$ . Скажем, что найдено решение системы (2)  ${}^k w_h = {}^k w_h(e_I, q_I)$ , если выполнено неравенство

$$(9) \quad \max_{0 \leq x \leq 1} |{}^k w_h(e_I, q_I) - {}^k w_h(e_{I-1}, q_{I-1})| \leq \nu,$$

$\nu > 0$  — задано. Вторую неизвестную функцию  ${}^k m_h$  находим из (4) Численным решением системы (1) будем называть

$$w_h(x, t) = {}^k w_h(x), \quad m_h(x, t) = {}^k m_h(x), \quad x = (i-1)h, \\ i = 1, \dots, N, \quad t = kT, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, нахождение численного решения системы (1) вариационных неравенств представляет собой последовательный итерационно-разностный процесс решения уравнения (7) со следующими условиями согласования

$${}^k w_h^1(e_i, q_i) = {}^k w_h(e_{i-1}, q_{i-1}), \\ {}^k w_h^1(e_1, q_1) = {}^{k-1} w_h, \quad {}^0 w_h = w_h^0.$$

После того как решение найдено, явно определяются интервалы контакта и пластичности, контактная сила

$$F = \lim_{e, q \rightarrow 0} (e^{-1} \beta_\Phi(w))$$

и скорость пластических деформаций

$$\xi = \lim_{e, q \rightarrow 0} (q^{-1} \alpha(m)).$$

Приведем некоторые результаты численных экспериментов:

1. Для частного случая контактной задачи для упругой балки (ограничение на  $m$  отсутствует) есть примеры точных решений в [7]. В этом случае было проверено, что численное решение приближается к точному при убывании  $h$ .
2. Была исследована зависимость численных решений от исходных параметров. В дальнейшем для простоты выбирались следующие значения:  $T = 1$ ,  $f = 0$ ,  $h = 10^{-2}$ ,  $\delta = 10^{-3}$ . При этом условие (9) для  $\nu = 10^{-17}$  выполнялось при  $e, q \approx 10^{-20}$ .
3. Форма штампа задавалась уравнениями полиномов степени от 1 и выше (рис. 1, 2, 3). Когда норма  $\Phi$  в  $C[0, 1]$  мала — получаем упругое решение, с ее ростом появляются и растут зоны пластичности.
4. Рассматривалась следующая схема нагружения:
  - а) Мгновенное вдавливание штампа в ненагруженную балку  $w = m = 0$ . Это соответствует нахождению решения  $w_D(x)$ ,  $m_D(x)$  деформацион-



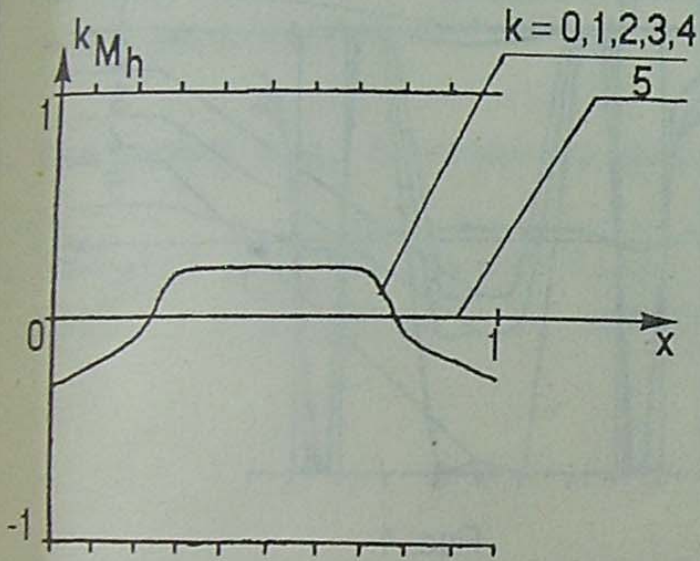
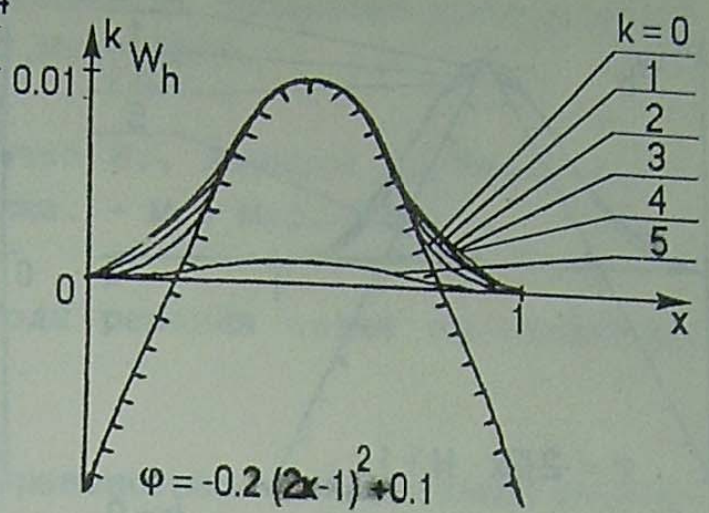
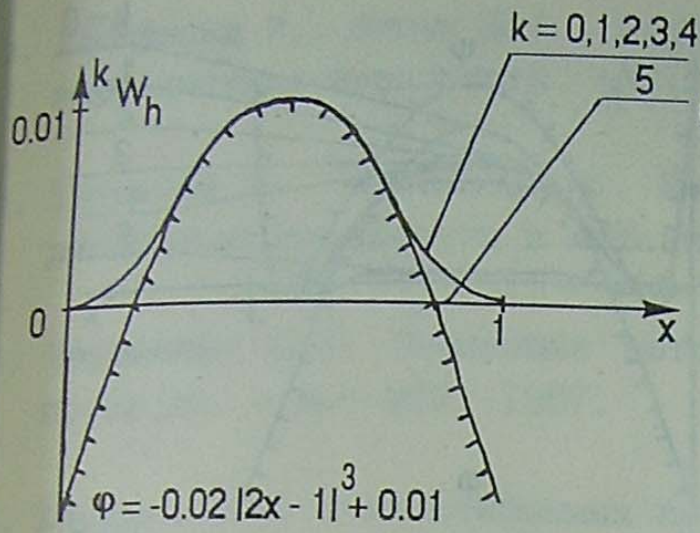


Рис. 1

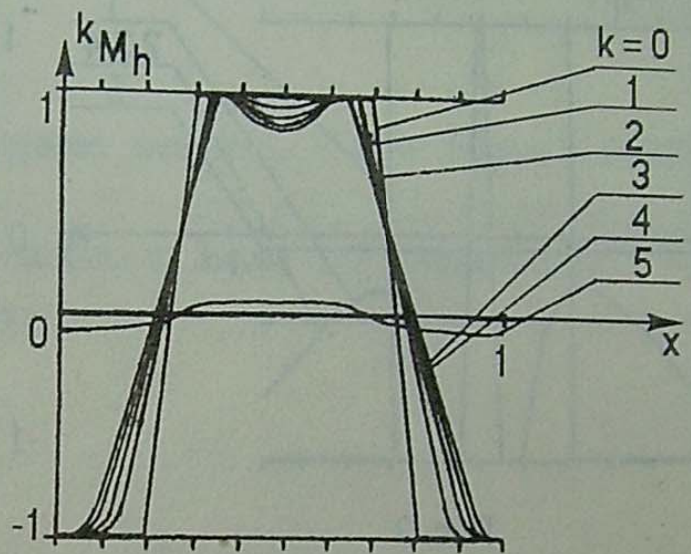


Рис. 2

ной задачи контакта упругопластической балки из системы (2) при  $k = 1, w^0 = m^0 = 0$ .

б) Последующая фиксация штампа на "время"  $\tau = T(s - 1)$ . Решается задача (2) для  $w^0 = w_d, m^0 = m_d, k = 1, \dots, s - 1$ .

в) Разгрузка, т.е. штамп убирается при  $t = Ts$  (на рисунках 1, 2, 3, 4  $s = 5$ ). За интервал  $\tau$  первоначальные зоны пластичности убывают. Упругая балка в этом случае не изменяется (рис. 1). После разгрузки сохраняются остаточные прогибы и моменты. Упругая балка разгружается до начального состояния  $w = m = 0$ .

5. Рассматривалась задача с двумя штампами: сверху  $\psi$  и снизу  $\varphi$  (рис. 4). Тогда в (3а) аддитивно добавится второй оператор штрафа



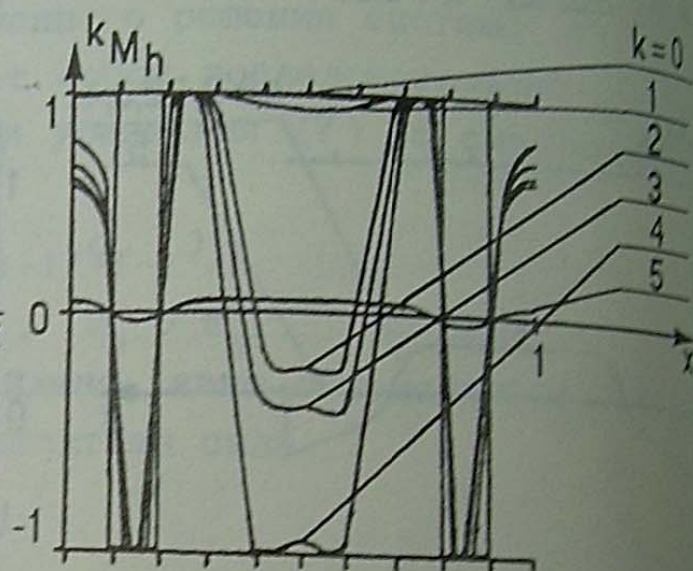
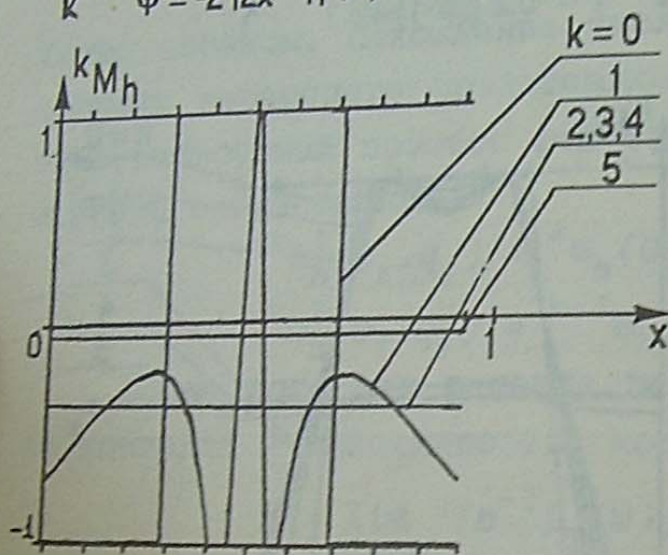
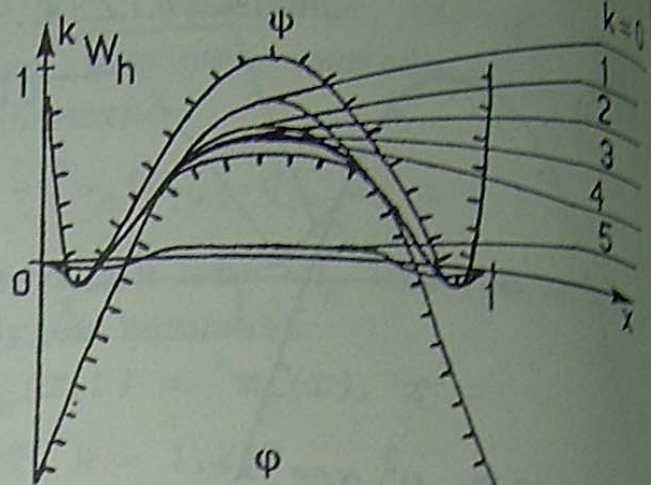
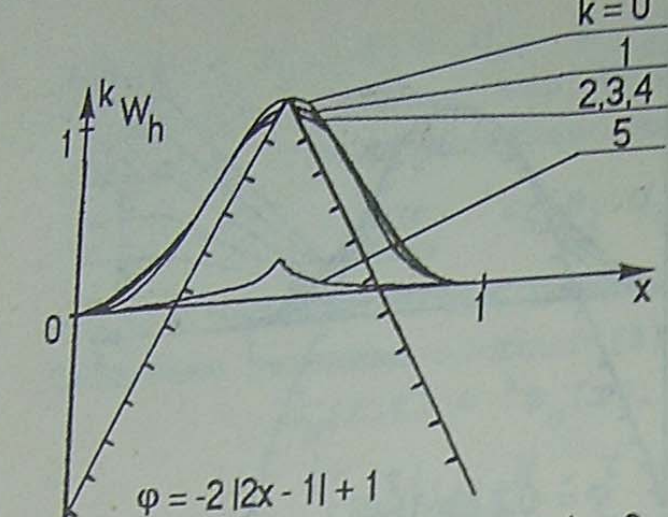


Рис. 3

Рис. 4

$\beta_\psi(w)$  за ограничение  $w \leq \psi$ . Способ нахождения решения не меняется.

6. При работе в графическом режиме была реализована процедура изменения формы штампа визуально с экрана дисплея на каждом шаге по  $t$ . Это дает возможность попытаться приблизить получаемое решение к заданному, управляя формой одного или двух штампов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н.В. Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями // Механика твердого тела. - 1967. - № 4. - С. 138-141.



2. Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. - М.: Мир, 1979.
3. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. - М.: Мир, 1986.
4. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. - М.: МГУ, 1987.
5. Хлуднев А.М. О вариационных неравенствах в контактных пластических задачах // Дифференциальные уравнения. - 1988. - № 9. - С. 1622-1628.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1987.
7. Cimatti G. The constrained elastic beam // Meccanica. - 1973. - v.86, N.2. - P. 119-124.