МАРТ 1994 г., ТОМ 30, № 3

УДК 517.97+539.3

В. А. КОВТУНЕНКО

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В ЗАДАЧЕ КОНТАКТА ПЛАСТИНЫ С НЕГЛАДКИМ ШТАМПОМ

В настоящей работе рассматривается задача о контакте упругой пластины с жестким штампом в постановке Кирхгоффа с неразделенными нормальными и касательными перемещениями. Область контакта заранее неизвестна.

Данная модель описывается вариационным неравенством четвертого порядка с тремя неизвестными функциями. Регулярность его решения изучалась в [1, 2]. В работе [3] для простейшего одномерного случая получена зависимость решения этого вариационного неравенства от минимизирующей последовательности штампов. В настоящей работе для двумерного случая сделано дополнительное предположение ограниченности касательных перемещений. Построена конструктивная последовательность негладких штампов в триангулированной области, аппроксимирующая исходно гладкий штамп. Доказан результат о сходимости решений вариационных неравенств, описывающих задачу контакта пластины с построенными штампами, к решению исходной задачи.

Пусть $\Omega\subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, Ω совпадает со срединной плоскостью недеформированной тонкой пластины с шарнирно закрепленными краями на границе $\partial\Omega$. В области Ω задана форма штампа $z=\varphi(x, y)$, где функция φ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi\in H^3(\Omega)$, $\varphi\leqslant 0$ на $\partial\Omega$. Тогда по теореме вложения $H^3(\Omega)$ вложено в $C^{1,\mu}(\bar\Omega)$, $0\leqslant\mu<1$, т. е. $\varphi\in C^1(\bar\Omega)$ и существуют такие константы K_1, K_2, что $|\varphi(b)-\varphi(a)|\leqslant K_1|b-a|^\mu$, $|\nabla\varphi(b)-\nabla\varphi(a)|\leqslant K_2|b-a|^\mu$ для любых $a, b\in\Omega$.

Условие непроникновения деформированной пластины через жесткий штамп в линейном приближении можно описать неравенством $w-u\varphi_x-v\varphi_y\geqslant\varphi$, где w — поперечный прогиб, а (u, v) — касательное смещение срединной плоскости пластины. Потребуем, чтобы касательные смещения были конечны, т. е. существовала константа $c>0$, не зависящая от u и v, так что $|(u, v)|\leqslant c$. Образуем множество возможных прогибов пластины над штампом φ: $K_\varphi=\{(w, u, v)\in X/w-u\varphi_x-v\varphi_y\geqslant\varphi$, $|(u, v)|\leqslant c$ п. в. $\Omega\}$, которое является выпуклым и замкнутым. Здесь $X=(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.

Потенциальная энергия пластины выражается функционалом

$$\Pi(w, u, v)=\int_\Omega[(\Delta w)^2+(\nabla u)^2+(\nabla v)^2-2(fw+gu+hv)]\,d\Omega,$$

где $f, g, h\in L^2(\Omega)$ — заданные силы, а $d\Omega$ — лебегова мера в Ω. Задача равновесия пластины над штампом

$$\inf_{(\bar w, \bar u, \bar v)\in K_\varphi}\Pi(\bar w, \bar u, \bar v)$$

эквивалентна вариационному неравенству

$$\langle\Delta w, \Delta\bar w-\Delta w\rangle+\langle\nabla u, \nabla\bar u-\nabla u\rangle+\langle\nabla v, \nabla\bar v-\nabla v\rangle\geqslant$$
$$\geqslant\langle f, \bar w-w\rangle+\langle g, \bar u-u\rangle+\langle h, \bar v-v\rangle\quad\forall(\bar w, \bar u, \bar v)\in K_\varphi. \tag{1}$$

Скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Можно доказать, что существует единственное решение задачи (1) $(\mathring w, \mathring u, \mathring v)=(w(\varphi), u(\varphi), v(\varphi))\in K_\varphi$.

Проведем некоторые геометрические построения. Скажем, что задана аппроксимация области Ω треугольниками, если для каждого натурального n определены невырожденные треугольники T_k^n, $k=1, \ldots, K(n)$, с вершинами в точках $a_{ki}^n=(x_{ki}^n, y_{ki}^n)$ и внутренними углами γ_{ki}^n, $i=1, 2, 3$, так что

1) треугольники пересекаются только по своим границам и в сумме составляют многоугольник T^n;

2) $\overline{T^n}\subset\Omega$;

3) существует $\gamma^0>0$, что для любых n, k, i выполняется

$$\gamma_{ki}^n\geqslant\gamma^0; \tag{2}$$

4) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant K(n)}\operatorname{diam}T_k^n\to 0$ при $n\to\infty$;

5) для любой области U, $\bar U\subset\Omega$ существует такое число $N(U)$, что для любого $n\geqslant N(U)$ выполняется

$$U\subset T^n. \tag{3}$$

Заметим, что отсюда вытекает следующее очевидное свойство:

$$\operatorname{mes}(\Omega\setminus T^n)\to 0 \text{ при } n\to\infty. \tag{4}$$

Построим функцию φ^n, непрерывную в $\overline{T^n}$ и линейную в каждом T_k^n, следующим образом:

$$\varphi^n(x, y)=\varphi(a_{k1}^n)+(x-x_{k1}^n)A_k^n+(y-y_{k1}^n)B_k^n, \tag{5}$$

где $A_k^n=[(\varphi(a_{k2}^n)-\varphi(a_{k1}^n))(y_{k3}^n-y_{k1}^n)-(\varphi(a_{k3}^n)-\varphi(a_{k1}^n))(y_{k2}^n-y_{k1}^n)]\times\{[(x_{k2}^n-x_{k1}^n)(y_{k3}^n-y_{k1}^n)-(x_{k3}^n-x_{k1}^n)(y_{k2}^n-y_{k1}^n)]\}^{-1}$, $B_k^n=[(\varphi(a_{k3}^n)-\varphi(a_{k1}^n))(x_{k2}^n-x_{k1}^n)-(\varphi(a_{k2}^n)-\varphi(a_{k1}^n))(x_{k3}^n-x_{k1}^n)]/[(x_{k2}^n-x_{k1}^n)(y_{k3}^n-y_{k1}^n)-(x_{k3}^n-x_{k1}^n)(y_{k2}^n-y_{k1}^n)]$, и ее непрерывное продолжение произвольным образом в $\bar\Omega$:

$$\bar\varphi^n=\varphi^n \text{ в } \overline{T^n},\quad |\bar\varphi^n|\leqslant\text{const в } \Omega\setminus T^n,\quad \bar\varphi^n=\varphi \text{ на } \partial\Omega.$$

Тогда $\bar\varphi^n\in H^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$. Введем следующие обозначения размеров треугольников: $\rho_k^n=\max\{|a_{k3}^n-a_{k2}^n|, |a_{k3}^n-a_{k1}^n|, |a_{k2}^n-a_{k1}^n|\}$, $\rho^n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant K(n)}\rho_k^n$.

Лемма. *Пусть выполнено*

$$\rho^n\leqslant(c_1n^{1/\mu})^{-1}, \tag{6}$$

тогда п. в. T^n имеют место оценки

$$|\varphi^n-\varphi|\leqslant 1/n, \tag{7}$$

$$|\nabla\varphi^n-\nabla\varphi|\leqslant 1/n. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим треугольник T_k^n. В силу (2) его площадь ограничена снизу: $S(T_k^n)\geqslant(1/4)\operatorname{tg}(\gamma^0)(\rho_k^n)^2$, причем $S(T_k^n)=(1/2)|(x_{k2}^n-x_{k1}^n)(y_{k3}^n-y_{k1}^n)-(x_{k3}^n-x_{k1}^n)(y_{k2}^n-y_{k1}^n)|$. По теореме о среднем существуют такие ξ_k^n, $\eta_k^n\in T_k^n$, что $\varphi(a_{k2}^n)-\varphi(a_{k1}^n)=\nabla\varphi(\xi_k^n)(a_{k2}^n-a_{k1}^n)$, $\varphi(a_{k3}^n)-\varphi(a_{k1}^n)=\nabla\varphi(\eta_k^n)(a_{k3}^n-a_{k1}^n)$. Тогда для произвольной точки $(x, y) \in T_k^n$ имеем

$$|A_k^n - \varphi_x(x, y)| = |[(\varphi_x(\xi_k^n) - \varphi_x(x, y))(x_{k2}^n - x_{k1}^n)(y_{k3}^n - y_{k1}^n) + (\varphi_x(x, y) - \varphi_x(\eta_k^n))(x_{k3}^n - x_{k1}^n)(y_{k2}^n - y_{k1}^n) + (\varphi_y(\xi_k^n) - \varphi_y(\eta_k^n))(y_{k2}^n - y_{k1}^n)(y_{k3}^n - y_{k1}^n)] / [(x_{k2}^n - x_{k1}^n)(y_{k3}^n - y_{k1}^n) - (x_{k3}^n - x_{k1}^n)(y_{k2}^n - y_{k1}^n)]| \leqslant$$

$$\leqslant [3K_2(\rho_k^n)^{2+\mu}] / [2S(T_k^n)] \leqslant 6K_2(\rho_k^n)^{\mu}/\operatorname{tg}(\gamma^0) \leqslant 6K_2(\rho^n)^{\mu}/\operatorname{tg}(\gamma^0).$$

Аналогично получается оценка для $|B_k^n - \varphi_y(x, y)|$, тогда

$$|(A_k^n, B_k^n) - \nabla\varphi(x, y)| \leqslant (6\sqrt{2}K_2/\operatorname{tg}(\gamma^0))(\rho^n)^{\mu} \equiv c_2(\rho^n)^{\mu}.$$

Следовательно, вектор $\nabla\varphi^n(x, y) \equiv (A_k^n, B_k^n)$, $(x, y) \in T_k^n$, ограничен: $|(A_k^n, B_k^n)| \leqslant \|\varphi\|_{C^1(\Omega)} + c_2(\operatorname{diam}\Omega)^{\mu} \equiv c_3$, и $|\varphi^n(x, y) - \varphi(x, y)| \leqslant |\varphi(a_{k1}^n) - \varphi(x, y)| + |(A_k^n, B_k^n)|\,|a_{k1}^n - (x, y)| \leqslant K_1(\rho_k^n)^{\mu} + c_3\rho_k^n \leqslant (K_1 + c_3)(\rho^n)^{\mu}$. Выбирая $c_1 = (\max\{c_2, K_1 + c_3\})^{1/\mu}$, в силу произвольности k получим искомое.

Из леммы и (4) вытекает

Следствие.

$$\nabla\bar{\varphi}^n \to \nabla\varphi \textit{ сильно в } L^2(\Omega) \textit{ при } n \to \infty. \tag{9}$$

Для каждой функции φ^n определим выпуклое и замкнутое множество возможных прогибов пластины $K^n = \{(w^n, u^n, v^n) \in X \mid w^n - u^n\varphi_x^n - v^n\varphi_y^n \geqslant \varphi^n,\ |(u^n, v^n)| \leqslant c$ п. в. $T^n\}$. Воспользуемся определением сходимости замкнутых выпуклых множеств, данным в работе [4].

Определение. $K^n \to K_\varphi$ в X при $n \to \infty$, если выполнено

$i)$ для любого $(w, u, v) \in K_\varphi$ существует последовательность $(w^n, u^n, v^n) \in K^n$ такая, что $(w^n, u^n, v^n) \to (w, u, v)$ сильно в X при $n \to \infty$;

$ii)$ для любой последовательности $(w^l, u^l, v^l) \in K^l$, K^l — подпоследовательность из K^n, такой, что $(w^l, u^l, v^l) \to (w, u, v)$ слабо в X при $l \to \infty$, выполняется $(w, u, v) \in K_\varphi$.

Теорема 1. *Можно выбрать такую аппроксимацию области Ω треугольниками, что имеет место сходимость $K^n \to K_\varphi$ в X при $n \to \infty$ в смысле данного определения.*

Доказательство. Выберем $\rho^n \to 0$ так, чтобы были выполнены условия леммы, тогда справедливы оценки (7), (8). Покажем сначала $i)$. Для произвольного $r^n \to 0$ за счет выбора $K(n)$ можно построить T^n так, чтобы было выполнено $\Omega \supset \Omega^n \supset T^n \supset \omega^n$, где Ω^n, ω^n — области, подобные Ω, и $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega^n) = r^n$, $\operatorname{dist}(\partial\omega^n, \partial\Omega^n) = \rho^n$. Возьмем такое r^n, чтобы можно было построить $\chi^n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$:

$$\chi^n = (1 + c)/n \text{ в } \bar{\Omega}^n,\ |D^i\chi^n| \leqslant \text{const},\ i = 0, 1, 2, \text{ в } \Omega\backslash\Omega^n,\ \chi^n = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Тогда для произвольного элемента $(w, u, v) \in K_\varphi$ последовательность

$$(w^n, u^n, v^n) = (w + \chi^n, u, v) \tag{10}$$

сходится сильно к (w, u, v) в X при $n \to \infty$. Покажем, что построенный элемент (10) принадлежит K^n. Поскольку выполнено $w - u\varphi_x - v\varphi_y - \varphi \geqslant 0$ и $|(u, v)| \leqslant c$, то в силу оценок (7) и (8) имеем $w^n - u^n\varphi_x^n - v^n\varphi_y^n - \varphi^n = w - u\varphi_x - v\varphi_y - \varphi + \chi^n - (u, v)(\nabla\varphi^n - \nabla\varphi) + \varphi - \varphi^n \geqslant (1 + c)/n - c/n - 1/n = 0$ п. в. T^n.

Покажем теперь $ii)$. Пусть $(w^l, u^l, v^l) \to (w, u, v)$ слабо в X при $l \to \infty$, K^l — подпоследовательность из K^n. По теореме вложения X вложено в $C(\bar{\Omega}) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ компактно, т. е. существует такая подпоследовательность $(w^s, u^s, v^s) \in K^s$, что выполнено

$$\begin{gathered} |w^s - w| \leqslant 1/s \text{ в } \Omega, \\ u^s \to u,\ v^s \to v \text{ сильно в } L^2(\Omega) \text{ при } s \to \infty. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда из (9) и (11) следует, что $\|u\varphi_x - u^s\varphi_x^s + v\varphi_y - v^s\varphi_y^s\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ при $s \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, что для любого $s \geqslant N(\varepsilon)$

$$\varepsilon \geqslant \int_U |u\varphi_x - u^s\varphi_x^s + v\varphi_y - v^s\varphi_y^s|\, d\Omega \text{ для любого } U \subseteq \Omega. \tag{12}$$

Допустим $(w, u, v) \notin K_\varphi$, тогда существует $U \subseteq \Omega$, $\operatorname{mes}(U) > 0$, что $w - u\varphi_x - v\varphi_y - \varphi < 0$ п. в. U. Всегда можно выбрать так подобласть U, что существует достаточно малое $\delta > 0$, что $-w + u\varphi_x + v\varphi_y + \varphi > \delta$ п. в. U. Но из (3) следует, что для $s \geqslant N(U)$ в случае необходимости для подобласти U выполняется $U \subseteq T^n$, тогда п. в. U имеем $w^s - u^s\varphi_x^s - v^s\varphi_y^s - \varphi^s \geqslant 0$. Сложив эти два неравенства, получим с учетом (7) и (11) следующее: $u\varphi_x - u^s\varphi_x^s + v\varphi_y - v^s\varphi_y^s > \delta - 2/s$ п. в. U. Проинтегрируем это неравенство по U:

$$(\delta - 2/s)\operatorname{mes}(U) \leqslant \int_U |u\varphi_x - u^s\varphi_x^s + v\varphi_y - v^s\varphi_y^s|\, d\Omega.$$

Возьмем $\varepsilon \leqslant (\delta/2)\operatorname{mes}(U)$, $N = \max\{N(\varepsilon), N(U), 4/\delta\}$, тогда для любого $s \geqslant N$ получим противоречие с (12). Значит, $\operatorname{mes}(U) = 0$.

Предположим теперь, что не выполнено второе ограничение, тогда существует $U \subseteq \Omega$, что $|(u, v)| > c$ п. в. U. Выберем в случае необходимости подобласть U, так чтобы выполнялось $|(u, v)| > c + \delta$ п. в. U, $\delta > 0$, $U \subseteq T^n$ для любого $n \geqslant N(U)$. Тогда п. в. U имеем $|(u^n, v^n)| \leqslant c$, следовательно, для любого $n \geqslant N(U)$ $\delta < |(u, v)| - |(u^n, v^n)| \leqslant |(u - u^n, v - v^n)|$ п. в. U. Проинтегрировав по U, получим противоречие со сходимостью (11). Итак, $(w, u, v) \in K_\varphi$.

Определим вариационное неравенство (1) на множествах K^n:

$$\langle\Delta w^n, \Delta\bar{w}^n - \Delta w^n\rangle + \langle\nabla u^n, \nabla\bar{u}^n - \nabla u^n\rangle + \langle\nabla v^n, \nabla\bar{v}^n - \nabla v^n\rangle \geqslant \langle f, \bar{w}^n - w^n\rangle + \langle g, \bar{u}^n - u^n\rangle + \langle h, \bar{v}^n - v^n\rangle\ \forall(\bar{w}^n, \bar{u}^n, \bar{v}^n) \in K^n, \tag{13}$$

его единственное решение для каждого n обозначим $(w^n, u^n, v^n) = (w(\varphi^n), u(\varphi^n), v(\varphi^n)) \in K^n$.

Теорема 2. *Пусть выполнена предыдущая теорема, тогда $(w^n, u^n, v^n) \to (\mathring{w}, \mathring{u}, \mathring{v})$ сильно в X при $n \to \infty$, где $(\mathring{w}, \mathring{u}, \mathring{v})$ — решение задачи (1).*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}) \in K_\varphi$ и построим для него сильно сходящуюся последовательность $(\bar{w}^n, \bar{u}^n, \bar{v}^n) \in K^n$ согласно формуле (10) п. $i)$ предыдущей теоремы. Подставив его в (13), получим следующее неравенство:

$$\|w^n\|_2^2 + \|u^n\|_1^2 + \|v^n\|_1^2 \leqslant \langle\Delta w^n, \Delta\bar{w}^n\rangle + \langle\nabla u^n, \nabla\bar{u}^n\rangle + \langle\nabla v^n, \nabla\bar{v}^n\rangle - \langle f, \bar{w}^n - w^n\rangle - \langle g, \bar{u}^n - u^n\rangle - \langle h, \bar{v}^n - v^n\rangle, \tag{14}$$

где $\|\cdot\|_2^2 = \langle\Delta\cdot, \Delta\cdot\rangle$, $\|\cdot\|_1^2 = \langle\nabla\cdot, \nabla\cdot\rangle$ эквивалентны нормам в $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ соответственно. Применив к (14) неравенство Гёльдера, в силу равномерной ограниченности по норме $(\bar{w}^n, \bar{u}^n, \bar{v}^n)$ получим $\|w^n\|_2 \leqslant \text{const}$, $\|u^n\|_1 \leqslant \text{const}$, $\|v^n\|_1 \leqslant \text{const}$. Из рефлексивности пространства X следует существование подпоследовательности $(w^l, u^l, v^l) \in K^l$ такой, что

$$(w^l, u^l, v^l) \to (w, u, v) \text{ слабо в } X \text{ при } l \to \infty. \tag{15}$$

Тогда из п. $ii)$ теоремы 1 следует, что $(w, u, v) \in K_\varphi$.

Теперь перепишем (14) следующим образом:

$$\langle\Delta w^l, \Delta\bar{w}^l\rangle + \langle\nabla u^l, \nabla\bar{u}^l\rangle + \langle\nabla v^l, \nabla\bar{v}^l\rangle \geqslant \|w^l\|_2^2 + \|u^l\|_1^2 + \|v^l\|_1^2 + \langle f, \bar{w}^l - w^l\rangle + \langle g, \bar{u}^l - u^l\rangle + \langle h, \bar{v}^l - v^l\rangle$$

и перейдем в этом неравенстве к нижнему пределу в силу сильной сходимости $(\bar{w}^n, \bar{u}^n, \bar{v}^n)$ и слабой полунепрерывности снизу нормы. Получим

$$\langle \Delta w, \Delta\bar{w} - \Delta w\rangle + \langle \nabla u, \nabla\bar{u} - \nabla u\rangle + \langle \nabla v, \nabla\bar{v} - \nabla v\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \langle f, \bar{w} - w\rangle + \langle g, \bar{u} - u\rangle + \langle h, \bar{v} - v\rangle \quad \forall (\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}) \in K_\varphi.$$

Но поскольку решение вариационного неравенства (1) единственно, то $(w, u, v) = (\mathring{w}, \mathring{u}, \mathring{v})$ и вся последовательность сходится к этому пределу:

$$(w^n, u^n, v^n) \to (\mathring{w}, \mathring{u}, \mathring{v}) \text{ слабо в } X \text{ при } n \to \infty. \qquad (16)$$

Для $(\mathring{w}, \mathring{u}, \mathring{v}) \in K_\varphi$ построим $(\mathring{w}^n, \mathring{u}^n, \mathring{v}^n) \in K^n$ так, что

$$(\mathring{w}^n, \mathring{u}^n, \mathring{v}^n) \to (\mathring{w}, \mathring{u}, \mathring{v}) \text{ сильно в } X \text{ при } n \to \infty. \qquad (17)$$

Подставим эту последовательность в качестве пробного элемента в (13) и добавим к обеим частям неравенства слагаемое $\|\mathring{w}\|_2^2 + \|\mathring{u}\|_1^2 + \|\mathring{v}\|_1^2 - 2(\langle \Delta\mathring{w}, \Delta w^n\rangle + \langle \nabla\mathring{u}, \nabla u^n\rangle + \langle \nabla\mathring{v}, \nabla v^n\rangle)$. В результате получим

$$\|w^n - \mathring{w}\|_2^2 + \|u^n - \mathring{u}\|_1^2 + \|v^n - \mathring{v}\|_1^2 \leqslant \langle \Delta\mathring{w}, \Delta\mathring{w} - \Delta w^n\rangle + \langle \nabla\mathring{u}, \nabla\mathring{u} -$$
$$- \nabla u^n) + \langle \nabla\mathring{v}, \nabla\mathring{v} - \nabla v^n\rangle + \langle \Delta w^n, \Delta\mathring{w}^n - \Delta\mathring{w}\rangle + \langle \nabla u^n, \nabla\mathring{u}^n -$$
$$- \nabla\mathring{u}\rangle + \langle \nabla v^n, \nabla\mathring{v}^n - \nabla\mathring{v}\rangle - \langle f, \mathring{w}^n - w^n\rangle - \langle g, \mathring{u}^n - u^n\rangle -$$
$$- \langle h, \mathring{v}^n - v^n).$$

Используя сходимости (16) и (17), перейдем в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и получим искомый результат.

Литература

1. Хлуднев А. М. // Дифференциальные уравнения с частными производными. (Тр. сем. С. Л. Соболева). Новосибирск, 1981. № 2. С. 109—114.
2. Хлуднев А. М. // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1986. Вып. 77. С. 137—141.
3. Иконников А. К. // Материалы XXVI Всесоюз. науч. студ. конф. Математика. Новосибирск, 1988. С. 41—45.
4. Mosco U. // Adv. Math. 1969. Vol. 3, N 4. P. 510—584.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Поступила в редакцию 30 марта 1992 г.

МАРТ 1994 г., ТОМ 30, № 3

УДК 519.624.2

В. Л. МАКАРОВ, В. В. ГУМИНСКИЙ

ТРЕХТОЧЕЧНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА (НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЙ СЛУЧАЙ)

Целью данной работы является построение трехточечных разностных схем (т. р. с.) n-го порядка точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка вида

$$L^{(P,Q)}\vec{u}(x) \equiv \frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{d\vec{u}(x)}{dx}\right) - Q(x)\vec{u}(x) = -\vec{f}(x), \quad x \in (0, 1), \qquad (1)$$

с краевыми условиями Дирихле

$$\vec{u}(0) = \vec{u}(1) = \vec{0}. \qquad (2)$$

Матрицы $P(x) = [p_{ij}(x)]_{i,j=1}^m$, $Q(x) = [q_{ij}(x)]_{i,j=1}^m$ и вектор $\vec{f}(x) = \{f_i(x)\}_{i=1}^m$, предполагается, удовлетворяют условиям

$$C_1\|\vec{v}\|^2 \leqslant (P(x)\vec{v}, \vec{v}), \; C_1 > 0, \; \forall\vec{v} \in \mathbf{R}^m, \; \forall x \in [0, 1],$$
$$p_{ij}(x) \in Q^{n+1}[0, 1], \qquad (3)$$
$$q_{ij}(x) \in Q^n[0, 1], \qquad (4)$$
$$f_i(x) \in Q^n[0, 1], \qquad (5)$$

где $Q^s[0, 1]$ — класс функций с кусочно-непрерывными производными до s-го порядка включительно с конечным числом точек разрыва. В дальнейшем будем предполагать, что задача (1), (2) имеет единственное решение. Необходимые и достаточные условия, обеспечивающие его, приведены в [1]. Здесь же для многоточечной краевой задачи для системы ОДУ первого порядка с кусочно-гладкими входными данными, к которой приводится задача (1), (2), предложен итерационный процесс Ричардсона $0(h^{2M+1})$ порядка точности при $n = 2M + 1$ в (3)—(5).

В [2] на основе теории точных и усеченных т. р. с., построенной для скалярного случая (1), (2) $(m = 1)$ в [3—6], были предложены и обоснованы т. р. с. высокого порядка точности в случае $P(x) = P^*(x) \geqslant C_1E$, $Q(x) = Q^*(x) \geqslant 0$. Указанные схемы для своего построения требовали применения неконструктивной операции — многократного интегрирования матрично-векторных выражений на промежутках длиной в шаг сетки.

Данная работа является распространением результатов из [7, 8] со скалярного $(m = 1)$ на векторно-матричный случай $(m > 1)$. В п. 1 при условии единственности решения задачи (1)—(5) $(n = 0)$ конструктивно доказано существование точной т. р. с., а в п. 2 — ее коэффи-