

Magnetismus als relativistisches Phänomen

Bachelorarbeit

Benjamin Kaufmann

13. März 2011

Betreut von

Ulrich Hohenester,

Ao.Univ.-Prof. Mag. Dr.rer.nat.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters	2
Die Lorentzkraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern	5
Die zum stromführenden Leiter parallele Komponente der Lorentzkraft	8
Ein Elektron im homogenen Magnetfeld	18
Schlussbemerkung	23
Literatur	25
Programm-Code	26

Einleitung

Motivation dieser Arbeit war es zu zeigen, dass die Wirkung eines von stationären Strömen verursachten Magnetfeldes im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie auf die Wirkung eines elektrischen Feldes zurückgeführt werden kann. Dies gelingt zumindest, wenn die Wirkung auf eine Ladung geschieht, die man als in einem Inertialsystem ruhend betrachten kann. Ausgangspunkt aller hier dargelegter Überlegungen ist die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1)$$

Diese Gleichung bildet gemeinsam mit den Maxwell-Gleichungen das Fundament der klassischen Elektrodynamik. Sie setzt die Kraft \mathbf{F} auf eine Ladung q in Relation zu dem elektrischen Feld \mathbf{E} und dem magnetischen Feld \mathbf{B} , welche am Ort der Ladung auf sie einwirken, wobei \mathbf{v} der Geschwindigkeitsvektor der Ladung ist.

Soweit sieht dies einfach und plausibel aus. Interessant wird diese einfache Formulierung der elektromagnetischen Wechselwirkung aber, wenn wir sie hinsichtlich ihrer Plausibilität gegenüber dem Relativitätsprinzip überprüfen. Dieses Prinzip sagt aus, dass alle ruhenden oder gleichförmig bewegten Beobachter gleichberechtigt sind. Sie müssen alle zu derselben Beschreibung der Natur gelangen, und zwar in der Art, dass sie nicht zwischen gleichförmiger Bewegung und Ruhe unterscheiden können. Im Prinzip ist damit die Wahl unseres Bezugssystems willkürlich, jedoch keinesfalls belanglos in Hinblick auf Gl. (1), da nämlich die Geschwindigkeit \mathbf{v} von unserem Bezugssystem abhängt! Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit unser Bezugssystem so wählen, dass es relativ zu der Ladung q ruht. Wir sprechen damit vom Ruhesystem der Ladung, dem Bezugssystem, welches sich quasi mit der Ladung mitbewegt. In diesem Bezugssystem ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} zwangsläufig null, da die Ladung in diesem ruht. Das heißt, Glg. (1) vereinfacht sich zu der Beziehung

$$\mathbf{F}' = q \mathbf{E}'. \quad (2)$$

Das wiederum bedeutet, dass sich die Kraft auf die Ladung q im Ruhesystem der Ladung aus einem rein elektrischen Feld \mathbf{E}' ergibt. Wir haben in Glg. (2) \mathbf{F} und \mathbf{E} bewusst durch \mathbf{F}' und \mathbf{E}' ersetzt, weil es sich hier um transformierte Größen handelt, die abhängig von der Wahl unseres Bezugssystems sind. Die Ladung q hingegen ist bezugssystemunabhängig.

Im Grunde reicht diese simple Argumentation aus, um aufzuzeigen, dass sich die Kraft auf eine Ladung aus deren Sicht, also sprich aus deren Ruhesystem, immer aus einem elektrischen Feld ergibt. Uneingeschränkte Gültigkeit können wir dem aber nur beimessen, solange das Relativitätsprinzip gilt, bzw. solange die Ladung q keine beschleunigte Bewegung ausführt. Die

entscheidende Frage, die es zu beantworten gilt, um die Theorie dahinter schlüssig abzurunden, ist nun, wie man die Felder von einem Bezugssystem ins andere transformiert. In dieser Arbeit sei dies am Beispiel der Magnetfelder stromdurchflossener Leiter demonstrieren.

Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz ist jeder stromdurchflossene Leiter von einem Magnetfeld umgeben. Das Magnetfeld für einen unendlich langen, geraden, stromdurchflossenen Leiter hat die Form¹

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (3)$$

Hier ist I der Strom durch den Leiter und r der Abstand vom Leiter. Die Richtung des Magnetfeldes folgt der Rechten-Hand-Regel. Stellen wir uns vor, eine Ladung q bewege sich parallel zu diesem Leiter mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} , so wird auf diese Ladung die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

wirken. Je nachdem ob sich die Ladung in dieselbe Richtung wie der Strom I bewegt oder genau entgegengesetzt, zeigt \mathbf{F}_L zum Leiter hin oder von diesem weg. Für den Fall einer parallelen Bewegung steht \mathbf{F}_L senkrecht auf den Leiter. Nehmen wir an, dass \mathbf{v} parallel zu I verlaufe. Es ergibt sich dann für den Betrag der Lorentzkraft:

$$F_L = \frac{\mu_0 q v I}{2\pi r} \quad (5)$$

Was aber, wenn wir ein anderes Bezugssystem wählen, wie zum Beispiel das Ruhessystem der Ladung? In diesem Fall ist \mathbf{v} offenkundig null. Ist \mathbf{v} aber null, wird auch die Lorentzkraft wie in Glg. (5) angegeben null. Wie erklärt sich dann, dass sich die Ladung zum Leiter hinbewegt? Die Physik muss letztlich dieselbe bleiben, egal welches Bezugssystem man wählt.

Wir sehen, dass Glg. (5) bezugssystemabhängig ist, weil \mathbf{v} - und genau genommen auch I und r - bezugssystemabhängig sind. Eigentlich ist Glg. (4), und folglich ebenso Glg. (5), nur ein Spezialfall von Glg. (1). Wir sind stillschweigend davon ausgegangen, dass unser Leiter elektrisch neutral ist. Ist das der Fall, so verschwindet der erste Term in Glg. (1) und es gilt Glg. (4). Dieser Spezialfall gilt aber nur für ein bestimmtes Bezugssystem. Wählen wir ein anderes,

¹ Eine Herleitung findet sich in [1].

müssen wir auf Glg. (1) zurückgehen. Das sei im Folgenden demonstriert.

Wir wollen die Lorentzkraft aus obigem Beispiel aus dem Ruhesystem der Ladung beschreiben. Dazu idealisieren wir zunächst unseren stromdurchflossenen Leiter. Ein elektrischer Leiter wird in der Regel ein Metall sein, zum Beispiel ein Kupferdraht. Dieser besteht im Wesentlichen aus den positiv geladenen Atomrümpfen und den frei beweglichen, negativ geladenen Elektronen, welche den Stromfluss ermöglichen. Wir idealisieren den Leiter durch zwei gerade Linienladungsdichten, eine positive λ_+ , welche die Atomrümpfe darstellt, und eine negative λ_- , welche die Elektronen darstellt. Jede dieser Linienladungsdichten verursacht ein elektrisches Feld der Form²

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (6)$$

Zusätzlich ist die negative Ladungsdichte mit der Geschwindigkeit v bewegt. Das heißt, sie stellt damit einen elektrischen Strom $I = v\lambda_-$ dar, welcher von dem Magnetfeld

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 v \lambda_-}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (7)$$

umgeben ist. Wir fordern außerdem, dass der Leiter elektrisch neutral sei, daher gilt:

$$\lambda_+ = -\lambda_- \quad (8)$$

Es bewege sich nun parallel zu dem Leiter die Ladung q . Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass sie dies ebenfalls mit der Geschwindigkeit v und in dieselbe Richtung wie die Elektronen im Leiter tue, was zu keiner Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit unserer Vorgehensweise führt. Die Ladung wird gemäß Glg. (4) eine Lorentzkraft erfahren, da sie sich durch das Magnetfeld bewegt, welches der Strom I verursacht. Wir setzen uns nun aber in das Ruhesystem von q . In diesem ruht q ebenso wie dies die negative Linienladungsdichte tut. Die positive Ladungsdichte hingegen erscheint mit der Geschwindigkeit v in die entgegengesetzte Richtung bewegt. Sie stellt damit einen Strom dar, der ein Magnetfeld verursacht. Jedoch hat das Magnetfeld auf die Ladung keinen Einfluss, da die Ladung ruht. Man könnte somit zu der Annahme gelangen, es gibt keine Kraft, die auf q wirkt. Diese Annahme ist jedoch falsch. Sie ist deshalb falsch, weil unsere oben gestellte Forderung, dass der Leiter elektrisch neutral sei, nun nicht mehr zutrifft. Diese Forderung haben wir aus dem Ruhesystem des Leiters getroffen. Sie gilt, wie wir gleich sehen werden, nicht mehr, wenn wir uns in das Ruhesystem der Ladung begeben. Wenn wir das nämlich tun, müssen wir - um zu einem einwandfreien Ergebnis zu

² Genau genommen ist auch dies das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten, geraden Linienladungsdichte. Für hinreichend lange Drähte in Relation zu r , gilt Glg. (6) aber in guter Näherung. Eine Herleitung findet sich in [1].

gelangen - die Relativitätstheorie einbeziehen, welche unter anderem besagt, dass bewegte Längen verkürzt erscheinen. Das heißt, im Ruhesystem des Leiters erscheinen die Abstände zwischen den bewegten Elektronen verkürzt, sowie die Abstände der Atomrümpfe im Ruhesystem der Ladung verkürzt erscheinen. Wie sich gleich zeigen wird, bedeutet dies, dass aus Sicht der bewegten Ladung, die Atomrümpfe enger beisammen sind, als die Elektronen, was dazu führt, dass der Leiter im Ruhesystem von q positiv geladen erscheint. Letzten Endes ist es haargenau diese Ladung des Leiters, die auf q eine Kraft ausübt.

Das lässt sich einfach zeigen. Dafür berechnen wir die negative und positive Ladungsdichte, wie sie im Ruhesystem von q beobachtet werden. Gemäß der Relativitätstheorie erscheint ein mit der Geschwindigkeit v bewegter Maßstab um den Faktor

$$1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (9)$$

in Bewegungsrichtung verkürzt. Das heißt, um diesen Faktor erscheinen die Abstände entlang des Leiters zwischen den Atomrümpfen im Ruhesystem von q kürzer, als sie dies im Ruhesystem des Leiters tun. Somit erscheint die positive Ladungsdichte um den Kehrwert dieses Faktors, also um γ , größer. Andererseits wird die negative Ladungsdichte im Ruhesystem von q einen um $1/\gamma$ kleineren Wert haben, da die Abstände der bewegten Elektronen im Ruhesystem des Leiters kontrahiert erscheinen und diese Kontraktion im Ruhesystem von q nicht mehr beobachtet wird. Die positive und negative Ladungsdichte nehmen also im Ruhesystem von q folgende Werte an:

$$\begin{aligned} \lambda'_+ &= \gamma \lambda_+ \\ \lambda'_- &= \lambda_- / \gamma \end{aligned} \quad (10)$$

Die Gesamtladungsdichte des Leiters ergibt sich, wenn wir diese beiden summieren.

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \lambda_+ (\gamma - 1/\gamma) = \lambda_+ \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \sqrt{1 - v^2/c^2} \right) = \lambda_+ \left(\frac{1 - 1 + v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \gamma \lambda_+ \frac{v^2}{c^2} \quad (11)$$

Damit können wir nun das elektrische Feld und folglich die elektrische Kraft, die auf q wirkt, berechnen.

$$\mathbf{F}' = q \mathbf{E}' = \frac{q \lambda'}{2 \pi \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} = \gamma \frac{q \lambda_+ v^2}{2 \pi \epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} = -\gamma \frac{q \lambda_- v^2}{2 \pi \epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}} \quad (12)$$

Mit den Beziehungen $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$ und $I = v \lambda$ können wir dies noch umformen zu:

$$\mathbf{F}' = -\gamma \frac{\mu_0 q v I}{2 \pi r} \hat{\mathbf{r}} \quad (13)$$

Zu guter Letzt transformieren wir dieses Resultat noch in das Bezugssystem des Leiters, was wie folgt gelingt.

$$F = F' / \gamma = -\frac{\mu_0 q v I}{2 \pi r} \hat{r} \quad (14)$$

Das ist dasselbe Ergebnis wie in Glg. (5). (Das negative Vorzeichen soll nicht weiter irritieren. Es rührt daher, weil hier \mathbf{r} vom Leiter weg zeigt. Wenn also q und I dasselbe Vorzeichen haben, wird q zum Leiter hingezogen, ansonsten von ihm abgestoßen.)

Die Lorentzkraft auf die Ladung q ist somit - aus dem Ruhesystem von q beurteilt - auf ein elektrisches Feld zurückzuführen. Die Ladung reagiert auf das elektrische Feld des Leiters, wie sie es in ihrem Bezugssystem wahrnimmt. Ein zum Leiter ruhender Beobachter nimmt das elektrische Feld anders wahr, oder wie in unserem Fall sogar gar nicht, er erklärt sich die Lorentzkraft als Wirkung eines magnetischen Feldes. Aus Sicht der Ladung jedoch ist diese Wirkung nichts anderes als das elektrische Feld des Leiters.

Die Lorentzkraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern

Analog unserer oben angeführten Vorgehensweise lässt sich auch die Lorentzkraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern auf die Wirkung elektrischer Felder reduzieren. Das soll hier demonstriert werden. Dazu berechnen wir das Ganze zunächst mit Hilfe von Magnetfeldern. Zwei stromführende Drähte, wir sagen Draht A und Draht B, seien parallel zueinander ausgerichtet und führen jeweils einen Strom, der in dieselbe Richtung zeigt. (Abb. 1)

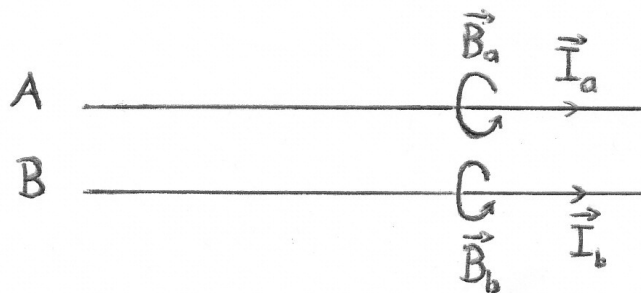


Abb. 1: Zwei stromführende Drähte A und B

Wir nehmen die Länge der Drähte als hinreichend lang an, sodass jeder Strom gemäß dem Biot-Savart-Gesetz ein der Rechten-Hand-Regel folgendes Magnetfeld verursacht, das die Form

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (15)$$

hat. Dieses Feld des Leiters steht in Wechselwirkung mit dem Strom des jeweiligen anderen Leiters und führt entsprechend der Beziehung für die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (16)$$

zu einer Anziehung der beiden Leiter. Q steht hier für die mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Ladung. $Q\mathbf{v}$ entspricht folge dessen dem Strom \mathbf{I} , der durch eine gewisse Länge s des Leiters fließt. Somit können wir $Q\mathbf{v}$ durch $s\mathbf{I}$ ersetzen, und erhalten daraus ein brauchbares Ergebnis, um zum Beispiel die Lorentzkraft zu berechnen, die das Magnetfeld \mathbf{B}_a des Leiters A auf den mit dem Strom \mathbf{I}_b durchflossenen Leiter B ausübt, oder noch genauer: die Lorentzkraft, die auf ein Teilstück der Länge s des Leiters B ausgeübt wird:

$$\mathbf{F}_L = s \mathbf{I}_b \times \mathbf{B}_a \quad (17)$$

Wir setzen für \mathbf{B}_a Glg. (15) ein und betrachten nur den Betrag der Kraft F_L , welcher sich aufgrund dessen, dass \mathbf{I}_b auf \mathbf{B}_a normal steht, wie folgt ergibt:

$$F_L = \frac{\mu_0 s I_a I_b}{2\pi r} \quad (18)$$

Dabei ist r der Abstand der beiden Leiter von einander.

Die Richtung der Kraft steht normal auf beide Leiter und zeigt von B nach A. Wir nehmen überdies an, dass unsere Leiter elektrisch neutral sind, und somit entspricht die Lorentzkraft F_L der Gesamtkraft, die auf den Leiter wirkt.

Dieses Ergebnis lässt sich nun aber auch erzielen, ohne die Vorstellung eines Magnetfeldes zu gebrauchen. Die Einschränkung ist nur die, dass dies nicht aus einem einzigen Bezugssystem gelingt, sondern man jede Kraft auf eine Ladung aus deren eigenem Ruhesystem beschreiben muss. Hierfür idealisieren wir unsere Problemstellung ein wenig. Der Leiter A sei durch die beiden Linienladungsdichten λ_{a+} und λ_{a-} dargestellt und der Leiter B durch die Linienladungsdichten λ_{b+} und λ_{b-} .

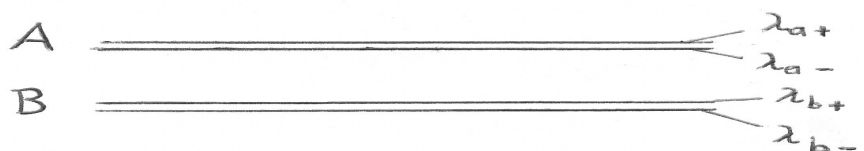


Abb. 2: Die Drähte A und B idealisiert mit Linienladungsdichten

Die positiven Ladungsdichten (mit dem Plusymbol versehen) sollen wieder für die Atomrümpfe unserer Leiter stehen, die negative Ladungsdichten (mit dem Minuszeichen versehen) stehen für die frei beweglichen Elektronen. Für die Zusatzbedingungen soll gelten, dass sich die negativen Ladungsdichten $\lambda_{a,b-}$ mit derselben konstanten Geschwindigkeit v gegenüber $\lambda_{a,b+}$ bewegen und im Ruhesystem des Leiters, sprich im Ruhesystem von $\lambda_{a,b+}$, unsere Leiter elektrisch neutral sind, sodass $\lambda_{a+} = -\lambda_{a-}$ und $\lambda_{b+} = -\lambda_{b-}$ gilt. Um nun die Kraft zu untersuchen, die A auf B ausübt, betrachten wir die Ladungsdichten von B aus ihren jeweiligen Ruhesystemen. Diese Vorgehensweise mag zunächst den Anschein erwecken, dass sie die ganze Sache nur komplizierter macht. Im Grunde aber ist es sehr simpel, wie wir gleich sehen werden. Im Ruhesystem der positiven Ladungsdichte λ_{b+} erscheint der Leiter A elektrisch neutral, das heißt, es wirkt keine Kraft auf sie. Im Ruhesystem der negativen Ladungsdichte λ_{b-} erscheint der Leiter A jedoch nicht mehr neutral. Seine Ladungsdichten λ_{a+} und λ_{a-} nehmen aufgrund des Bezugssystemwechsels analog wie in Glg. (10) andere Werte an, und zwar:

$$\begin{aligned}\lambda'_{a+} &= \gamma \lambda_{a+} \\ \lambda'_{a-} &= \lambda_{a-} / \gamma\end{aligned}\quad (19)$$

Daraus ergibt sich folgende Gesamtladungsdichte des Leiters A:

$$\lambda'_a = \lambda'_{a+} + \lambda'_{a-} = \gamma \lambda_{a+} + \frac{1}{\gamma} \lambda_{a-} = \lambda_{a+} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) = \lambda_{a+} \frac{1-1+\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \frac{v^2}{c^2} \lambda_{a+}\quad (20)$$

Das elektrische Feld des Leiters A sieht gemäß Glg. (6) dann so aus:

$$\mathbf{E}'_a = \frac{\lambda'_a}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\gamma v^2 \lambda_{a+}}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}}\quad (21)$$

Die Kraft, die dieses Feld auf die negative Ladungsdichte λ_{b-} ausübt ergibt sich aus:

$$\mathbf{F}' = Q \mathbf{E}'_a\quad (22)$$

Wobei Q hier die negative Ladungsdichte λ'_{b-} mal der Länge s' ist, wie sie im Ruhesystem von λ_{b-} wahrgenommen werden. s' ist nichts anderes als die Teillänge s des Leiters B, auf die wir die Lorentzkraft oben berechnet haben, jedoch wie sie im Ruhesystem der bewegten Elektronen erscheint, und zwar um den Faktor $1/\gamma$ verkürzt. Damit errechnet sich aus Glg. (21) und Glg. (22):

$$\mathbf{F}' = s' \lambda'_{b-} \mathbf{E}'_a = \frac{1}{\gamma} s \frac{1}{\gamma} \lambda_{b-} \mathbf{E}'_a = \frac{1}{\gamma} \frac{s \lambda_{a+} \lambda_{b-} v^2}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{r}}\quad (23)$$

Dies können wir mit $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$ und $I_a = v \lambda_{a+} = -v \lambda_{a-}$ bzw. $I_b = v \lambda_{b-}$ in die Form

$$\mathbf{F}' = - \frac{1}{\gamma} \frac{\mu_0 s I_a I_b}{2 \pi r} \hat{\mathbf{r}} \quad (24)$$

bringen. Wenn wir dieses Ergebnis in das Ruhessystem des Leiters transformieren, erhalten wir für die Kraft auf die negative Ladungsdichte λ_b :

$$\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}' = - \frac{\mu_0 s I_a I_b}{2 \pi r} \hat{\mathbf{r}} \quad (25)$$

Das ist dasselbe Ergebnis wie in Glg. (18), also die Lorentzkraft, die der Leiter A auf den Leiter B ausübt. Sie erklärt sich damit alleine aus elektrischen Feldern. Aus Sicht der positiven Atomrümpfe des Leiters B erscheint der Leiter A elektrisch neutral, daher erfahren sie keine Kraft. Aus Sicht der bewegten Elektronen des Leiters B erscheint der Leiter A jedoch positiv geladen, sodass sie eine Kraftwirkung erfahren, die sie zum Leiter B hinzieht. Es ist genau diese Kraft nichts anderes als die Lorentzkraft, die ein zu den Drähten ruhender Beobachter einem Magnetfeld zuschreiben würde.

Die zum stromführenden Leiter parallele Komponente der Lorentzkraft

Wir haben uns bis jetzt damit beschäftigt, wie man die Wirkung des Magnetfeldes eines stromdurchflossenen Leiters mit Ladungen auf ein elektrisches Feld zurückführt. Dies jedoch nur für den einfachen Fall, dass sich unsere Ladungen parallel zu diesem Leiter bewegen. Schwieriger wird unser Problem, wenn wir uns fragen, wie denn dies für den Fall, dass sich eine Ladung senkrecht zu diesem Leiter bewegt, gelingen soll.

Wenn wir das Ganze klassisch betrachten, d.h. wenn wir den stromdurchflossenen Leiter mit Hilfe eines Magnetfeldes beschreiben, ist der Fall relativ klar und einfach. Stellen wir uns vor, eine Ladung Q bewegt sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{w} auf einen stromdurchflossenen Leiter zu in der Art, dass \mathbf{w} auf den Leiter normal steht. Wie wir bereits in Glg. (3) angeführt haben, umgibt den Leiter ein magnetisches Feld der Form:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

\mathbf{w} steht senkrecht dazu. Die Kraft, die auf die Ladung Q wirkt, ergibt sich aus Glg. (2) zu

$$\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \quad (26)$$

Wenn wir unser Koordinatensystem so wählen, dass der Strom \mathbf{I} des Leiters in die positive x-

Richtung fließt, und sich die Ladung Q in der x - y -Ebene bewegt, so dass w in die positive y -Richtung zeigt, wird Q durch die Lorentzkraft F_L in die negative x -Richtung abgelenkt, sofern Q positiv ist. Es gilt also für diesen Fall:

$$F_L = - \frac{\mu_0 Q w I}{2\pi r} \hat{x} \quad (27)$$

Wie will man nun dieses Ergebnis herleiten, ohne sich der Vorstellung eines Magnetfeldes zu bedienen? Um das zu bewerkstelligen müssen wir analog wie oben vorgehen. Wir setzen uns in das Ruhesystem der Ladung Q , welches wir mit S' bezeichnen wollen, im Gegensatz zu S , dem Ruhesystem des Leiters. Da die Ladung Q in S' ruht, kann es gemäß Glg. (1) kein Magnetfeld geben, das auf Q eine Kraft ausübt. Folglich muss sich die Kraft F_L , wie wir sie in S beobachten, in S' aus elektrischen Feldern ergeben.

Das bedeutet, wir müssen der Frage nachgehen, wie das elektrische Feld unseres stromführenden Leiters im Bezugssystem S' aussieht. Die Antwort auf diese Frage ist nicht von ganz so simpler Gestalt, wie die Lösungen, die wir für eine dem Leiter parallele Bewegung gefunden haben. Ein nahe liegender Gedanke wäre es wohl, einfach den Leiter wieder mit zwei Linienladungsdichten zu idealisieren und diese Ladungsdichten über eine Lorentz-Transformation vom Bezugssystem S ins Bezugssystem S' zu bringen. Ganz so einfach ist es aber nicht. Wir sind bis jetzt stillschweigend von der Annahme ausgegangen, dass es genügt, die Ladungsdichten zu transformieren und dann aus deren neuen Werten die Felder zu berechnen. Für eine Bewegung, die zu den Feldlinien dieser Ladungsdichten orthogonal oder parallel verläuft, ist diese Vorgehensweise gerechtfertigt. Für eine schräg dazu verlaufende Bewegung jedoch nicht. In unserem Fall liegt aber eine solche Bewegung vor!

Um dies zu veranschaulichen idealisieren wir unseren Leiter wieder und stellen uns vor, er bestünde aus einer großen Anzahl positiver Punktladungen, den Atomrümpfen, und einer großen Anzahl bewegter negativer Punktladungen, den Elektronen, die den Strom im Leiter darstellen. Der Einfachheit halber sollen alle Ladungen auf einer Linie liegen und alle Elektronen dieselbe konstante Geschwindigkeit u haben. Begeben wir uns nun in das Bezugssystem S' und treffen folgende Wahl des Koordinatensystems: Der Ursprung von S' sei der Ort, an dem sich Ladung Q befindet. Die Atomrümpfe des Leiters bewegen sich mit der Geschwindigkeit w in Richtung der negativen y -Achse. Die Leiterelektronen bewegen sich mit der Geschwindigkeit v , die als x -Komponente die Geschwindigkeit u hat und als y -Komponente die Geschwindigkeit $-w$. (Siehe Abb. 3.) Um das elektrische Feld des Leiters zu bestimmen, müssen wir nun das Feld jeder einzelnen Punktladung berechnen, und anschließend all diese Felder überlagern.

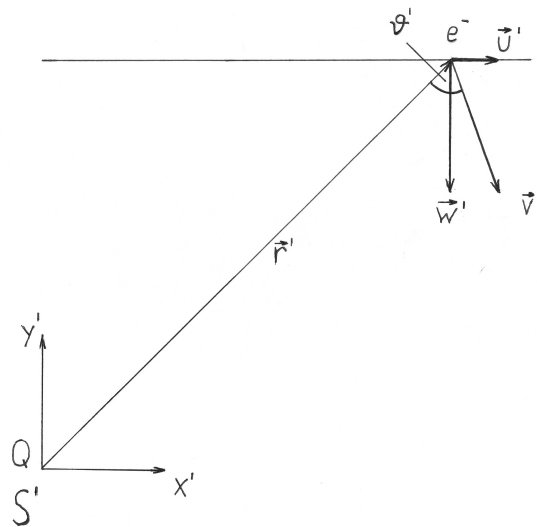


Abb. 3: Geschwindigkeitsvektoren eines Leiterelektrons

Diese Aufgabe löst man wohl am geschicktesten mit Hilfe eines Computerprogramms, wie später noch gezeigt werden soll. Zuvor müssen wir die Felder der einzelnen Punktladungen bestimmen. Diese sind nicht, wie man vielleicht denken möchte, der Gestalt:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} \quad (28)$$

Denn dies ist lediglich das elektrische Feld einer *ruhenden* Punktladung q ! Es unterscheidet sich vom Feld einer bewegten. Es gibt unterschiedliche Arten zu zeigen, wie das elektrische Feld einer bewegten Punktladung aussieht. Eine Möglichkeit wäre, die Maxwell-Gleichungen heranzuziehen, aus diesen die retardierten Potentiale zu berechnen und daraus dann das elektrische Feld. Diese Herleitung ist relativ aufwendig und zugleich auch unanschaulich. Es gibt dagegen eine zweite Herleitung über die Lorentztransformationen, welcher ich mich im Folgenden bedienen möchte.

Wir müssen zuallererst überhaupt der Frage nachgehen, wie sich elektrische Felder für zueinander bewegte Bezugssysteme in Relation verhalten. Dazu betrachten wir zunächst das Innere eines hinreichend großen Plattenkondensators mit der homogenen Flächenladungsdichte σ . Dieses Innere ist von einem elektrischen Feld der Form

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{y}} \quad (29)$$

erfüllt. Der Kondensator ist in unserem Fall so ausgerichtet, dass die Platten parallel zu der x-z-

Ebene stehen. Gehen wir nun der Frage nach, wie ein bewegter Beobachter dieses Feld wahrnehmen würde. Bewegt sich dieser Beobachter in y -Richtung und damit senkrecht auf die Platten des Kondensators, wird er dasselbe Feld wahrnehmen wie ein zum Kondensator ruhender Beobachter, das nämlich deshalb, weil er dieselbe Flächenladungsdichte wahrnimmt. Ganz im Gegensatz zu einem Beobachter, der sich parallel zu den Platten des Kondensators bewegt. Dieser beurteilt die Gesamtfläche der Kondensatorplatten um einen Faktor $1/\gamma$ kleiner. Das liegt daran, dass ihm jede Länge parallel zu seiner Bewegungsrichtung um genau diesen Faktor verkürzt erscheint. Das heißt, die Flächenladungsdichte erhält für einen Beobachter, der parallel zu den Kondensatorplatten bewegt ist, den Wert

$$\sigma' = \gamma \sigma. \quad (30)$$

Und damit nimmt ein parallel zu den Platten bewegter Beobachter auch das elektrische Feld anders wahr, nämlich

$$\mathbf{E}' = \frac{\gamma \sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{y}}. \quad (31)$$

Es folgt daraus für das elektrische Feld innerhalb des Kondensators, dass es unverändert erscheint, wenn man sich senkrecht zu den Kondensatorplatten bewegt, oder in Bezug auf das Feld selbst: Dass es unverändert erscheint, wenn man sich *parallel* zu den Feldlinien bewegt. Bewegt man sich jedoch parallel zu den Kondensatorplatten, also spricht *senkrecht* zu den Feldlinien beobachtet man ein um den Wert γ stärkeres Feld. Und somit gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \mathbf{E} \end{aligned} \quad (32)$$

Diese Erkenntnis ist wesentlich, wenn man das Feld einer bewegten Punktladung betrachten möchte, gilt sie nämlich für elektrische Felder allgemein. Bei der Punktladung ist es aber noch schwieriger, zumal auch die parallele Komponente verändert erscheint, das deshalb, weil das Feld einer Punktladung von r , dem Abstand zu der Ladung, abhängt. r wiederum ist aber vom Bezugssystem abhängig. Wir müssen daher eine Transformation finden, die unsere Koordinaten von r vom ruhenden Bezugssystem ins bewegte transformiert. Dies gelingt mit den so genannten Lorentztransformationen, wie sie aus der Speziellen Relativitätstheorie folgen:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned} \quad (33)$$

Genau genommen handelt es sich hier um die inversen Lorentztransformationen. Wir können

damit die Koordinaten von r , wie der Abstand zu der Punktladung in einem zu ihr ruhenden Bezugssystem beurteilt wird, in die Koordinaten von r' , dem Abstand für ein relativ zur Ladung bewegtes Bezugssystem, transformieren. Schreiben wir dafür Glg. (28) in ihren Komponenten aus:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ E_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{yq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (34)$$

Der Einfachheit halber legen wir die Richtung der Geschwindigkeit fest und sagen, die Punktladung bewege sich in x' -Richtung. Nun bekommen wir für das elektrische Feld der bewegten Punktladung:

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ E_y' &= \gamma E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma yq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ E_z' &= \gamma E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma zq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (35)$$

Wobei wir hier die Komponenten von E' noch immer in den Koordinaten von r ausgedrückt haben, dem Abstand wie er im Ruhesystem der Ladung erscheint. Mit Hilfe der inversen Lorentztransformationen wie in Glg. (33) können wir den Abstand nun ins relativ zur Ladung bewegte Bezugssystem transformieren. Der Abstand r' ist

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' + vt' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Mit Glg. (33) können wir daraus ablesen, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') = \gamma r_x' \\ y &= y' = r_y' \\ z &= z' = r_z' \end{aligned} \quad (37)$$

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit unsere Koordinatensysteme so wählen, dass sich die Punktladung q in der x' - y' -Ebene bewegt, sodass $z'=0$ gilt. In diesem Fall gibt es einen Winkel θ' , den r' mit der x' -Achse einschließt, für den gilt:

$$\begin{aligned} r_x' &= r' \cos(\theta') \\ r_y' &= r' \sin(\theta') \end{aligned} \quad (38)$$

Mit Glg. (37) und Glg. (38) können wir das Resultat in Glg. (35) nun in eine anschauliche Form

für das relativ zur Punktladung bewegte Bezugssystem bringen.

$$\begin{aligned}
 E' &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma q r'}{(\gamma^2 r'^2 \cos^2(\theta) + r'^2 \sin^2(\theta))^{3/2}} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-v^2/c^2)q}{(1-v^2 \sin^2(\theta)/c^2)^{3/2}} \frac{\hat{r}'}{r'^2}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Das ist das elektrische Feld einer bewegten Punktladung q .³ Wir können diese Beziehung nun für unsere Zwecke benutzen und kehren zurück zu unserem Ausgangsproblem, wo wir die zu einem Leiter senkrechte Bewegung einer Ladung Q untersuchen. Wie weiter oben definiert, soll sich Q im Ursprung unseres Koordinatensystems S' befinden. Des Weiteren definieren wir S als das Ruhesystem des Leiters. Nun wollen wir die Felder der Atomrümpfe und der Elektronen des Leiters berechnen. Wir beginnen ausnahmsweise mit dem schwierigeren Fall, nämlich mit dem der im Leiter bewegten Elektronen. Aus diesem Ergebnis wird es, wie sich zeigen soll, relativ einfach auf die Felder der Atomrümpfe zu kommen.

\mathbf{r}' sei der Ortsvektor des jeweiligen Elektrons, also (x',y',z') . Wobei z' nach unserer Koordinatensystemwahl null ist. Des Weiteren interessiert uns, wie wir \mathbf{r}' durch \mathbf{r} , dem Ortsvektor in S , darstellen können. Relevant ist das für uns, weil wir die Lorentzkraft auf die Ladung Q aus dem Ruhesystem des Leiters messen, also aus S . Es ist dabei aber gar nicht von Bedeutung welchen Ursprung S hat, von Bedeutung ist lediglich, wie sich die Längen in S zu denen in S' verhalten. Hierfür definieren wir, dass die Koordinatenachsen von S und S' parallel verlaufen und die beiden Bezugssysteme mit der Geschwindigkeit w in y -Richtung zueinander bewegt sind. Es folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 x' &= x \\
 y' &= y \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} = y/\gamma_w \\
 z' &= z
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Beachten müssen wir dabei, dass sich die Elektronen des Leiters in S mit der Geschwindigkeit u in x -Richtung bewegen. Das heißt, die Abstände zwischen den Leiterelektronen erscheinen gemäß

$$x = x_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = x_0/\gamma_u
 \tag{41}$$

kleiner, im Vergleich zu der Länge x_0 , die ein mit den Elektronen mitbewegter Beobachter eruieren würde. Die Geschwindigkeit u wiederum erscheint in S' um den Faktor $1/\gamma_w$ langsamer. Das heißt, für eine Transformation der x -Koordinate eines bewegten Leiterelektrons gilt:

³ Diese Herleitung ist größtenteils [1] entnommen, eine analoge findet sich aber auch in [3].

$$x' = x_0 / \gamma_{u'} = x_0 \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = x_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{\gamma_w^2 c^2}} = x_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2 w^2}{c^4}} \quad (42)$$

Wenn wir nun noch Glg. (41) nach x_0 umformen und in Glg. (42) einsetzen, bekommen wir letztlich:

$$x' = x \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2 w^2}{c^4}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = x \sqrt{1 + \frac{u^2 w^2}{c^4 - u^2 c^2}} \quad (43)$$

Damit erhalten wir für die Koordinaten unserer bewegten Leiterelektronen folgendes Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned} x' &= x \sqrt{1 + \frac{u^2 w^2}{c^4 - u^2 c^2}} \\ y' &= y \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} \\ z' &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Wir können aus diesem Ergebnis auch sofort die Koordinaten der positiven Atomrümpfe des Leiters ableiten, indem wir u einfach null setzen. Daraus erhielten wir wieder Glg. (40).

Um nun das elektrische Feld einer bewegten Ladung zu berechnen, bedarf es nicht nur der Kenntnis ihres momentanen Ortsvektors, sondern auch ihrer Geschwindigkeit und dem Winkel θ , den der Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor einschließen. In unserem Fall der bewegten Leiterelektronen gilt für die Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} u' \\ -w' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/\gamma_w \\ -w \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Den Winkel θ' , oder noch simpler $\sin^2 \theta'$, können wir aus dem Kreuzprodukt von \mathbf{r}' und \mathbf{v}' bestimmen. Es gilt allgemein:

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{v}'| = r' v' |\sin \theta'| \quad (46)$$

Diese Gleichung quadriert und umgeformt ergibt:

$$\sin^2 \theta' = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{v}'|^2}{r'^2 v'^2} \quad (47)$$

Worin wir Glg. (44) und Glg. (45) einsetzen können zu

$$\sin^2 \theta' = \frac{(w' x' + u' y')^2}{r'^2 v'^2}. \quad (48)$$

Damit können wir nun das elektrische Feld eines Leiterelektrons berechnen. Es folgt aus den

Glg. (39), (44) und (48):

$$\mathbf{E}_e' = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{w'^2 + u'^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{(w'x' + u'y')^2}{r'^2 c^2}\right)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \quad (49)$$

Für die Felder der Atomrümpfe brauchen wir u' in Glg. (49) nur null setzen, so dass wir zu folgendem Ergebnis für das Feld eines Atomrumpf-Ions gelangen:

$$\mathbf{E}_p' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{w'^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{w'^2 x'^2}{r'^2 c^2}\right)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \quad (50)$$

Die allgemein gültige Form von Glg. (39) lässt sich übrigens über Glg. (47) schreiben als

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{v}'|^2}{r'^2 c^2}\right)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \quad (51)$$

Mit Glg. (49) und Glg. (50) haben wir nun brauchbare Beziehungen gefunden, um das Feld des Leiters zu beschreiben, wie es ein Elektron erfährt, das sich senkrecht auf ihn zu bewegt. Der Nachteil liegt jedoch darin, dass wir nun jedes Feld einzeln berechnen müssen. Wir haben keine diskreten Linienladungsdichten mehr, mit denen wir den Leiter idealisieren können. Die Ursache für diese Schwierigkeit sehen wir in Glg. (39) bzw. in Glg. (51). Das Feld einer bewegten Punktladung hängt davon ab, unter welchem Winkel sie sich zum Beobachter bewegt. Das sehen wir am Kreuzprodukt von \mathbf{r}' und \mathbf{v}' . Solange wir uns parallel oder normal zum Leiter bewegen, mittelt sich diese Winkelabhängigkeit heraus, weil wir uns entlang einer Symmetrieachse des Feldes bewegen. Sobald aber ein Strom durch den Leiter fließt und wir uns normal zum Leiter bewegen, ist diese Symmetrie für die bewegten Elektronen nicht mehr gegeben. Daher ergibt sich keine homogene Ladungsdichte für die Leiterelektronen, die eine simple analytische Lösung des elektrischen Feldes ermöglichen. Um zu dem elektrischen Feld des Leiters zu gelangen, müssen wir über die Felder alle Leiterelektronen \mathbf{E}_e und die Felder aller Atomrümpfe \mathbf{E}_p summieren:

$$\mathbf{E}_{\text{Leiter}} \equiv \mathbf{E} = \sum_{i,j} \mathbf{E}_e(\mathbf{r}_i) + \mathbf{E}_p(\mathbf{r}_j) \quad (52)$$

Da man für eine ausreichend genaue Lösung über eine große Anzahl an Ladungen summieren muss, lösen wir dieses Problem mit Hilfe eines Computerprogramms.

Zuerst legen wir fest, mit wie vielen Ladungen wir den Leiter idealisieren. Um realistische

Begebenheiten darzustellen müssten wir mit mehr als 10^{25} Elektronen rechnen, plus derselben Anzahl an gleichgeladenen Atomrümpfen, eine Aufgabe, die selbst für schnellste Rechner nicht zu bewältigen ist. Um unsere Ergebnisse theoretisch zu überprüfen, reicht aber glücklicherweise eine deutlich geringere Anzahl an Ladungen aus. Wir können z.B. von $N=100000$ Elektronen und genauso vielen Atomrümpfen ausgehen, um unser Resultat zu verifizieren. Wir werden sehen, dass dies ausreicht.

Folge dessen definieren wir die Geschwindigkeitskomponenten u und w . Wir erinnern uns: w entspricht der Geschwindigkeit, mit der sich unsere Testladung Q auf den Leiter zu bewegt, u entspricht der Geschwindigkeit der Leiterelektronen, die quasi den fließenden Strom repräsentieren. Beide geben wir an, wie sie in S , also dem Ruhesystem des Leiters, wahrgenommen werden. Gleichzeitig definieren wir die Lichtgeschwindigkeit c . Typische Werte könnten z.B. sein:

$$\begin{aligned}c &= 1 \\w &= 0,1 \\u &= 10^{-7}\end{aligned}$$

Danach definieren wir den Abstand y , den die Ladung Q zu einem festen Zeitpunkt zum Leiter hat. y hat für alle Ladungen des Leiters denselben Wert, weil der Leiter per Vereinbarung normal auf die y -Achse unserer Koordinatensysteme steht, sowohl für S als auch für S' . Die x -Werte der Ladungen variieren, was bedeutet, dass wir sie iterieren müssen.

$$\begin{aligned}x_i &= -d(N/2 + i) \quad i=0, 1, \dots, N-1 \\y &= 10\end{aligned}$$

Hier haben wir die x_i so gewählt, dass der Leiter praktisch von der y -Achse halbiert wird. Zusätzlich führen wir den Parameter d ein, welcher ein Maß für die Abstände zwischen den einzelnen Ladungen des Leiters ist. Wir wählen $d=0,1$. Als nächstes transformieren wir die Komponenten x_i und y der Ortsvektoren \mathbf{r}_i und die Geschwindigkeiten u und w vom Bezugssystem S ins Bezugssystem S' . Dies gelingt mittels Glg. (44) und Glg. (45) zu

$$\begin{aligned}x' &= x \sqrt{1 + \frac{u^2 w^2}{c^4 - u^2 c^2}} \\y' &= y \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}\end{aligned} \tag{53}$$

und

$$\begin{aligned}w' &= w \\u' &= u / \gamma_w = u \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}.\end{aligned} \tag{54}$$

Damit kann der Computer über Glg. (49) und Glg. (50) die Felder der Elektronen \mathbf{E}_e' und der

Atomrümpfe E_p' berechnen und sie anschließend summieren. Als Ergebnis erwarten wir ein Gesamtfeld E' , welches rücktransformiert in das Bezugssystem S genau dieselbe Kraft auf die Ladung Q ausübt, wie das Magnetfeld nach Glg. (27).

Um das zu überprüfen benutzen wir eine einfache Beziehung und zwar das Verhältnis von magnetischer und elektrischer Kraftwirkung. Die elektrische Kraft, die eine bewegte Ladungsdichte auf eine ruhende Ladung ausübt, ist in einem konkreten Verhältnis zu der magnetischen Kraft, die diese Ladungsdichte auf eine bewegte Ladung ausübt. Das ist eine Folgerung aus der Relativitätstheorie, und gründet in dem Umstand, dass Ladungsdichten und deren Felder für zu einander bewegte Beobachter anders wahrgenommen werden. Es soll dies für unseren Fall demonstriert werden. Die bewegten Elektronen unseres zuvor besprochenen Leiters verursachen aus Sicht eines im Bezugssystem S ruhenden Beobachters sowohl ein magnetisches, als auch ein elektrisches Feld. Sagen wir, die Elektronen stellen eine Ladungsdichte λ dar, so verursachen sie damit auf eine Ladung Q die elektrische Kraft

$$F_E = \frac{Q \lambda}{2 \pi \epsilon_0 r} . \quad (55)$$

Da die Elektronen bewegt sind, umgibt sie auch ein Magnetfeld. Wenn wir sagen, die Elektronen haben die Geschwindigkeit u , und eine Ladung Q bewege sich senkrecht zu den magnetischen Feldlinien mit der Geschwindigkeit w , wie in unserem Beispiel oben, so wirkt auf Q die Lorentzkraft

$$F_L = Q w \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} = \frac{\mu_0 Q w \lambda u}{2 \pi r} . \quad (56)$$

Das Verhältnis von F_L zu F_E ergibt folglich:

$$\frac{F_L}{F_E} = \mu_0 \epsilon_0 u w = \frac{u w}{c^2} . \quad (57)$$

Dieses Verhältnis von magnetischer zu elektrischer Kraftwirkung muss immer gegeben sein. Damit haben wir eine einfache Möglichkeit um zu überprüfen, ob das elektrische Feld E' , das uns der Computer berechnet, auch tatsächlich der Lorentzkraft entspricht, wie wir sie im Bezugssystem S beobachten. Dazu brauchen wir nur das elektrische Feld der Elektronen berechnen, wie es in S wahrgenommen wird. Diese Berechnung lässt sich problemlos in unser Programm einbinden. Wir benutzen hierfür Glg. (49) und setzen darin $x'=x$, $y'=y$, $w'=0$ und $u'=u$, was uns zu dem Feld

$$E_e = - \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \frac{y^2}{r^2}\right)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (58)$$

bringt. Freilich müssen wir auch hier das Feld jeder Ladung einzeln berechnen lassen, und am Ende über alle Felder summieren.

Es sei das Ergebnis für unser Beispiel mit den obigen Randbedingungen angegeben. Der Computer berechnet:

$$\frac{F_L}{F_E} = -9.99996e-09$$

Das negative Vorzeichen rührt daher, weil F_L in die negative x-Richtung zeigt. Der exakte Wert beträgt gemäß Glg. (57):

$$\frac{F_L}{F_E} = -10^{-8}$$

Das mit dem Computer genäherte Ergebnis stimmt bis auf 0,0004% mit dem theoretischen überein. Angesichts dessen, dass wir kontinuierliche Ladungsdichten mit 10^5 Punktladungen idealisiert haben, ist dies eine sehr genaue Übereinstimmung. Wir haben damit die Lorentzkraft, die ein stromdurchflossener Leiter auf eine Ladung ausübt, die sich senkrecht auf ihn zu bewegt, auf die elektrischen Felder einzelner Punktladungen zurückgeführt. Wieder hat sich dabei gezeigt, dass dies aus dem Ruhesystem der Ladung Q so beobachtet wird. Das heißt, die Ladung Q , welche die Lorentzkraft erfährt, reagiert lediglich auf das elektrische Feld des Leiters, wie sie es in ihrem Bezugssystem wahrnimmt. Ein zum Leiter ruhender Beobachter nimmt dieses Feld anders wahr, ihm erscheint der Leiter neutral. Die Kraft, die die Ladung Q erfährt, interpretiert er als durch ein Magnetfeld verursacht.

Ein Elektron im homogenen Magnetfeld

Wir können die bisherigen Ausführungen auf eine elegante Weise überprüfen, indem wir die Bewegung eines Elektrons in einem konstanten, homogenen Magnetfeld untersuchen. Wie bekannt ist, vollzieht diese Bewegung einen Kreis, wenn die Abstrahlung der Ladung in Form von elektromagnetischen Wellen vernachlässigt werden kann, und das kann sie für Fälle, wo die Beschleunigung der Ladung gering ist. Wir werden im Folgenden einen solchen Fall betrachten.

Um die Kreisbewegung eines Elektrons auf ein elektrisches Feld zurückzuführen, müssen wir die Sachlage wieder aus dem Bezugssystem des Elektrons betrachten. Das eigentliche Problem, das es dabei zu lösen gilt, gründet in der Frage, wie das Magnetfeld entsteht. Ein homogenes Magnetfeld kann zum Beispiel im Inneren einer stromführenden Spule erreicht werden. Es kann aber auch zwischen zwei stromführenden Platten aufgebaut werden. Ähnlich wie ein geladener Plattenkondensator ein homogenes, elektrisches Feld in seinem Inneren verursacht, verursachen zwei Platten, die einen Strom in entgegengesetzte Richtung führen, ein homogenes, magnetisches Feld im Zwischenraum der Platten. Wir werden für unseren Fall diese Art wählen, ein solches Magnetfeld zu erzeugen. Das aus dem einfachen Grund, weil wir hierfür unsere oben angeführten Überlegungen benutzen können. Eine stromführende Platte, genauer gesagt: eine stromführende, ebene Fläche, können wir uns als Summe einzelner Linienströme bzw. Drähte denken, die nebeneinander gereiht sind. Wir werden uns diese Drähte wieder aus Punktladungen bestehend denken, und zwar analog wie oben aus Elektronen und Atomrümpfen. Um ihre elektrischen Felder zu berechnen, benutzen wir Glg. (51).

$$E' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{v}'|^2}{r'^2 c^2}\right)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}$$

Hierbei müssen wir lediglich noch die Ortsvektoren \mathbf{r}' und Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v}' definieren. Der Ortsvektor einer Punktladung sei über zwei Indizes i und j definiert, wobei i die einzelnen Ladungen eines Drahtes iteriert und j die Drähte selbst. Die Ortsvektoren \mathbf{r}_{ij} der ersten Platte seien folgendermaßen festgelegt:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= d(-L/2 + 0.5 + i) & i=0, 1, \dots, L-1 \\ y_{i,j} &= 1 \\ z_{i,j} &= a(-W/2 + 0.5 + j) & j=0, 1, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (59)$$

Wobei L die Länge der Platte in x -Richtung ist und W die Anzahl an Windungen von Drähten. Aus Symmetriegründen sollte L und W eine ungerade Zahl sein. Der Abstand einzelner Punktladungen wird über den Faktor d festgelegt, der Abstand der Drähte über a . Ich habe folgende Werte für diese Parameter gewählt:

$$\begin{aligned} L &= 1001 \\ d &= 0.566 \\ W &= 101 \\ a &= 1 \end{aligned} \quad (60)$$

Um zu einem genauen Ergebnis zu gelangen, sollte man für L und W deutlich größere Werte bevorzugen und dafür für d und a kleinere. Der Rechenaufwand wächst damit jedoch

beträchtlich, sodass selbst die Auswertung per Computer mühsam wird. Man kann diesem Problem begegnen, indem man den Wert für d und a anpasst, sodass man zu halbwegs schönen Ergebnissen gelangt. Das ist in diesem Fall auch so vollzogen worden, daher für d der Wert 0.566.

Die Ortsvektoren der zweiten Platte sind gleich festgelegt wie in Glg. (59), außer dass die y -Werte auf -1 gesetzt sind. Damit befindet sich unser Elektron zu Beginn genau in der Mitte der beiden Platten. Wichtig in Anbetracht von Glg. (59) ist, dass dies die Ortsvektoren \mathbf{r}_{ij} sind, also jene im Bezugssystem der Platten, und nicht die Ortsvektoren \mathbf{r}'_{ij} , wie sie im Bezugssystem unseres Elektrons erscheinen. Es ist entscheidend, dass wir vom Bezugssystem der Platten ausgehen und auch das Ergebnis in diesem darstellen, weil letztlich die Kreisbewegung dort beobachtet wird.

Bei den Geschwindigkeitsvektoren für die Punktladungen müssen wir zwischen den positiven Atomrümpfen und den negativen Elektronen unterscheiden. Die Elektronen vollziehen im Bezugssystem der Platten eine Bewegung parallel zur x -Achse. Sie stellen damit den elektrischen Strom dar. Wobei sich die Elektronen der ersten Platte mit der Geschwindigkeit u in die positive x -Richtung bewegen sollen und die Elektronen der zweiten Platte in die negative. Es ist wichtig, dass die Ströme in entgegengesetzte Richtung fließen, fließen sie nämlich in dieselbe, würden sich ihre Magnetfelder gegenseitig kompensieren. So aber verstärken sie sich, und garantieren ein homogenes Feld. Die Atomrümpfe ruhen im Bezugssystem der Platten. Ihr Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v}' definiert sich allein über die Bewegung des Elektrons. Wir wollen diese Bewegung mit dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{w} beschreiben. Für die Geschwindigkeitsvektoren der Atomrümpfe gilt damit:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

Für die Elektronen müssen wir ihre Geschwindigkeit in x -Richtung mit einbeziehen. Dabei gilt es das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten zu beachten. Wir dürfen nämlich nicht vergessen, dass unser Elektron relativ zur x - und y -Achse des Bezugssystems der Platten eine Geschwindigkeit aufweist, sowie die Leiterelektronen eine Geschwindigkeit zur x -Achse dieses Systems haben. Der Geschwindigkeitsvektor unseres Elektrons ist gegeben durch $\mathbf{w} = (w_x, w_y, 0)$, wobei allgemein gilt $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$, da dies die Relativbewegung unserer beiden Bezugssysteme – das der Platten und das des Elektrons – ist. Die Relativgeschwindigkeit zweier Systeme zueinander wird immer von beiden gleich beurteilt. Streng genommen ist dies eine Folge des Relativitätsprinzips. Der Geschwindigkeitsvektor der Elektronen der ersten Platte ist gegeben

durch $\mathbf{u}_1=(u, 0, 0)$, der der zweiten Platte durch $\mathbf{u}_2=(-u, 0, 0)$. Für die Geschwindigkeitsvektoren der Elektronen

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

gilt folgend dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten:

$$v'_x = \frac{u' - w_x}{1 - \frac{u' w_x}{c^2}} \quad (63a)$$

$$\begin{aligned} v'_y &= w_y \\ v'_y &= 0 \end{aligned} \quad (63b)$$

Wobei wichtig ist, dass in Glg. (63a)

$$u' = u/\gamma_y = u \sqrt{1 - w_y^2/c^2}$$

beachtet wird. Damit haben wir nun alles, um die Felder der Punktladungen zu berechnen. Ich habe dies in einem Computerprogramm getan. Man kann das Resultat leicht auf seine Plausibilität hin überprüfen, indem man z.B. dieselben Werte für w_x und w_y wählt.

Als Ergebnis erwarten wir hier für die x- und y-Komponente der resultierenden Kraft dieselben Werte mit umgekehrten Vorzeichen, weil die Kraftwirkung normal auf die Bewegungsrichtung stehen muss, damit wirklich eine Kreisbewegung entsteht. Ich habe als Demonstration folgende Werte gewählt:

$$\begin{aligned} u &= 3 \text{ m/s} \\ c &= 299792458 \text{ m/s} \\ w_x &= c/10 \\ w_y &= c/10 \end{aligned}$$

Der Anschaulichkeit halber sind sie dieses Mal in SI-Einheiten angegeben. Zusätzlich habe ich einen Strom $I=1\text{A}$ definiert.

Es mag widersprüchlich erscheinen einen Draht aus 2002 Punktladungen bestehend zu idealisieren und den Strom mit 3 m/s fließend und einem Ampere anzugeben. In der Tat wäre es ein physikalischer Widerspruch, wenn wir jede Punktladung mit der Elementarladung $e=1.602 \cdot 10^{-19}\text{C}$ gewichten. Diesen Widerspruch wollen wir übergehen, indem wir jede Punktladung Q definieren als $Q=I \cdot d/u$.

Damit erhalten wir ein Resultat, das in SI-Einheiten folgendermaßen aussieht:

$$\begin{aligned}
 E'_x &= -37.6937 \text{ V/m} \\
 E'_y &= 37.3319 \text{ V/m} \\
 E'_z &= 5.39956e-08 \text{ V/m}
 \end{aligned}$$

Dies ist das elektrische Feld, das unser Elektron in seinem Bezugssystem wahrnimmt. Wenn wir daraus die Kraft berechnen und sie ins Bezugssystem der Platten transformieren, bekommen wir:

$$\begin{aligned}
 F_x &= 6.00827e-18 \text{ N} \\
 F_y &= -6.01069e-18 \text{ N} \\
 F_z &= -8.65009e-27 \text{ N}
 \end{aligned} \tag{64}$$

Die x- und y-Komponente stimmen betragsmäßig auf 0.04% überein. Die z-Komponente war wie erwartet vernachlässigbar.

Der nächste Schritt besteht nun darin eine Bewegung aus der gegebenen Kraft zu simulieren. Das Ergebnis dieser Bewegung ist als Graphik dargestellt.

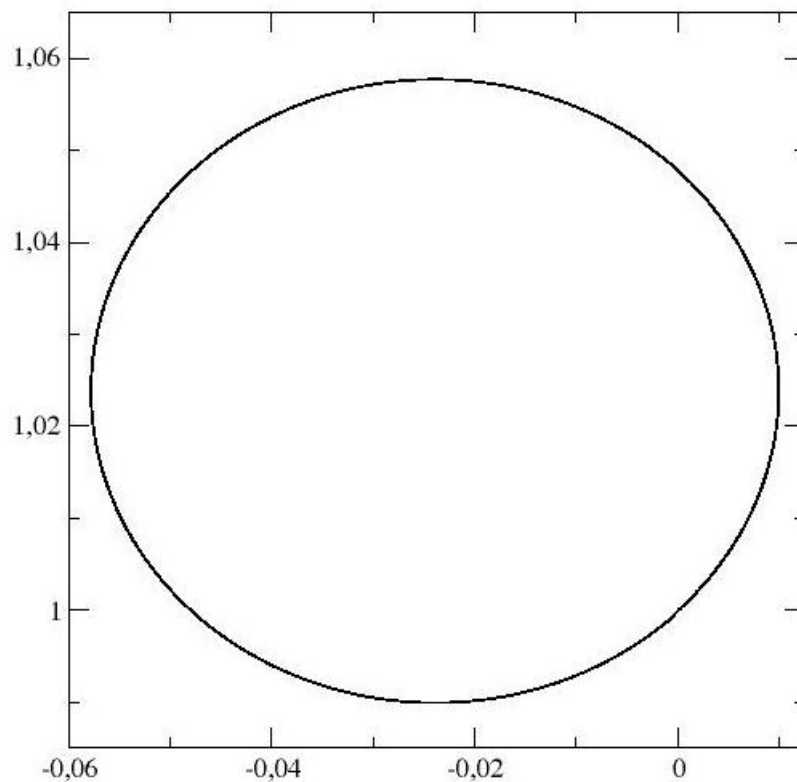


Abb. 4: *Bewegung eines Elektrons im homogenen Magnetfeld, dargestellt in der x-y-Ebene*

Wie erwartet vollzieht das Elektron eine Kreisbewegung. Wobei hier das Verhältnis von Ladung zu Masse mit 10^{12} gerundet und die Stromstärke auf 1000 Ampere gesetzt ist, damit der Kreis im

Vergleich zum Plattenabstand gering genug ist. Die übrigen Parameter sind analog wie oben gewählt. Zusätzlich zur Bewegung selbst seien noch die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y im Vergleich zur Gesamtgeschwindigkeit v dargestellt. (Siehe Abb. 5.)

Als Kriterium, dass das Resultat korrekt ist, gilt die Forderung, dass v konstant ist. Wäre v nicht konstant, würde das Elektron kinetische Energie verlieren oder gewinnen, was aber aufgrund unserer Einschränkung, dass wir die Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen ausschließen, und der Forderung von Energieerhaltung nicht geschehen darf. In unserem Fall schwankt v im Verlauf zweier vollständiger Kreisbewegungen um 0.067% von c . Diese Schwankung sehe ich in der beschränkten Genauigkeit des Programms und der geringen Anzahl an Punktladungen, die wir zur Berechnung heranziehen mussten, begründet.

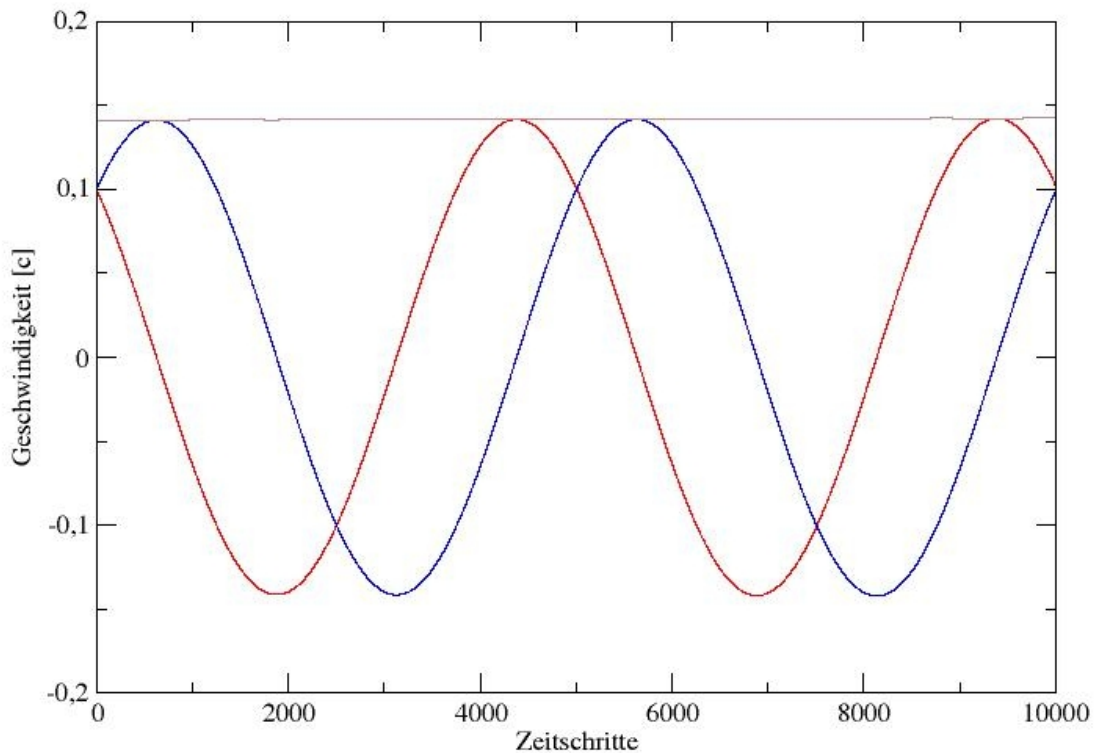


Abb. 5: Geschwindigkeitskomponenten des Elektrons im homogenen Magnetfeld
blau: v_x ; violett: v_y ; grau: v

Schlussbemerkung

Wie in dieser Arbeit für Fälle gleichförmig bewegter Ladungen und stationärer Ströme gezeigt wurde, kann die Wirkung eines magnetischen Feldes auf die Wirkung eines elektrischen Feldes zurückgeführt werden. Im Lehrbuch [3] findet sich hierzu folgende Aussage: „Das Magnetfeld eines Stromes und die Lorentzkraft auf eine bewegte Probeladung q im Magnetfeld lassen sich mithilfe der Relativitätstheorie allein aus dem Coulomb-Gesetz und den Lorentztransformationen herleiten. Das Magnetfeld ist also keine prinzipiell vom elektrischen Feld unabhängige Eigenschaft geladener Materie, sondern ist im Sinne der Relativitätstheorie eigentlich eine Änderung des elektrischen Feldes bewegter Ladungen infolge der Lorentz-Kontraktion. Man spricht daher vom elektromagnetischen Feld einer bewegten Ladung.“⁴

Angesichts der Beziehung (1)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

muss sogar jede Kraft auf eine Ladung in ihrem eigenen Bezugssystem allein auf ein elektrisches Feld zurückzuführen sein. Das muss, damit Glg. (1) dem Relativitätsprinzip gehorcht, deshalb geschehen, weil \mathbf{v} die Geschwindigkeit der Ladung relativ zum *Bezugssystem des Beobachters* ist, und als solche im Bezugssystem der Ladung verschwindet. Dem liegt zugrunde, dass ein Magnetfeld keine Wirkung auf eine ruhende Ladung hat. Da aber jede unbeschleunigte Ladung sich selbst als ruhend ansehen kann, erklärt sich gemäß dieser Perspektive jede Kraft auf die Ladung aus elektrischen Feldern. Wohlgedenkt können wir dies nur für unbeschleunigte Ladungen als uneingeschränkt gültig betrachten, weil nur dann das Relativitätsprinzip gilt und das Ruhesystem der Ladung als gleichberechtigt angesehen werden darf. Für eine beschleunigte Ladung lässt sich das Feld nicht einfach aus den Lorentz-Transformationen herleiten, wie dies im Fall gleichförmiger Bewegung möglich ist. Des Weiteren müssten wir für beschleunigte Ladungen der Kenntnis Geltung tragen, dass ihre eigenen Felder auf sie zurückwirken. Eine korrekte Beschreibung beschleunigter Bezugssysteme müsste meines Erachtens jedoch auch zu dem korrekten Feld einer beschleunigten Ladung führen, und zwar in der Art, dass sich jede magnetische Wirkung auf die Ladung als durch elektrische Felder verursacht erklärt. Eine solche Beschreibung hätte aber, ungeachtet der Frage, ob sie überhaupt sinnvoll ist, den Rahmen dieser Arbeit gesprengt.

4 Seite 108

Literatur

- [1] David J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics*, 3rd ed., ISBN 0-13-805326-X, 1999
- [2] John David Jackson *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., ISBN 0-471-30932-X, 1998
- [3] Wolfgang Demtröder *Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik*, 5. Auflage, ISBN 978-3-540-79294-9, 2009

Programm-Code (geschrieben in C++)

```
// Lorentzkraft einer Linienladungsdichte

#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

using namespace std;

double u=0.0000001;
double w=0.1;
const double c=1;
const int N=100001;
double d=0.1;
double x[N], y[N], a[N], b[N];
double Fx;
double Fy;
double Fa=0;
double Fb=0;
double Y=10;

int main() {

    int i;
    double uu; // = u'
    double fac=1, facw=1, facx=1, facu=1;

    ofstream out("output5.dat");

    facw=sqrt(1-w*w/(c*c));
    facu=sqrt(1-u*u/(c*c));
    facx=sqrt(1+(u*u*w*w)/(c*c*c*c-w*w*c*c));
    uu=u*facw;

    // -----
    // Dient der Berechnung von FE:

    for(i=0; i<N; i++){
        a[i]=(-N/2+i)*d;
        b[i] = Y;
    }

    Fa=0;
    Fb=0;

    for(i=0; i<N; i++){

        fac = 1/(4*3.1415*0.0000000001)*(1 - u*u/(c*c))/

            sqrt( (1 - (b[i]*u)*(b[i]*u)/(c*c*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i]))) *
                (1 - (b[i]*u)*(b[i]*u)/(c*c*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i]))) *
                (1 - (b[i]*u)*(b[i]*u)/(c*c*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i]))) ) *

            1/sqrt( (a[i]*a[i] + b[i]*b[i])*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i])*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i]) );

        Fa = Fa - fac*a[i];
        Fb = Fb - fac*b[i];
    }

    double Fa1, Fb1;

    Fa1=-Fa;
    Fb1=-Fb;

    // -----
    // Elektronen des Leiters:

    for(i=0; i<N; i++){

        x[i] = facx*(-N/2+i)*d;
        y[i] = Y*facw;
    }

    Fx=0;
    Fy=0;

    for(i=0; i<N; i++){
```

```

    fac = 1/(4*3.1415*0.00000000001)*(1 - (w*w + uu*uu)/(c*c))/

    sqrt( (1 - (x[i]*w + y[i]*uu)*(x[i]*w + y[i]*uu)/(c*c*(x[i]*x[i] + y[i]*y[i]))) *
          (1 - (x[i]*w + y[i]*uu)*(x[i]*w + y[i]*uu)/(c*c*(x[i]*x[i] + y[i]*y[i]))) *
          (1 - (x[i]*w + y[i]*uu)*(x[i]*w + y[i]*uu)/(c*c*(x[i]*x[i] + y[i]*y[i]))) ) *

    1/sqrt( (x[i]*x[i] + y[i]*y[i])*(x[i]*x[i] + y[i]*y[i])*(x[i]*x[i] + y[i]*y[i]) );

    Fx = Fx - fac*x[i];
    Fy = Fy - fac*y[i];
}

// -----
// Atomrümpfe des Leiters:

for(i=0; i<N; i++){

    a[i]=(-N/2+i)*d;
    b[i]=Y*facw;
}

Fa=0;
Fb=0;

for(i=0; i<N; i++){

    fac = 1/(4*3.1415*0.00000000001)*(1 - (w*w)/(c*c))/

    sqrt( (1 - (a[i]*w)*(a[i]*w)/(c*c*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i]))) *
          (1 - (a[i]*w)*(a[i]*w)/(c*c*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i]))) *
          (1 - (a[i]*w)*(a[i]*w)/(c*c*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i]))) ) *

    1/sqrt( (a[i]*a[i] + b[i]*b[i])*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i])*(a[i]*a[i] + b[i]*b[i]) );

    Fa = Fa + fac*a[i];
    Fb = Fb + fac*b[i];
}

cout<<endl;
cout<<"r="<<y[N/2]<<endl;
cout<<"u="<<u<<endl;
cout<<"w="<<w<<endl<<endl;

cout<<"Fx="<<(Fx+Fa)*facw<<endl;
cout<<"Fy="<<(Fy+Fb)<<endl;
cout<<endl;

cout<<"FB/FE="<<(Fx+Fa)*facw/Fb1<<endl;
cout<<"uv/c^2="<<-u*w/(c*c)<<endl<<endl;
cout<<"Fehler: " <<100-100*((Fx+Fa)*facw/Fb1)/(-u*w/(c*c))<<"%"<<endl;
cout<<endl;

return 0;
}

```

```

// Ein homogenes Magnetfeld (mit zwei stromdurchflossenen Platten)

#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

using namespace std;

double u=-0.0001;
double wx=0.1;
double wy=0.1;
const double c=1;
const int L=801;
double d=6.837;
double x, y, z;
double Fx, Fy, Fz;
double Y=10;

int main() {

    int i, j;
    double vx, vy;
    double uu; // = u'
    double fac=1, facx=1, facy=1, facwx=1, facu=1;

    ofstream out("output-kreis.dat");

    facwx = sqrt(1-wx*wx/(c*c));

    vy = wy;
    facy = sqrt(1-vy*vy/(c*c));

    uu = u*facy;
    facu = sqrt(1-uu*uu/(c*c));
    vx = (wx-uu)/(1-uu*wx/(c*c));
    facx = sqrt(1-vx*vx/(c*c));

// -----
// Erste Platte

Fx=0;
Fy=0;
Fz=0;

for(j=0; j<L; j++){
//cout<<j<<endl;
for(i=0; i<L; i++){

// Koordinaten bewegter Elektronen:
    x = facx*(-L/2+0.5+i)*d;
    y = Y*facy;
    z = (-L/2+0.5+j)*d;

// Feld bewegter Elektronen:
    fac = 1/(4*3.1415*0.0000000001)*(1 - (vx*vx + vy*vy)/(c*c))/

        sqrt( (1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
              (1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
              (1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z)))) *

        1/sqrt( (x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z) );

    Fx = Fx - fac*x;
    Fy = Fy - fac*y*facu;
    Fz = Fz - fac*z*facu;

// Koordinaten ruhender Atomrümpfe:
    x = facwx*(-L/2+0.5+i)*d;
    // y = Y*facy;
    // z = (-L/2+0.5+j)*d;

// Feld ruhender Atomrümpfe:
    fac = 1/(4*3.1415*0.0000000001)*(1 - (wx*wx + vy*vy)/(c*c))/

        sqrt( (1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
              (1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
              (1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z)))) *

        1/sqrt( (x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z) );
}
}

```

```

    Fx = Fx + fac*x;
    Fy = Fy + fac*y;
    Fz = Fz + fac*z;
}

// -----
// Zweite Platte:
    Y = -10;
    uu = -u*facy;
    vx = (wx-uu)/(1-uu*wx/(c*c));
    facx = sqrt(1-vx*vx/(c*c));

for(j=0; j<L; j++){
for(i=0; i<L; i++){

// Koordinaten bewegter Elektronen:
    x = facx*(-L/2+0.5+i)*d;
    y = Y*facy;
    z = (-L/2+0.5+j)*d;

// Feld bewegter Elektronen:
    fac = 1/(4*3.1415*0.0000000001)*(1 - (vx*vx + vy*vy)/(c*c))/

        sqrt( (1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
              (1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
              (1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z)))) *

        1/sqrt( (x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z) );

    Fx = Fx - fac*x;
    Fy = Fy - fac*y*facu;
    Fz = Fz - fac*z*facu;

// Koordinaten ruhender Atomrümpfe:
    x = facwx*(-L/2+0.5+i)*d;
    // y = Y*facy;
    // z = (-L/2+0.5+j)*d;

// Feld ruhender Atomrümpfe:
    fac = 1/(4*3.1415*0.0000000001)*(1 - (wx*wx + vy*vy)/(c*c))/

        sqrt( (1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
              (1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
              (1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z)))) *

        1/sqrt( (x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z) );

    Fx = Fx + fac*x;
    Fy = Fy + fac*y;
    Fz = Fz + fac*z;
}

cout<<endl<<endl;
cout<<"Fx = "<<Fx*facwx*facy<<endl;
cout<<"Fy = "<<Fy*facwx/facy<<endl;
cout<<"Fz = "<<Fz<<endl;
cout<<endl<<Fx*facy*facy/Fy<<endl<<endl;

return 0;
}

```

```

// Programm zur Simulation einer Kreisbewegung eines Elektrons

using namespace std;
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

double N=1100; // Zeitschritte
const double h=0.01;

double u=-0.0001;
double wx=0.1;
double wy=0.1;
const double c=1;

const int L=501;
double d=6.837;
double kraftfakt=0.00001;

double x, y, z;
double xx, yy;

double Fx, Fy, Fz;

double PAbstand=10; // halber Plattenabstand
double Y=10;

double saver[6];

void Kraft(double saver [6]);
void timestep(double saver[6]);

    int i, j;
    double vx, vy;
    double uu; // = u'
    double fac=1, facx=1, facy=1, facwx=1, facu=1;

ofstream outfile1("koordinaten1.dat");
ofstream outfile2("geschwindigkeit1.dat");
ofstream outfile3("sumgeschw1.dat");

int main() {

    saver[0]=0;
    saver[1]=Y;
    saver[2]=wx;
    saver[3]=wy;

    for(int n=0; n<N; n++){

        timestep(saver);

        cout<<n<<endl;
        outfile1<<saver[0]<<" " <<saver[1]<<endl;
        outfile2<<saver[2]<<" " <<saver[3]<<endl;
        outfile3<<sqrt(saver[2]*saver[2] + saver[3]*saver[3])<<endl;
    }

    outfile1.close();
    outfile2.close();
    outfile3.close();
    return 0;
}

// -----
// Kräfte berechnen:
// -----

void Kraft(double saver [6]){

Y=PAbstand - saver[1];
wx=saver[2];
wy=saver[3];

    facwx = sqrt(1-wx*wx/(c*c));

```



```

vy = wy;
facy = sqrt(1-vy*vy/(c*c));
uu = u*facy;
facu = sqrt(1-uu*uu/(c*c));
vx = (wx-uu)/(1-uu*wx/(c*c));
facx = sqrt(1-vx*vx/(c*c));

// -----
// Erste Platte

Fx=0;
Fy=0;
Fz=0;

for(j=0; j<L; j++){
for(i=0; i<L; i++){

// Koordinaten bewegter Elektronen:
x = facx*(-L/2+0.5+i)*d;
y = Y*facy;
z = (-L/2+0.5+j)*d;

// Feld bewegter Elektronen:
fac = 1/(4*3.1415*0.00000000001)*(1 - (vx*vx + vy*vy)/(c*c))/

sqrt( (1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
(1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
(1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z)))) *

1/sqrt( (x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z) );

Fx = Fx - fac*x;
Fy = Fy - fac*y*facu;
Fz = Fz - fac*z*facu;

// Koordinaten ruhender Atomrümpfe:
x = facwx*(-L/2+0.5+i)*d;
// y = Y*facy;
z = (-L/2+0.5+j)*d;

// Feld ruhender Atomrümpfe:
fac = 1/(4*3.1415*0.00000000001)*(1 - (wx*wx + vy*vy)/(c*c))/

sqrt( (1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
(1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
(1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z)))) *

1/sqrt( (x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z) );

Fx = Fx + fac*x;
Fy = Fy + fac*y;
Fz = Fz + fac*z;

}}

// -----
// Zweite Platte:
Y = -10;
uu = -u*facy;
vx = (wx-uu)/(1-uu*wx/(c*c));
facx = sqrt(1-vx*vx/(c*c));

for(j=0; j<L; j++){
for(i=0; i<L; i++){

// Koordinaten bewegter Elektronen:
x = facx*(-L/2+0.5+i)*d;
y = Y*facy;
z = (-L/2+0.5+j)*d;

// Feld bewegter Elektronen:
fac = 1/(4*3.1415*0.00000000001)*(1 - (vx*vx + vy*vy)/(c*c))/

sqrt( (1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
(1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
(1 - ((x*vy - y*vx)*(x*vy - y*vx) + z*z*(vx*vx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z)))) *

```

```

1/sqrt( (x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z) );

Fx = Fx - fac*x;
Fy = Fy - fac*y*facu;
Fz = Fz - fac*z*facu;

// Koordinaten ruhender Atomrümpfe:
x = facwx*(-L/2+0.5+i)*d;
// y = Y*facy;
// z = (-L/2+0.5+j)*d;

// Feld ruhender Atomrümpfe:
fac = 1/(4*3.1415*0.0000000001)*(1 - (wx*wx + vy*vy)/(c*c))/

sqrt( (1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
(1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z))) *
(1 - ((x*vy - y*wx)*(x*vy - y*wx) + z*z*(wx*wx+vy*vy))/(c*c*(x*x + y*y + z*z)))) *

1/sqrt( (x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z)*(x*x + y*y + z*z) );

Fx = Fx + fac*x;
Fy = Fy + fac*y;
Fz = Fz + fac*z;

}}
saver[4]=Fx*facwx*facy;
saver[5]=Fy*facwx/facy;
}

// -----
// Zeitentwicklung:

void timestep(double saver[6]){

Kraft(saver);
Fx=kraftfakt*saver[4];
Fy=kraftfakt*saver[5];

xx=saver[0];
yy=saver[1];
wx=saver[2];
wy=saver[3];

xx = xx + h*wx + (h*h/2)*Fx;
yy = yy + h*wy + (h*h/2)*Fy;

wx = wx + (h/2)*(Fx + Fx);
wy = wy + (h/2)*(Fy + Fy);

saver[0]=xx;
saver[1]=yy;
saver[2]=wx;
saver[3]=wy;
}

```