

NICHTGLATTE ANALYSIS UND OPTIMIERUNG

VORLESUNGSSKRIPT, SOMMERSEMESTER 2017

Christian Clason

Stand vom 27. Juli 2017

Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen

INHALTSVERZEICHNIS

I GRUNDLAGEN

- 1 GRUNDLAGEN DER FUNKTIONALANALYSIS 4
 - 1.1 Normierte Räume 4
 - 1.2 Starke und schwache Konvergenz 6
 - 1.3 Hilberträume 12
- 2 GRUNDLAGEN DER VARIATIONSRECHNUNG 13
 - 2.1 Direkte Methode der Variationsrechnung 13
 - 2.2 Differenzierbarkeit in Banachräumen 17
 - 2.3 Superpositionsoperatoren 20

II KONVEXE ANALYSIS

- 3 KONVEXE FUNKTIONEN 24
- 4 DAS KONVEXE SUBDIFFERENTIAL 32
- 5 FENCHEL-DUALITÄT 41
- 6 MONOTONE OPERATOREN UND PROXIMALPUNKTE 48
 - 6.1 Monotone Operatoren 48
 - 6.2 Resolventen und Proximalpunkte 52
 - 6.3 Moreau–Yosida-Regularisierung 58
- 7 PROXIMALPUNKT- UND SPLITTING-VERFAHREN 63
 - 7.1 Proximalpunkt-Verfahren 63
 - 7.2 Explizites Splitting 65
 - 7.3 Implizites Splitting 69
 - 7.4 Primal-duale Verfahren 70

III LIPSCHITZ-ANALYSIS

8 DAS CLARKE-SUBDIFFERENTIAL 75

9 SEMIGLATTE NEWTON-VERFAHREN 87

ÜBERBLICK

Die Optimierung beschäftigt sich mit Minimierungsproblemen der Form

$$\min_{x \in U} F(x)$$

für eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Konkret fragt man sich:

1. Hat dieses Problem eine Lösung, d. h. existiert ein $\bar{x} \in U$ mit

$$F(\bar{x}) \leq F(x) \quad \text{für alle } x \in U?$$

2. Gibt es eine intrinsische Charakterisierung von \bar{x} , d. h. ohne Vergleich mit allen anderen $x \in U$?
3. Wie kann dieses \bar{x} (effizient) berechnet werden?

Für $U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich das Vorgehen wie folgt skizzieren:

1. Ist U kompakt und ist F stetig, so nimmt die Funktion F nach dem Satz von Weierstraß ihr Minimum in $\bar{x} \in U$ an.
2. Ist F differenzierbar, so gilt das *Fermat-Prinzip*

$$0 = F'(\bar{x}).$$

3. Ist F stetig differenzierbar und U offen, so kann man Gradientenverfahren verwenden: Wähle x^0 und setze für $k = 1, \dots$

$$x^{k+1} = x^k - t_k F'(x^k)$$

mit geeigneter Schrittweite t_k , dann gilt $x^k \rightarrow \bar{x}$ für $k \rightarrow \infty$.

Ist F sogar zweimal stetig differenzierbar, kann man das Newton-Verfahren für die Nullstelle von F' anwenden: Wähle x^0 geeignet und setze für $k = 1, \dots$

$$x^{k+1} = x^k - F''(x^k)^{-1} F'(x^k).$$

Nun gibt es zahlreiche praktisch relevante Funktionen, die *nicht* differenzierbar sind, wie etwa die Betrags- oder die Maximumsfunktion. In der nichtglatten Analysis sucht man daher nach verallgemeinerten Ableitungsbegriffen, die auch für solche Funktionen das obige Vorgehen erlauben und gleichzeitig genug Rechenregeln zulassen, um für eine große Klasse von Funktionen explizit angegeben werden können. In dieser Vorlesung konzentrieren wir uns auf die beiden Klassen

- i) der konvexen Funktionen und
- ii) der lokal Lipschitz-stetigen Funktionen,

die zusammen ein breites Spektrum an Anwendungen abdecken. Insbesondere bieten erstere eine Grundlage für verallgemeinerte Gradientenverfahren, letztere für verallgemeinerte Newton-Verfahren.

Als weiterer Schwerpunkt wird die Optimierung hier in *unendlichdimensionalen* Funktionenräumen betrachtet; die gesuchten Minimierer sind also Funktionen. Dadurch können die gewonnenen Resultate auf Probleme aus der Optimalsteuerung von Differentialgleichungen und der mathematischen Bildverarbeitung angewendet werden; insbesondere sind die vorgestellten Verfahren *diskretisierungsunabhängig*, können also auf jede (vernünftige) endlichdimensionale Approximation angewendet werden, ohne dass die Feinheit der Diskretisierung eine Rolle spielt.

Dieses Skriptum basiert vor allem auf den folgenden Werken:

- [1] H. H. BAUSCHKE & P. L. COMBETTES (2017), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2. Aufl., CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, New York: Springer, DOI: [10.1007/978-3-319-48311-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-48311-5)
- [2] M. BROKATE (2014), *Konvexe Analysis und Evolutionsprobleme*, Vorlesungsskript, Zentrum Mathematik, TU München, URL: http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/cev_ss14.pdf
- [3] F. CLARKE (2013), *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, London: Springer, DOI: [10.1007/978-1-4471-4820-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3)
- [4] A. SCHIELA (2008), A simplified approach to semismooth Newton methods in function space, *SIAM J. Opt.* 19(3), 1417–1432, DOI: [10.1137/060674375](https://doi.org/10.1137/060674375)
- [5] W. SCHIROTZEK (2007), *Nonsmooth Analysis*, Universitext, Berlin: Springer, DOI: [10.1007/978-3-540-71333-3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71333-3)
- [6] M. ULBRICH (2011), *Semismooth Newton Methods for Variational Inequalities and Constrained Optimization Problems in Function Spaces*, Bd. 11, MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia, PA: SIAM, DOI: [10.1137/1.9781611970692](https://doi.org/10.1137/1.9781611970692)

Teil I
GRUNDLAGEN

1 GRUNDLAGEN DER FUNKTIONALANALYSIS

In diesem Kapitel stellen wir die für diese Vorlesung wesentlichen Begriffe, Notationen und Resultate zusammen. Für Beweise wird auf die Standardliteratur verwiesen, z. B. auf [Werner 2011], sowie auf [Clason 2015].

1.1 NORMIERTE RÄUME

Im Folgenden bezeichne X ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} , wobei wir uns hier stets auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ heißt *Norm* (auf X), falls für alle $x \in X$ gilt

- (i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$,
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $y \in X$,
- (iii) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0 \in X$.

Beispiel 1.1. (i) Auf $X = \mathbb{R}^N$ werden Normen definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |x_i|.$$

- (ii) Auf $X = \ell^p$ (dem Raum der reellen Folgen, auf dem folgende Ausdrücke endlich sind) sind Normen definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, \infty} |x_i|.$$

(iii) Auf $X = L^p(\Omega)$ (dem Raum der messbaren reellen Funktionen auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, auf dem folgende Ausdrücke endlich sind) sind Normen definiert durch

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

(iv) Auf $X = C(\overline{\Omega})$ (dem Raum der stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$) ist eine Norm definiert durch

$$\|u\|_C = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Eine analoge Norm ist auf $X = C_0(\Omega)$ (dem Raum der stetigen Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger) definiert, wenn das Supremum nur über $x \in \Omega$ genommen wird.

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X , so bezeichnet man das Paar $(X, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum*, und schreibt in diesem Fall oft $\|\cdot\|_X$. Ist die Norm kanonisch (etwa in [Beispiel 1.1](#) (ii)–(iv)), so wird sie oft weggelassen.

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen *äquivalent* auf X , falls $c_1, c_2 > 0$ existieren mit

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Ist X endlichdimensional, so sind alle Normen auf X äquivalent. Die Konstanten c_1, c_2 hängen dann jedoch von der Dimension N von X ab; die Vermeidung solcher dimensionsabhängiger Konstanten ist einer der Gründe, warum wir Optimierung in unendlichdimensionalen Funktionenräumen betreiben wollen.

Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume mit $X \subset Y$, so heißt X *stetig eingebettet* in Y , geschrieben $X \hookrightarrow Y$, falls ein $C > 0$ existiert mit

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Wir betrachten nun Abbildungen zwischen normierten Räumen. Seien im Folgenden stets $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $U \subset X$, und $F : U \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir bezeichnen mit

- $\operatorname{dom} F := U$ den *Definitionsbereich* (englisch „domain“) von F ;
- $\operatorname{ker} F := \{x \in U : F(x) = 0\}$ den *Kern* (englisch „kernel“ oder „null space“) von F ;
- $\operatorname{ran} F := \{F(x) \in Y : x \in U\}$ das *Bild* (englisch „range“) von F ;
- $\operatorname{graph} F := \{(x, y) \in X \times Y : y = F(x)\}$ den *Graph* von F .

Wir sagen, F ist

- *stetig* in $x \in U$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|F(x) - F(z)\|_Y \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in U \text{ mit } \|x - z\|_X \leq \delta;$$

- *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L > 0$ (genannt *Lipschitz-Konstante*) existiert mit

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y \leq L\|x_1 - x_2\|_X \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in U.$$

- *lokal Lipschitz-stetig* in $x \in U$, wenn ein $\delta > 0$ und ein $L = L(x, \delta) > 0$ existiert mit

$$\|F(x) - F(z)\|_Y \leq L\|x - z\|_X \quad \text{für alle } z \in U \text{ mit } \|x - z\|_X \leq \delta.$$

Ist $T : X \rightarrow Y$ linear, so ist die Stetigkeit äquivalent zu der Bedingung, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Stetige lineare Abbildungen nennt man daher auch *beschränkt*; man spricht auch von einem beschränkten linearen *Operator*. Der Raum $L(X, Y)$ der beschränkten linearen Operatoren ist ein normierter Raum versehen mit der *Operatornorm*

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$$

(die gleich der kleinstmöglichen Konstante C in der Definition der Stetigkeit ist). Ist $T \in L(X, Y)$ bijektiv, dann ist die Inverse $T^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig genau dann, wenn ein $c > 0$ existiert mit

$$c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \quad \text{für alle } x \in X.$$

In diesem Fall ist $\|T^{-1}\|_{L(Y,X)} = c^{-1}$ für die größtmögliche Wahl von c .

1.2 STARKE UND SCHWACHE KONVERGENZ

Eine Norm vermittelt auf direkte Weise einen Konvergenzbegriff, die sogenannte *starke Konvergenz*: Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ konvergiert (stark in X) gegen ein $x \in X$, geschrieben $x_n \rightarrow x$, wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0.$$

Eine Teilmenge $U \subset X$ nennen wir

- *abgeschlossen*, falls für jede konvergente Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ auch der Grenzwert $x \in U$ liegt;

- *kompakt*, falls jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt, deren Grenzwert $x \in U$ liegt.

Eine Abbildung $F : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn aus $x_n \rightarrow x$ auch $F(x_n) \rightarrow F(x)$ folgt, und *abgeschlossen*, wenn für $x_n \rightarrow x$ und $F(x_n) \rightarrow y$ folgt, dass $F(x) = y$ ist (also $\text{graph } F$ eine abgeschlossene Menge ist).

Weiterhin definieren wir für späteren Gebrauch für $x \in X$ und $r > 0$

- die *offene Kugel* $O_r(x) := \{z \in X : \|x - z\|_X < r\}$ und
- die *abgeschlossene Kugel* $K_r(x) := \{z \in X : \|x - z\|_X \leq r\}$.

Die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius 1 bezeichnet man auch als *Einheitskugel* B_X (englisch „unit ball“). Eine Menge $U \subset X$ heißt

- *offen*, falls für alle $x \in U$ ein $r > 0$ existiert mit $O_r(x) \subset U$ (d. h. alle $x \in U$ *innere Punkte* von U sind, deren Menge wir als *Inneres* U° bezeichnen);
- *beschränkt*, falls sie in einer abgeschlossenen Kugel $K_r(0)$ für ein $r > 0$ enthalten ist;
- *konvex*, falls für $x, y \in U$ auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt.

In normierten Räumen gilt, dass das Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist und umgekehrt (d. h. die abgeschlossenen Mengen im Sinne der Topologie sind genau die (Folgen-)abgeschlossenen Mengen im Sinne unserer Definition). Sowohl offene als auch abgeschlossene Kugeln sind wegen der Norm-Axiome konvex.

Ein normierter Raum X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert; man nennt X dann auch *Banachraum*. Alle Räume in [Beispiel 1.1](#) sind Banachräume. Ebenso ist $L(X, Y)$, versehen mit der Operatornorm, ein Banachraum, wenn Y ein Banachraum ist. Für konvexe Teilmengen von Banachräumen gilt folgende nützliche Eigenschaft, die auf dem Satz von Baire beruht.

Lemma 1.2. *Sei X ein Banachraum und $U \subset X$ abgeschlossen und konvex. Dann gilt*

$$U^\circ = \{x \in U : \text{für alle } h \in X \text{ existiert } \delta > 0 \text{ mit } x + th \in U \text{ für alle } t \in [0, \delta]\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite wird auch als *algebraisches Inneres* oder englisch „core“ bezeichnet, weshalb [Lemma 1.2](#) auch manchmal „core-int-Lemma“ genannt wird.

Von wesentlicher Bedeutung wird für uns der Spezialfall $Y = \mathbb{R}$ sein, das heißt der Raum $L(X, \mathbb{R})$ der *linearen stetigen Funktionale* auf X . In diesem Fall bezeichnet man $X^* := L(X, \mathbb{R})$ als *Dualraum* von X . Ist $x^* \in X^*$, so schreibt man auch

$$\langle x^*, x \rangle_X := x^*(x) \in \mathbb{R}.$$

Diese *duale Paarung* soll andeuten, dass man auch x auf x^* wirkend auffassen kann, was später wichtig sein wird. Aus der Definition der Operatornorm folgt sofort, dass

$$(1.1) \quad \langle x^*, x \rangle_X \leq \|x^*\|_{X^*} \|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X, x^* \in X^*.$$

In vielen Fällen kann der Dualraum eines Banachraums mit einem bekannten Banachraum identifiziert werden.

Beispiel 1.3. (i) $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)^* \cong (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_q)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, wobei $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$ gesetzt wird. Die duale Paarung ist gegeben durch

$$\langle x^*, x \rangle_p = \sum_{i=1}^N x_i^* x_i.$$

(ii) $(\ell^p)^* \cong (\ell^q)$ für $1 < p < \infty$. Die duale Paarung ist gegeben durch

$$\langle x^*, x \rangle_p = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* x_i.$$

Darüber hinaus ist $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, aber $(\ell^\infty)^*$ ist selber kein Folgenraum.

(iii) Ebenso ist $L^p(\Omega)^* \cong L^q(\Omega)$ für $1 < p < \infty$. Die duale Paarung ist gegeben durch

$$\langle u^*, u \rangle_p = \int_{\Omega} u^*(x)u(x) dx.$$

Es gilt auch $L^1(\Omega)^* \cong L^\infty(\Omega)$, aber $L^\infty(\Omega)^*$ ist selber kein Funktionenraum.

(iv) $C_0(\Omega)^* \cong \mathcal{M}(\Omega)$, dem Raum der *Radon-Maße*; er enthält unter anderem das Lebesgue-Maß, aber auch Dirac-Maße δ_x für $x \in \Omega$, definiert durch $\delta_x(u) = u(x)$ für $u \in C_0(\Omega)$. Die duale Paarung ist gegeben durch

$$\langle u^*, u \rangle_C = \int_{\Omega} u(x) du^*.$$

Ein zentrales Resultat über Dualräume ist der Satz von Hahn–Banach, auf dem viele der folgenden Aussagen beruhen. Es gibt von ihm eine algebraische und eine geometrische Version.

Satz 1.4 (Hahn–Banach, algebraisch). *Sei X ein normierter Raum. Zu jedem $x \in X$ existiert ein $x^* \in X^*$ mit*

$$\|x^*\|_{X^*} = 1 \quad \text{und} \quad \langle x^*, x \rangle_X = \|x\|_X.$$

Satz 1.5 (Hahn–Banach, geometrisch). *Seien X ein normierter Raum und $A, B \subset X$ konvex, nichtleer und disjunkt.*

(i) *Ist A offen, dann existiert ein $x^* \in X^*$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\langle x^*, x_1 \rangle_X < \lambda \leq \langle x^*, x_2 \rangle_X \quad \text{für alle } x_1 \in A, x_2 \in B.$$

(ii) *Ist A abgeschlossen und B kompakt, dann existiert ein $x^* \in X^*$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\langle x^*, x_1 \rangle_X \leq \lambda < \langle x^*, x_2 \rangle_X \quad \text{für alle } x_1 \in A, x_2 \in B.$$

Insbesondere die geometrische Version – auch als *Trennungssätze* bekannt – ist von zentraler Bedeutung für die konvexe Analysis; wir benötigen sie auch in der folgenden Variante, die als *Satz von Eidelheit* bekannt ist.

Folgerung 1.6. *Seien X ein normierter Raum und $A, B \subset X$ konvex und nichtleer. Ist die Menge A° der inneren Punkte von A nichtleer und disjunkt zu B , dann existiert ein $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\langle x^*, x_1 \rangle_X \leq \lambda \leq \langle x^*, x_2 \rangle_X \quad \text{für alle } x_1 \in A, x_2 \in B.$$

Beweis. Satz 1.5 (i) liefert die Existenz von x^* und λ , so dass die Aussage gilt für alle $x_1 \in A^\circ$ (sogar mit strikter Ungleichung, woraus auch $x^* \neq 0$ folgt). Es bleibt also zu zeigen, dass $\langle x^*, x \rangle_X \leq \lambda$ auch für $x \in A \setminus A^\circ$ gilt. Da A° nichtleer ist, existiert ein $x_0 \in A^\circ$, d. h. es existiert $r > 0$ mit $O_r(x_0) \subset A$. Aus der Konvexität von A folgt dann, dass für alle $t \in [0, 1]$ und $\tilde{x} \in O_r(x_0)$ auch $t\tilde{x} + (1-t)x \in A$ ist. Damit ist

$$tO_r(x_0) + (1-t)x = O_{tr}(tx_0 + (1-t)x) \subset A,$$

und insbesondere gilt $x(t) := tx_0 + (1-t)x \in A^\circ$ für alle $t \in (0, 1)$.

Wir finden also eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A^\circ$ (zum Beispiel $x_n = x(n^{-1})$) mit $x_n \rightarrow x$. Aus der Stetigkeit von $x^* \in X = L(X, \mathbb{R})$ folgt mit Grenzübergang dann

$$\langle x^*, x \rangle_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^*, x_n \rangle_X \leq \lambda. \quad \square$$

Ein normierter Raum wird also in gewisser Weise durch seinen Dualraum charakterisiert. Als direkte Folgerung von Satz 1.4 erhalten wir, dass die Norm in einem Banachraum als Operatornorm dargestellt werden kann.

Folgerung 1.7. *Sei X ein Banachraum. Dann gilt für alle $x \in X$*

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |\langle x^*, x \rangle_X|,$$

und das Supremum wird angenommen.

Ein $x \in X$ können wir also auch als lineares und wegen (1.1) stetiges Funktional auf X^* auffassen, also als Element im *Bidualraum* $X^{**} := (X^*)^*$. Die Einbettung $X \subset X^{**}$ wird dabei vermittelt durch die *kanonische Injektion*

$$J : X \rightarrow X^{**}, \quad \langle Jx, x^* \rangle_{X^{**}} := \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x^* \in X^*.$$

Offensichtlich ist J linear; aus Satz 1.4 folgt weiterhin $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. Ist die kanonische Injektion surjektiv – können wir also X^{**} mit X identifizieren – so nennt man X *reflexiv*. Endlichdimensionale Räume sind reflexiv, sowie Beispiel 1.1 (ii) und (iii) für $1 < p < \infty$, nicht aber ℓ^1 , ℓ^∞ , und $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ sowie $C(\overline{\Omega})$.

Durch die duale Paarung werden weitere Konvergenzbegriffe erzeugt: die *schwache* Konvergenz auf X sowie die *schwach-** Konvergenz auf X^* .

- (i) Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ konvergiert schwach (in X) gegen $x \in X$, geschrieben $x_n \rightharpoonup x$, falls

$$\langle x^*, x_n \rangle_X \rightarrow \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x^* \in X^*.$$

- (ii) Eine Folge $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ konvergiert schwach-* (in X^*) gegen $x^* \in X^*$, geschrieben $x_n^* \rightharpoonup^* x^*$, falls

$$\langle x_n^*, x \rangle_X \rightarrow \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die schwache Konvergenz verallgemeinert den Begriff der komponentenweisen Konvergenz in \mathbb{R}^n , der – wie aus dem Beweis des Satzes von Heine–Borel ersichtlich ist – im Kontext der Kompaktheit der wesentliche ist. Aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz; ebenso folgt aus Konvergenz in der Operatornorm (auch *punktweise Konvergenz* genannt) die schwach-* Konvergenz. Ist X reflexiv, so stimmen schwache und schwach-* Konvergenz (beide in $X = X^{**}$!) überein. In endlichdimensionalen Räumen stimmen alle Konvergenzbegriffe überein.

Konvergiert $x_n \rightarrow x$ und $x_n^* \rightharpoonup^* x^*$ oder $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n^* \rightarrow x^*$, so gilt $\langle x_n^*, x_n \rangle_X \rightarrow \langle x^*, x \rangle_X$. Das duale Produkt aus schwach(-*) konvergenten Folgen konvergiert aber in der Regel nicht!

Analog zur starken Konvergenz definiert man nun schwache(-*) Stetigkeit und Abgeschlossenheit von Abbildungen sowie schwache(-*) Abgeschlossenheit und Kompaktheit von Mengen. Letztere Eigenschaft wird für uns wesentlich sein; ihre Charakterisierung ist daher ein zentrales Resultat dieses Kapitels.

Satz 1.8 (Eberlein–Šmuljan). *Sei X ein normierter Raum. Dann ist B_X schwach kompakt genau dann, wenn X reflexiv ist.*

In einem reflexiven Raum sind also insbesondere alle beschränkten und schwach abgeschlossenen Mengen schwach kompakt. Beachten Sie, dass schwache Abgeschlossenheit eine *stärkere* Forderung ist als Abgeschlossenheit. Für konvexe Mengen stimmen die Begriffe aber überein.

Lemma 1.9. *Eine konvexe Menge $U \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist.*

Beweis. Da eine konvergente Folge stets auch schwach konvergiert, ist jede schwach abgeschlossene Menge auch abgeschlossen. Sei daher $U \subset X$ konvex, abgeschlossen, und nichtleer (sonst ist nichts zu zeigen), und betrachte eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $x_n \rightarrow x \in X$. Angenommen, $x \in X \setminus U$. Dann erfüllen die Mengen U und $\{x\}$ die Bedingungen von [Satz 1.5](#) (ii); wir finden daher ein $x^* \in X^*$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle x^*, x_n \rangle_X \leq \lambda < \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in der ersten Ungleichung ergibt dann aber den Widerspruch

$$\langle x^*, x \rangle_X < \langle x^*, x \rangle_X. \quad \square$$

Ist X nicht reflexiv (wie z. B. $L^\infty(\Omega)$), so müssen wir auf die schwach-* Konvergenz ausweichen.

Satz 1.10 (Banach–Alaoglu). *Ist der normierte Raum X separabel (d. h. es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge), so ist B_{X^*} schwach-* kompakt.*

Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz sind $C(\overline{\Omega})$ und $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ separabel; auch ℓ^p ist separabel für $1 \leq p < \infty$. Also sind beschränkte und schwach-* abgeschlossene Kugeln in ℓ^∞ , $L^\infty(\Omega)$ und $\mathcal{M}(\Omega)$ schwach-* kompakt; diese Räume sind aber selber nicht separabel.

Schließlich werden wir noch den folgenden “schwach-*”-Trennungssatz benötigen; der Beweis läuft analog zum Beweis von [Satz 1.5](#) unter Verwendung der Tatsache, dass die linearen schwach-* stetigen Funktionale genau die Form $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle_X$ für ein $x \in X$ haben; siehe auch [[Werner 2011](#), Satz VIII.2.11, Korollar VIII.3.4].

Satz 1.11. *Sei $A \subset X^*$ eine nichtleere, konvexe und schwach-* abgeschlossene Teilmenge und sei $x^* \in X^* \setminus A$. Dann existieren ein $x \in X$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\langle z^*, x \rangle_X \leq \lambda < \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } z^* \in A.$$

Beachten Sie aber, dass abgeschlossene konvexe Mengen in nichtreflexiven Räumen *nicht* schwach-* abgeschlossen sein müssen.

Da ein Dualraum den ursprünglichen Raum charakterisiert, ist dies auch der Fall für lineare Operatoren auf diesem Raum. Für $T \in L(X, Y)$ ist durch $T^* : Y^* \rightarrow X^*$,

$$\langle T^* y^*, x \rangle_X = \langle y^*, Tx \rangle_Y \quad \text{für alle } x \in X, y^* \in Y^*,$$

der *adjungierte Operator* $T^* \in L(Y^*, X^*)$ definiert. Es gilt stets $\|T^*\|_{L(Y^*, X^*)} = \|T\|_{L(X, Y)}$. Ausserdem folgt aus der Stetigkeit von T , dass T^* schwach-* stetig (und T natürlich schwach stetig) ist.

1.3 HILBERTRÄUME

Besonders weitgehende Dualitäts-Aussagen gelten in Hilberträumen. Eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Vektorraum X über \mathbb{R} heißt *Skalarprodukt*, falls gilt

- (i) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (ii) $(x, y) = (y, x)$ für alle $x, y \in X$;
- (iii) $(x, x) \geq 0$ für alle $x \in X$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$.

Ein Banachraum mit Skalarprodukt $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ wird *Hilbertraum* genannt; ist das Skalarprodukt kanonisch, lässt man es weg. Durch das Skalarprodukt wird eine Norm

$$\|x\|_X := \sqrt{(x, x)_X}$$

induziert, die der *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* gehorcht:

$$(x, y)_X \leq \|x\|_X \|y\|_X.$$

Beispiel 1.3 (i–iii) für $p = 2 (= q)$ ist jeweils ein Hilbertraum, wobei das Skalarprodukt der dualen Paarung entspricht und die kanonischen Normen induziert.

Der für uns wesentliche Punkt ist, dass der Dualraum eines Hilbertraums X mit X identifiziert werden kann.

Satz 1.12 (Fréchet–Riesz). *Sei X ein Hilbertraum. Dann existiert zu jedem $x^* \in X^*$ genau ein $z_{x^*} \in X$ mit $\|x^*\|_{X^*} = \|z_{x^*}\|_X$ und*

$$\langle x^*, x \rangle_X = (x, z_{x^*})_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Man bezeichnet z_{x^*} als *Riesz-Repräsentant* von x^* . Die (lineare) Abbildung $J_X : X^* \rightarrow X$, $x^* \mapsto z_{x^*}$ wird *Riesz-Isomorphismus* genannt. Mit ihrer Hilfe zeigt man zum Beispiel, dass jeder Hilbertraum reflexiv ist.

Satz 1.12 erlaubt, anstelle der dualen Paarung das Skalarprodukt zu verwenden. So konvergiert $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen x genau dann, wenn gilt

$$(x_n, z)_X \rightarrow (x, z)_X \quad \text{für alle } z \in X.$$

Ähnliches gilt für lineare Operatoren auf Hilberträumen. Für Hilberträume X, Y wird zu $T \in L(X, Y)$ der *Hilbertraum-adjungierte Operator* $T^* \in L(Y, X)$ definiert durch

$$(T^*y, x)_X = (Tx, y)_Y \quad \text{für alle } x \in X, y \in Y.$$

Ist $T^* = T$, so nennt man T *selbstadjungiert*. Zwischen den beiden Definitionen einer Adjungierten besteht die Beziehung $T^* = J_X T^* J_Y^{-1}$. Ist der Kontext klar, werden wir nicht in der Notation unterscheiden.

2 GRUNDLAGEN DER VARIATIONSRECHNUNG

Wir betrachten zuerst die Frage nach der Existenz von Minimierern eines (nichtlinearen) Funktionals $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ für eine Teilmenge U eines Banachraums X . Mit solchen Problemen beschäftigt sich die *Variationsrechnung*.

2.1 DIREKTE METHODE DER VARIATIONSRECHNUNG

Es ist hilfreich, die Beschränkung $\bar{x} \in U$ in das Funktional aufzunehmen, indem wir F auf X erweitern, dafür aber den Wert ∞ zulassen. Wir betrachten also

$$\bar{F} : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \bar{F}(x) = \begin{cases} F(x) & x \in U, \\ \infty & x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Dabei wird $\bar{\mathbb{R}}$ mit der üblichen Arithmetik versehen, d. h. $t < \infty$ und $t + \infty = \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$; Subtraktion und Multiplikation von negativen Zahlen mit ∞ und insbesondere $F(x) = -\infty$ sind nicht zugelassen. Existiert überhaupt ein $x \in U$, so kann ein Minimierer \bar{x} also nur in U liegen.

Wir betrachten also in Folge Funktionale $F : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Die Menge, auf der F endlich ist, bezeichnet man als (*effektiven*) *Definitionsbereich*

$$\text{dom } F := \{x \in X : F(x) < \infty\}.$$

Ist $\text{dom } F \neq \emptyset$, so nennt man F *eigentlich* (englisch: „proper“).

Wir verallgemeinern nun den Satz von Weierstraß (jede reellwertige stetige Funktion auf kompakten Mengen nimmt ihr Minimum und Maximum an) auf Banachräume und insbesondere auf Funktionen der Form \bar{F} . Da wir nur an Minima interessiert sind, reicht dafür eine „einseitige“ Stetigkeit: Man nennt F *unterhalbstetig* in $x \in X$ (englisch: „lower semicontinuous“), falls für alle konvergenten Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $x_n \rightarrow x$ gilt

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n).$$

Analog definiert man *schwach(-*) unterhalbstetige* (bzw. *oberhalbstetige*) Funktionen über schwach(-*) konvergente Folgen. Gilt schließlich für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\|_X \rightarrow \infty$ auch $F(x_n) \rightarrow \infty$, so heißt F *koerziv*.

Damit haben wir alle Begriffe zur Hand, um das zentrale Resultat der Variationsrechnung zu beweisen.¹

Satz 2.1. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, koerziv und schwach unterhalbstetig. Dann hat das Minimierungsproblem*

$$\min_{x \in X} F(x)$$

eine Lösung $\bar{x} \in \text{dom } F$.

Beweis. Der Beweis kann in vier Schritte aufgeteilt werden.

(i) *Zeige, dass F nach unten beschränkt ist.*

Angenommen, F ist nicht nach unten beschränkt. Dann existiert eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $F(x_n) \rightarrow -\infty$. Aus der Koerzivität von F folgt dann, dass diese Folge beschränkt ist (sonst müsste ja $F(x_n) \rightarrow \infty$ gelten), d. h. es gibt ein $M > 0$ mit $\|x_n\|_X \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K_M(0)$. Aus dem Satz von [Eberlein–Šmuljan](#) folgt daher die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, für deren Grenzwert $\tilde{x} \in X$ wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit gilt

$$F(\tilde{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = -\infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $\text{ran } F \subset \overline{\mathbb{R}}$.

(ii) *Zeige, dass eine Minimalfolge existiert.*

Da F eigentlich und nach unten beschränkt ist, muss ein $M := \inf_{x \in X} F(x) \in \mathbb{R}$ existieren. Aus der Definition des Infimums folgt dann, dass eine Folge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{ran } F \setminus \{\infty\} \subset \mathbb{R}$ existiert mit $y_n \rightarrow M$, d. h. es existiert eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit

$$F(x_n) \rightarrow M = \inf_{x \in X} F(x).$$

Eine solche Folge wird *Minimalfolge* genannt. Beachten Sie, dass wir aus der Konvergenz von $\{F(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ noch nicht auf die Konvergenz von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ schließen können.

(iii) *Zeige, dass die Minimalfolge eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Aus der Koerzivität von F folgt wieder, dass die Minimalfolge beschränkt ist und daher nach dem Satz von [Eberlein–Šmuljan](#) eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\bar{x} \in X$ besitzt. Dieser Grenzwert ist Kandidat für einen Minimierer.

¹Diese Beweis-Strategie, bekannt unter dem Namen *direkte Methode der Variationsrechnung*, wird so häufig angewendet, dass in Forschungsarbeiten üblicherweise nur geschrieben wird: „Die Existenz eines Minimierers folgt aus Standard-Argumenten.“ Das Grundprinzip geht auf Hilbert zurück; die hier verwendete Formulierung für unterhalbstetige Funktionen stammt von [Leonida Tonelli](#) (1885–1946), der damit die moderne Variationsrechnung nachhaltig geprägt hat.

(iv) Zeige, dass dieser Grenzwert ein Minimierer ist.

Aus der Definition der Minimalfolge folgt, dass auch für die Teilfolge $F(x_{n_k}) \rightarrow M$ gilt. Mit der schwachen Unterhalbstetigkeit von F und der Definition des Infimums erhalten wir daher

$$\inf_{x \in X} F(x) \leq F(\bar{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = M = \inf_{x \in X} F(x) < \infty.$$

Das Infimum wird also in $\bar{x} \in \text{dom } F$ angenommen, und damit ist \bar{x} der gesuchte Minimierer. \square

Ist X nicht reflexiv, aber Dualraum eines separablen Banachraums, so zeigt man analog die Existenz von Minimierern mit dem Satz von [Banach–Alaoglu](#).

Beachten Sie, wie im Beweis die zu verwendende Topologie auf X durch Schritt (iii) und (iv) eingeschränkt wird: Schritt (iii) profitiert von einer groben Topologie (in der mehr Folgen konvergieren), Schritt (iv) von einer feinen (je weniger Folgen konvergieren, desto einfacher ist die \liminf -Bedingung zu erfüllen). Da wir in unseren Fällen nicht mehr als die Beschränktheit einer Minimalfolge erwarten können, können wir keine feinere als die schwache Topologie verwenden. Es bleibt daher die Frage, ob genügend (interessante) Funktionale schwach unterhalbstetig sind.

Ein erstes Beispiel sind beschränkte lineare Funktionale: Ist $x^* \in X^*$, so ist

$$F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \langle x^*, x \rangle_X,$$

schwach stetig (nach Definition der schwachen Konvergenz) und damit insbesondere schwach unterhalbstetig. Ein weiterer Vorzug der (schwachen) Unterhalbstetigkeit ist, dass sie unter bestimmten Operationen erhalten bleibt.

Lemma 2.2. Seien X, Y Banachräume und sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ schwach unterhalbstetig. Dann sind schwach unterhalbstetig

- (i) αF für alle $\alpha \geq 0$;
- (ii) $F + G$ für $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ schwach unterhalbstetig;
- (iii) $\varphi \circ F$ für $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ unterhalbstetig und monoton steigend;
- (iv) $F \circ \Phi$ für $\Phi : Y \rightarrow X$ schwach stetig, d. h. aus $y_n \rightharpoonup y$ folgt $\Phi(y_n) \rightharpoonup \Phi(y)$;
- (v) $x \mapsto \sup_{i \in I} F_i(x)$ mit $F_i : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ schwach unterhalbstetig für eine beliebige Menge I .

Beachte, dass Aussage (v) für stetige Funktionen *nicht* gilt!

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen direkt aus den Rechenregeln für den $\lim \inf$.

Aussage (iii) folgt aus der Monotonie und der schwachen Unterhalbstetigkeit von φ , denn für $x_n \rightharpoonup x$ gilt

$$\varphi(F(x)) \leq \varphi(\liminf_{n \in \mathbb{N}} F(x_n)) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \varphi(F(x_n)).$$

Aussage (iv) folgt direkt aus der schwachen Stetigkeit von Φ : Gilt $y_n \rightharpoonup y$, so gilt $x_n := \Phi(y_n) \rightharpoonup \Phi(y) =: x$, und aus der Unterhalbstetigkeit von F folgt

$$F(\Phi(y_n)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(\Phi(y)).$$

Sei schließlich $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert $x \in X$. Dann gilt nach Definition des Supremums

$$F_j(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_j(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} F_i(x_n) \quad \text{für alle } j \in I.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten das Supremum über alle $j \in I$, so folgt die Aussage (v). \square

Folgerung 2.3. *Sei X ein Banachraum. Dann ist $\|\cdot\|_X$ eigentlich, koerzitiv, und schwach unterhalbstetig.*

Beweis. Koerzitivität und $\text{dom } \|\cdot\|_X = X$ folgt direkt aus der Definition; schwache Unterhalbstetigkeit folgt aus [Lemma 2.2 \(v\)](#) und [Folgerung 1.7](#), denn

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |\langle x^*, x \rangle_X|. \quad \square$$

Ein weiteres häufig auftretendes Funktional ist die *Indikator-Funktion*² einer Menge $U \subset X$, definiert als

$$\delta_U(x) = \begin{cases} 0 & x \in U, \\ \infty & x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Der Zweck dieser Definition ist natürlich, die Minimierung eines Funktionals $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $x \in U$ auf die unbeschränkte Minimierung von $\bar{F} := F + \delta_U$ zurückzuführen. Für die Existenz von Minimierern ist daher das folgende Resultat wichtig.

Lemma 2.4. *Sei X ein Banachraum und $U \subset X$. Dann ist δ_U*

- (i) *eigentlich, wenn U nichtleer ist;*
- (ii) *schwach unterhalbstetig, wenn U konvex und abgeschlossen ist;*
- (iii) *koerzitiv, wenn U beschränkt ist.*

²nicht zu verwechseln mit der *charakteristischen* Funktion χ_U mit $\chi_U(x) = 1$ für $x \in U$ und 0 sonst!

Beweis. Aussage (i) ist klar. Für (ii) betrachte eine schwach konvergente Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit Grenzwert $x \in X$. Ist $x \in U$, dann ist wegen $\delta_U \geq 0$ natürlich

$$\delta_U(x) = 0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_U(x_n).$$

Sei nun $x \notin U$. Da U konvex und abgeschlossen und daher nach [Lemma 1.9](#) auch schwach abgeschlossen ist, muss ein $N \in \mathbb{N}$ existieren mit $x_n \notin U$ für alle $n \geq N$ (sonst könnten wir – durch Übergang zu einer Teilfolge – eine Folge mit $x_n \rightarrow x \in U$ konstruieren, im Widerspruch zur Annahme). Also gilt $\delta_U(x_n) = \infty$ für alle $n \geq N$ und damit

$$\delta_U(x) = \infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_U(x_n).$$

Für (iii) sei U beschränkt, d. h. es gebe ein $M > 0$ mit $U \subset K_M(0)$. Gilt $\|x_n\|_X \rightarrow \infty$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n\|_X > M$ für alle $n \geq N$, und damit $x_n \notin K_M(0) \supset U$ für alle $n \geq N$. Also gilt auch $\delta_U(x_n) \rightarrow \infty$. \square

2.2 DIFFERENZIERBARKEIT IN BANACHRÄUMEN

Auch im Banachraum möchte man Minimierer intrinsisch mit Hilfe des Fermatschen Prinzip charakterisieren. Dafür übertragen wir den klassischen Ableitungsbegriff in den Banachraum. Dies geschieht in mehreren Schritten.

Seien X, Y Banachräume, $F : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, und $x, h \in X$.

- Existiert der einseitige Grenzwert

$$F'(x; h) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} \in Y,$$

so nennen wir diesen *Richtungsableitung* in x in Richtung h .

- Falls $F'(x; h)$ für alle $h \in X$ existiert und durch

$$DF(x) : X \rightarrow Y, h \mapsto F'(x; h)$$

ein linearer beschränkter Operator definiert wird, so heißt F *Gâteaux-differenzierbar* (in x) und $DF \in L(X, Y)$ *Gâteaux-Ableitung*.

- Gilt zusätzlich

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(x + h) - F(x) - DF(x)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

so heißt F *Fréchet-differenzierbar* (in x) und $F'(x) := DF(x) \in L(X, Y)$ *Fréchet-Ableitung*.

- Ist die Abbildung $x \mapsto F'(x)$ stetig, so heißt F *stetig differenzierbar*.

Der Unterschied zwischen Gâteaux- und Fréchet-Differenzierbarkeit liegt also im Approximationsfehler von F in der Nähe von x durch $F(x) + DF(x)h$: Während für Gâteaux-differenzierbare Funktionen dieser nur beschränkt durch $\|h\|_X$ – also linear in $\|h\|_X$ – sein muss, ist er für Fréchet-differenzierbare Funktionen sogar superlinear in $\|h\|_X$. (Für eine feste Richtung h ist dies natürlich auch für Gâteaux-differenzierbare Funktionen der Fall; für Fréchet-differenzierbare Funktionen ist zusätzlich also Gleichmässigkeit in h gefordert.)

Ist F Gâteaux-differenzierbar, kann man die Gâteaux-Ableitung berechnen via

$$DF(x)h = \left(\frac{d}{dt} F(x + th) \right) \Big|_{t=0}.$$

Offensichtlich sind lineare beschränkte Operatoren $F \in L(X, Y)$ überall Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $F'(x) = F \in L(X, Y)$ für alle $x \in X$. Weitere Ableitungen erhält man durch die üblichen Rechenregeln, die genau wie in \mathbb{R}^n gezeigt werden. Beispielfhaft beweisen wir eine Kettenregel.

Satz 2.5. *Seien X, Y, Z Banachräume und $F : X \rightarrow Y$ Fréchet-differenzierbar in $x \in X$ und $G : Y \rightarrow Z$ Fréchet-differenzierbar in $y := F(x) \in Y$. Dann ist $G \circ F$ Fréchet-differenzierbar in x und*

$$(G \circ F)'(x) = G'(F(x)) \circ F'(x).$$

Beweis. Für $h \in X$ mit $x + h \in \text{dom } F$ gilt

$$(G \circ F)(x + h) - (G \circ F)(x) = G(F(x + h)) - G(F(x)) = G(y + g) - G(y)$$

für $g := F(x + h) - F(x)$. Aus der Fréchet-Differenzierbarkeit von G folgt daher, dass gilt

$$\|(G \circ F)(x + h) - (G \circ F)(x) - G'(y)g\|_Z = r_1(\|g\|_Y)$$

mit $r_1(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Aus der Fréchet-Differenzierbarkeit von F folgt aber, dass gilt

$$\|g - F'(x)h\|_Y = r_2(\|h\|_X)$$

mit $r_2(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Insbesondere ist

$$(2.1) \quad \|g\|_Y \leq \|F'(x)h\|_Y + r_2(\|h\|_X).$$

Also gilt mit $c := \|G'(F(x))\|_{L(Y,Z)}$

$$\|(G \circ F)(x + h) - (G \circ F)(x) - G'(F(x))F'(x)h\|_Z \leq r_1(\|g\|_Y) + c r_2(\|h\|_X).$$

Für $\|h\|_X \rightarrow 0$ folgt aus (2.1) und $F'(x) \in L(X, Y)$ auch $\|g\|_Y \rightarrow 0$ und damit die gewünschte Aussage. \square

Eine analoge Regel für Gâteaux-Ableitungen gilt dagegen nicht!

Wir brauchen noch die folgende Variante des Mittelwertsatzes. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f : [a, b] \rightarrow X$ stetig. Dann ist das Bochner-Integral $\int_a^b f(t) dt \in X$ wohldefiniert und erfüllt nach Definition

$$(2.2) \quad \left\langle x^*, \int_a^b f(t) dt \right\rangle_X = \int_a^b \langle x^*, f(t) \rangle_X dt \quad \text{für alle } x^* \in X^*,$$

sowie

$$(2.3) \quad \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|_X \leq \int_a^b \|f(t)\|_X dt,$$

siehe z. B. [Růžička 2004, Folgerung 2.1.14].

Satz 2.6. Sei $F : U \rightarrow Y$ Fréchet-differenzierbar, und seien $y \in U$ und $h \in Y$ so dass $y + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt. Dann ist

$$F(y + h) - F(y) = \int_0^1 F'(y + th)h dt.$$

Beweis. Betrachte für beliebiges $y^* \in Y^*$ die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle y^*, F(y + th) \rangle_Y.$$

Nach der Satz 2.5 ist f (als Verkettung von Abbildungen im Banachraum) differenzierbar mit

$$f'(t) = \langle y^*, F'(y + th)h \rangle_Y,$$

und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in \mathbb{R} ergibt

$$\langle y^*, F(y + h) - F(y) \rangle_Y = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = \left\langle y^*, \int_0^1 F'(y + th)h dt \right\rangle_Y,$$

wobei die letzte Gleichung aus (2.2) folgt. Da $y^* \in Y^*$ beliebig war, folgt daraus mit Folgerung 1.7 die gewünschte Gleichung. \square

Wir betrachten nun die Charakterisierung von Minimierern eines differenzierbaren Funktionals $F : X \rightarrow \mathbb{R}$.³

Satz 2.7 (Fermat-Prinzip). Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar und $\bar{x} \in X$ ein Minimierer von F . Dann gilt $DF(\bar{x}) = 0$, d. h.

$$DF(\bar{x})h = F'(x; h) = 0 \quad \text{für alle } h \in X.$$

³In der indirekten Methode der Variationsrechnung zeigt man darüber auch die Existenz von Minimierern, etwa als Lösung einer partiellen Differentialgleichung.

Beweis. Wenn \bar{x} ein Minimierer von F ist, so muss insbesondere für alle $h \in X$ und $\varepsilon > 0$ klein genug die Funktion $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto F(\bar{x} + th)$, ein Minimum in $t = 0$ haben. Da F Gâteaux-differenzierbar ist, existiert die Ableitung $f'(t)$ in $t = 0$ und damit muss gelten

$$0 = f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = F'(x; h). \quad \square$$

Beachten Sie, dass Gâteaux-Ableitungen eines Funktionals $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ Elemente des Dualraums $X^* = L(X, \mathbb{R})$ sind und daher nicht zu Vektoren in X addiert werden können. In Hilberträumen (und insbesondere \mathbb{R}^n) kann man aber $DF(x) \in X^*$ mit Hilfe des Satz von **Fréchet–Riesz** kanonisch mit einem Element $\nabla F(x) \in X$, genannt *Gradient* von F , identifizieren über

$$DF(x)h = (\nabla F(x), h)_X \quad \text{für alle } h \in X.$$

Als Beispiel betrachten wir für die durch das Skalarprodukt induzierte Norm in einem Hilbertraum das Funktional $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2$. Dann gilt für alle $x, h \in X$

$$F'(x; h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}(x + th, x + th)_X - \frac{1}{2}(x, x)_X}{t} = (x, h)_X = DF(x)h,$$

da das Skalarprodukt für festes x linear in h ist. Die quadrierte Norm ist also Gâteaux-differenzierbar in x mit Ableitung $DF(x) = (x, \cdot)_X \in X^*$ und Gradient $\nabla F(x) = x \in X$; wegen

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{|\frac{1}{2}\|x + h\|_X^2 - \frac{1}{2}\|x\|_X^2 - (x, h)_X|}{\|h\|_X} = \lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{1}{2}\|h\|_X = 0$$

ist sie sogar Fréchet-differenzierbar. Fasst man nun dieselbe Abbildungsvorschrift auf als definiert auf einem kleineren Hilbertraum $X' \hookrightarrow X$ (zum Beispiel $X = L^2(\Omega), X' = H^1(\Omega)$), so ist $DF(x) \in (X')^*$ immer noch gegeben durch $DF(x)h = (x, h)_X$ (nur noch für alle $h \in X'$), aber $\nabla F \in X'$ ist nun charakterisiert durch

$$DF(x)h = (\nabla F(x), h)_{X'} \quad \text{für alle } h \in X'.$$

Unterschiedliche Skalarprodukte führen daher zu unterschiedlichen Gradienten.

2.3 SUPERPOSITIONSOPERATOREN

Eine besondere Klasse von Operatoren auf Funktionenräumen sind solche, die durch punktweise Anwendung einer reellen Funktion definiert sind wie etwa $u(x) \mapsto \sin(u(x))$. Wir betrachten daher für $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $1 \leq p, q \leq \infty$ den zugehörigen *Superpositions-* oder *Nemytskii-Operator*

$$(2.4) \quad F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega), \quad [F(u)](x) = f(x, u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Damit dieser Operator wohldefiniert ist, muss f bestimmte Anforderungen erfüllen. Wir nennen f *Carathéodory-Funktion*, falls

- (i) für alle $z \in \mathbb{R}$ die Abbildung $x \mapsto f(x, z)$ messbar ist, und
- (ii) für fast alle $x \in \Omega$ die Abbildung $z \mapsto f(x, z)$ stetig ist.

Wir fordern zusätzlich die folgende Wachstumsbedingung: Für gegebenes $1 \leq p, q < \infty$ existieren $a \in L^q(\Omega)$ und $b \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$(2.5) \quad |f(x, z)| \leq a(x) + b(x)|z|^{p/q}.$$

Unter diesen Bedingungen ist F sogar stetig.

Satz 2.8. *Erfüllt $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Wachstumsbedingung (2.5) für $1 \leq p, q < \infty$, so ist der durch (2.4) definierte Superpositionsoperator $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ stetig.*

Beweis. Wir skizzieren die wesentlichen Schritte; einen ausführlichen Beweis findet man in [Růžička 2004, Lemma 1.19]. Zunächst zeigt man für gegebenes $u \in L^p(\Omega)$ mit Hilfe der Carathéodory-Eigenschaften die Messbarkeit von $F(u)$. Aus (2.5) und der Dreiecksungleichung folgt daher

$$\|F(u)\|_{L^q} \leq \|a\|_{L^q} + \|b\|_{L^\infty} \| |u|^{p/q} \|_{L^q} = \|a\|_{L^q} + \|b\|_{L^\infty} \|u\|_{L^p}^{p/q} < \infty,$$

d. h. $F(u) \in L^q(\Omega)$.

Für die Stetigkeit betrachten wir eine Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ mit $u_n \rightarrow u \in L^p(\Omega)$. Dann existiert eine Teilfolge, die wir wieder mit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, die punktweise fast überall in Ω konvergiert, sowie ein $v \in L^p(\Omega)$ mit $|u_n(x)| \leq |v(x)| + |u_1(x)| =: g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in \Omega$ (siehe z. B. [Dobrowolski 2010, Satz 4.25 sowie den Beweis von Satz 4.17]). Aus der Stetigkeit von $z \mapsto f(x, z)$ folgt dann $F(u_n) \rightarrow F(u)$ punktweise fast überall sowie

$$|[F(u_n)](x)| \leq a(x) + b(x)|u_n(x)|^{p/q} \leq a(x) + b(x)|g(x)|^{p/q} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Da wegen $g \in L^p(\Omega)$ die rechte Seite in $L^q(\Omega)$ liegt, können wir den Satz von Lebesgue anwenden, und erhalten $F(u_n) \rightarrow F(u)$ in $L^q(\Omega)$. Da wir dieses Argument auf jede beliebige Teilfolge anwenden können, muss die gesamte Folge gegen $F(u)$ konvergieren, woraus die Stetigkeit folgt. \square

Tatsächlich ist die Wachstumsbedingung (2.5) sogar notwendig für die Stetigkeit, siehe [Appell & Zabreiko 1990, Satz 3.2]. Außerdem zeigt man recht leicht, dass für $p = q = \infty$ aus (2.5) (in diesem Fall mit $p/q := 0$) folgt, dass F sogar lokal Lipschitz-stetig ist.

Nun hätte man gerne, dass für differenzierbare f auch F differenzierbar ist, am besten mit punktwiser Ableitung $[F'(u)h](x) = f'(u(x))h(x)$. Dies ist aber nicht unbedingt der Fall; z. B. ist der durch $f(x, z) = \sin(z)$ definierte Superpositionsoperator für $1 \leq p = q < \infty$ in $u = 0$ nicht differenzierbar. Dies liegt daran, dass für einen Fréchet-differenzierbaren Superpositionsoperator $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ und eine Richtung $h \in L^p(\Omega)$ das punktweise(!) Produkt $F'(u)h \in L^q(\Omega)$ erfüllen muss. Dies stellt zusätzliche Anforderungen an den durch f' definierten Superpositionsoperator F' , und ist als *zwei-Norm-Diskrepanz* bekannt.

Satz 2.9. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion, die die Wachstumsbedingung (2.5) für $1 \leq q < p < \infty$ erfüllt. Ist die partielle Ableitung f'_z ebenfalls eine Carathéodory-Funktion und erfüllt (2.5) für $p' = p - q$, so ist der Superpositionsoperator $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ stetig Fréchet-differenzierbar, und die Ableitung in $u \in L^p(\Omega)$ in Richtung $h \in L^p(\Omega)$ ist gegeben durch

$$[F'(u)h](x) = f'_z(x, u(x))h(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Beweis. Nach Satz 2.8 ist für $r := \frac{pq}{p-q}$ (d. h. $\frac{r}{p} = \frac{p'}{q}$) der Superpositionsoperator

$$G : L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega), \quad [G(u)](x) = f'_z(x, u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega,$$

wohldefiniert und stetig. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt weiter für beliebige $u \in L^p(\Omega)$

$$(2.6) \quad \|G(u)h\|_{L^q} \leq \|G(u)\|_{L^r} \|h\|_{L^p} \quad \text{für alle } h \in L^p(\Omega),$$

d. h. durch $h \mapsto G(u)h$ wird ein linearer beschränkter Operator $DF(u) : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ definiert.

Sei nun $h \in L^p(\Omega)$ beliebig. Da $z \mapsto f(x, z)$ nach Annahme stetig differenzierbar ist, folgt aus dem klassischen Mittelwertsatz zusammen mit (2.3) und (2.6) nun

$$\begin{aligned} & \|F(u+h) - F(u) - DF(u)h\|_{L^q} \\ &= \left(\int_{\Omega} |f(x, u(x)+h(x)) - f(x, u(x)) - f'_z(x, u(x))h(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\Omega} \left| \int_0^1 f'_z(x, u(x)+th(x))h(x) dt - f'_z(x, u(x))h(x) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\| \int_0^1 G(u+th)h dt - G(u)h \right\|_{L^q} \\ &\leq \int_0^1 \|(G(u+th) - G(u))h\|_{L^q} dt \\ &\leq \int_0^1 \|G(u+th) - G(u)\|_{L^r} dt \|h\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $G : L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega)$ geht das Integral für $\|h\|_{L^p} \rightarrow 0$ gegen Null, und damit ist F nach Definition Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $F'(u) = DF(u)$ (die wie bereits gezeigt stetig ist). \square

Teil II

KONVEXE ANALYSIS

3 KONVEXE FUNKTIONEN

Die klassischen Ableitungsbegriffe des letzten Kapitels sind für unsere Zwecke nicht ausreichend, denn viele interessante Funktionale sind in diesem Sinne nicht differenzierbar; auch Funktionale mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ können damit nicht behandelt werden. Wir brauchen einen Ableitungsbegriff, der allgemeiner als Gâteaux- und Fréchet-Ableitungen ist, aber immer noch ein Fermatsches Prinzip und praktische Rechenregeln erlaubt.

Wir betrachten zuerst die Klasse der Funktionale, die solch eine verallgemeinerte Ableitung zulassen. Ein eigentliches Funktional $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$(3.1) \quad F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y)$$

(dabei ist der Funktionswert ∞ auf beiden Seiten zugelassen). Gilt für $x \neq y$ und $\lambda \in (0, 1)$ sogar

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y),$$

so heißt F *strikt konvex*.

Eine alternative Charakterisierung der Konvexität eines Funktionals $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ basiert auf ihrem *Epigraph*

$$\text{epi } F := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \leq t\}.$$

Lemma 3.1. Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist $\text{epi } F$

- (i) nichtleer genau dann, wenn F eigentlich ist;
- (ii) konvex genau dann, wenn F konvex ist;
- (iii) (schwach) abgeschlossen genau dann, wenn F (schwach) unterhalbstetig ist.

Beweis. Aussage (i) folgt direkt aus der Definition: F ist eigentlich genau dann, wenn ein $x \in X$ und ein $t \in \mathbb{R}$ existiert mit $F(x) \leq t < \infty$, d. h. $(x, t) \in \text{epi } F$.

Für (ii) sei F konvex und seien $(x, r), (y, s) \in \text{epi } F$ gegeben. Für beliebige $\lambda \in [0, 1]$ folgt dann aus (3.1), dass gilt

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \leq \lambda r + (1 - \lambda)s,$$

d. h. es ist

$$\lambda(x, r) + (1 - \lambda)(y, s) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda r + (1 - \lambda)s) \in \text{epi } F$$

und damit $\text{epi } F$ konvex. Sei umgekehrt $\text{epi } F$ konvex und $x, y \in X$ beliebig, wobei wir $F(x) < \infty$ und $F(y) < \infty$ annehmen können (ansonsten ist (3.1) trivialerweise erfüllt). Offensichtlich sind $(x, F(x)), (y, F(y)) \in \text{epi } F$. Aus der Konvexität von $\text{epi } F$ folgt dann, dass für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y)) = \lambda(x, F(x)) + (1 - \lambda)(y, F(y)) \in \text{epi } F$$

und damit nach Definition von $\text{epi } F$ auch (3.1).

Nun zu (iii): Sei zuerst F unterhalbstetig und $\{(x_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{epi } F$ eine beliebige Folge mit $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t) \in X \times \mathbb{R}$. Dann gilt

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} t_n = t,$$

d. h. $(x, t) \in \text{epi } F$. Sei umgekehrt $\text{epi } F$ abgeschlossen und angenommen, F ist nicht unterhalbstetig. Dann existiert eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $x_n \rightarrow x \in X$ und

$$F(x) > \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) =: M \in [-\infty, \infty).$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

- a) $x \in \text{dom } F$: Dann können wir eine Teilfolge auswählen, die wir wieder mit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, so dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $F(x_n) \leq F(x) - \varepsilon$ und damit $(x_n, F(x) - \varepsilon) \in \text{epi } F$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $x_n \rightarrow x$ folgt aus Abgeschlossenheit von $\text{epi } F$ auch $(x, F(x) - \varepsilon) \in \text{epi } F$ und damit $F(x) \leq F(x) - \varepsilon$, im Widerspruch zu $\varepsilon > 0$.
- b) $x \notin \text{dom } F$: In diesem Fall argumentiert man analog mit $F(x_n) \leq M + \varepsilon$ für $M > -\infty$ bzw. $F(x_n) \leq \varepsilon$ für $M = -\infty$, um einen Widerspruch zu $F(x) = \infty$ zu erhalten.

Genauso zeigt man die Äquivalenz von schwacher Unterhalbstetigkeit und schwacher Abgeschlossenheit. □

Zusammen mit Lemma 1.9 erhalten wir daraus sofort

Folgerung 3.2. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Dann ist F schwach unterhalbstetig genau dann, wenn F unterhalbstetig ist.

Ebenfalls nützlich für die Betrachtung eines Funktionals $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind die zugehörigen Subniveaumengen

$$F_\alpha := \{x \in X : F(x) \leq \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

für die man analog zu Lemma 3.1 die folgenden Eigenschaften zeigt.

Lemma 3.3. Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

- (i) Ist F konvex, so ist F_α konvex für alle $\alpha \in \mathbb{R}$; die Umkehrung gilt aber nicht.
- (ii) F ist (schwach) unterhalbstetig genau dann, wenn F_α (schwach) abgeschlossen ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Direkt aus der Definition folgt die Konvexität

- (i) affiner Funktionale, d. h. der Form $\langle x^*, \cdot \rangle_X - \alpha$ für $x^* \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (ii) der Norm $\| \cdot \|_X$ in einem normierten Raum X ;
- (iii) der Indikatorfunktion δ_C für eine konvexe Menge C .

Ist X ein Hilbertraum, so ist $F(x) = \|x\|_X^2$ sogar strikt konvex: Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $t \in (0, 1)$ beliebig gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_X^2 &= (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda x + (1 - \lambda)y)_X \\ &= \lambda^2 (x, x)_X + 2\lambda(1 - \lambda) (x, y)_X + (1 - \lambda)^2 (y, y)_X \\ &= \lambda \left(\lambda (x, x)_X + (1 - \lambda) (x - y, y)_X + (1 - \lambda) (y, y)_X \right) \\ &\quad + (1 - \lambda) \left(\lambda (x, x)_X + \lambda (x - y, y)_X + (1 - \lambda) (y, y)_X \right) \\ &= (\lambda + (1 - \lambda)) \left(\lambda (x, x)_X + (1 - \lambda) (y, y)_X \right) - \lambda(1 - \lambda) (x - y, x - y)_X \\ &= \lambda \|x\|_X^2 + (1 - \lambda) \|y\|_X^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|_X^2 \\ &< \lambda \|x\|_X^2 + (1 - \lambda) \|y\|_X^2. \end{aligned}$$

Eine in der Variationsrechnung besonders nützliche Klasse von konvexen Funktionen entsteht durch Integralfunktionale mit konvexen Integranden, die durch Superpositionsoperatoren definiert sind.

Lemma 3.4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $1 \leq p \leq \infty$, dann gilt dies auch für

$$F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad u \mapsto \begin{cases} \int_\Omega f(u(x)) dx & f \circ u \in L^1(\Omega), \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Da f eigentlich ist, existiert ein $t_0 \in \text{dom } f$. Also ist die konstante Funktion $u \equiv t_0 \in \text{dom } F$, da $f(u) \equiv f(t_0) \in L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Für $u, v \in \text{dom } F$ (sonst ist (3.1) trivialerweise erfüllt) und $\lambda \in [0, 1]$ folgt aus der Konvexität von f , dass

$$f(\lambda u(x) + (1 - \lambda)v(x)) \leq \lambda f(u(x)) + (1 - \lambda)f(v(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Da für $f, g \in L^1(\Omega)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch $\alpha f + \beta g \in L^1(\Omega)$ gilt, ist also $\lambda u + (1 - \lambda)v \in \text{dom } F$, und durch Integration der Ungleichung über Ω folgt die Konvexität von F .

Sei nun $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$. Dann existiert eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ fast überall. Wegen der Unterhalbstetigkeit von f folgt mit dem Lemma von Fatou

$$F(u) = \int_{\Omega} f(u(x)) dx \leq \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} f(u_{n_k}(x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u_{n_k}(x)) dx = \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_{n_k}).$$

Da dieses Argument auf jede weitere Teilfolge angewandt werden kann, muss die Aussage auch für die gesamte Folge gelten. \square

Weitere Beispiele lassen sich analog zu [Lemma 2.2](#) durch folgende Operationen erzeugen.

Lemma 3.5. *Seien X, Y normierte Räume und sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Dann sind konvex*

- (i) αF für alle $\alpha \geq 0$;
- (ii) $F + G$ für $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex (ist F oder G strikt konvex, so auch $F + G$);
- (iii) $\varphi \circ F$ für $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und monoton steigend;
- (iv) $F \circ A$ für $A : Y \rightarrow X$ linear;
- (v) $x \mapsto \sup_{i \in I} F_i(x)$ mit $F_i : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex für eine beliebige Menge I .

Nach [Lemma 3.5](#) (v) ist also das punktweise Supremum von affinen Funktionalen stets konvex. Tatsächlich lässt sich sogar jedes konvexe Funktional so darstellen. Dafür definieren wir für ein eigentliches Funktional $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die *konvexe Hülle*

$$F^{\Gamma} : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sup \{a(x) : a \text{ affin mit } a(x) \leq F(x) \text{ für alle } x \in X\}.$$

Lemma 3.6. *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich. Dann ist F genau dann konvex und unterhalbstetig, wenn gilt $F = F^{\Gamma}$.*

Beweis. Da affine Funktionale konvex und stetig sind, ist $F = F^{\Gamma}$ nach [Lemma 3.5](#) (v) und [Lemma 2.2](#) (v) immer konvex und unterhalbstetig.

Für die andere Richtung sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Aus der Definition von F^{Γ} als Supremum ist offensichtlich, dass stets $F^{\Gamma} \leq F$ punktweise gilt. Angenommen, $F^{\Gamma} < F$. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in X$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$F^{\Gamma}(x_0) < \lambda < F(x_0).$$

Wir konstruieren nun mit Hilfe des Hahn–Banach-Trennungssatzes ein affines Funktional $a \in X^*$ mit $a \leq F$ aber $a(x_0) > \lambda > F^{\Gamma}(x_0)$, was zusammen mit der Definition von F^{Γ} zum Widerspruch führt. Da F eigentlich, konvex und unterhalbstetig ist, ist $\text{epi } F$ nach [Lemma 3.1](#) nichtleer, konvex und abgeschlossen. Weiter ist $\{(x_0, \lambda)\}$ kompakt und wegen

$\lambda < F(x_0)$ disjunkt zu $\text{epi } F$. Satz 1.5 (ii) liefert also die Existenz eines $z^* \in (X \times \mathbb{R})^*$ und eines $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle z^*, (x, t) \rangle_{X \times \mathbb{R}} \leq \alpha < \langle z^*, (x_0, \lambda) \rangle_{X \times \mathbb{R}} \quad \text{für alle } (x, t) \in \text{epi } F.$$

Wir definieren nun ein $x^* \in X^*$ durch $\langle x^*, x \rangle_X = \langle z^*, (x, 0) \rangle_{X \times \mathbb{R}}$ für alle $x \in X$ und setzen $s := \langle z^*, (0, 1) \rangle_{X \times \mathbb{R}} \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\langle z^*, (x, t) \rangle_{X \times \mathbb{R}} = \langle x^*, x \rangle_X + st$ und damit

$$(3.2) \quad \langle x^*, x \rangle_X + st \leq \alpha < \langle x^*, x_0 \rangle_X + s\lambda \quad \text{für alle } (x, t) \in \text{epi } F.$$

Nun ist für $(x, t) \in \text{epi } F$ auch $(x, t') \in \text{epi } F$ für alle $t' > t$, und aus der ersten Ungleichung in (3.2) folgt für alle $t' > 0$ groß genug

$$s \leq \frac{\alpha - \langle x^*, x \rangle_X}{t'} \rightarrow 0 \quad \text{für } t' \rightarrow \infty.$$

Also ist $s \leq 0$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung.

(i) $s < 0$: Wir setzen

$$a : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\alpha - \langle x^*, x \rangle_X}{s}.$$

Dann ist a affin und stetig. Für $x \in \text{dom } F$ ist außerdem $(x, F(x)) \in \text{epi } F$, und aus der produktiven Null und der ersten Ungleichung von (3.2) folgt (beachte $s < 0$!)

$$a(x) = \frac{1}{s} (\alpha - \langle x^*, x \rangle_X - sF(x)) + F(x) \leq F(x).$$

(Für $x \notin \text{dom } F$ ist die Aussage klar.) Aus der zweiten Ungleichung von (3.2) folgt aber

$$a(x_0) = \frac{1}{s} (\alpha - \langle x^*, x_0 \rangle_X) > \lambda.$$

(ii) $s = 0$: Dann folgt $\langle x^*, x \rangle_X \leq \alpha < \langle x^*, x_0 \rangle_X$ für alle $x \in \text{dom } F$, weshalb $x_0 \notin \text{dom } F$ gelten muss. Allerdings ist F eigentlich, so dass ein $y_0 \in \text{dom } F$ existiert, für das wir analog zu Fall (i) durch Trennung von $\text{epi } F$ und (y_0, μ) für μ klein genug ein stetiges affines Funktional $a_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a_0 \leq F$ punktweise konstruieren können. Wir setzen nun für $\rho > 0$

$$a_\rho : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_0(x) + \rho (\langle x^*, x \rangle_X - \alpha).$$

Dann ist auch a_ρ affin und stetig, und wegen $\langle x^*, x \rangle_X \leq \alpha$ gilt $a_\rho(x) \leq a_0(x) \leq F(x)$ für alle $x \in \text{dom } F$ und $\rho > 0$ beliebig. Wegen $\langle x^*, x_0 \rangle_X > \alpha$ existiert aber ein $\rho > 0$ mit $a_\rho(x_0) > \lambda$.

In beiden Fällen muss nach Definition von F^Γ als Supremum also auch $F^\Gamma(x_0) > \lambda$ gelten, im Widerspruch zur Annahme $F^\Gamma(x_0) < \lambda$. \square

Nach all der Vorarbeit können wir nun schnell das Hauptresultat über die Existenz von Lösungen konvexer Minimierungsaufgaben beweisen.

Satz 3.7. Sei X ein reflexiver Banachraum und seien

- (i) $U \subset X$ nichtleer, abgeschlossen, und konvex,
- (ii) $F : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex, und unterhalbstetig mit $\text{dom } F \cap U \neq \emptyset$,
- (iii) U beschränkt oder F koerziv.

Dann hat das Problem

$$\min_{x \in U} F(x)$$

eine Lösung $\bar{x} \in U \cap \text{dom } F$. Ist F strikt konvex, so ist die Lösung eindeutig.

Beweis. Wir betrachten das Funktional $\bar{F} = F + \delta_U$. Aus Voraussetzung (i) folgt mit [Lemma 2.2](#), dass δ_U eigentlich, konvex und schwach unterhalbstetig ist. Wegen (ii) existiert ein Punkt $x_0 \in U$ mit $\bar{F}(x_0) < \infty$, daher ist auch \bar{F} eigentlich, konvex und damit sogar unterhalbstetig. Aus (iii) folgt schließlich die Koerzivität von \bar{F} (da die Summe koerziv ist, sobald es einer dieser Summanden ist). Da X reflexiv ist, können wir nun [Satz 2.1](#) anwenden und erhalten die Existenz eines Minimierers $\bar{x} \in \text{dom } \bar{F} = U \cap \text{dom } F$ von \bar{F} mit

$$F(\bar{x}) = \bar{F}(\bar{x}) \leq \bar{F}(x) = F(x) \quad \text{für alle } x \in U,$$

d. h. \bar{x} die gesuchte Lösung.

Sei nun F strikt konvex, und seien $\bar{x}, \bar{x}' \in U$ zwei verschiedene Minimierer, d. h. $F(\bar{x}) = F(\bar{x}') = \min_{x \in U} F(x)$. Dann ist für alle $\lambda \in (0, 1)$ wegen der Konvexität von U auch

$$x_\lambda := \lambda \bar{x} + (1 - \lambda) \bar{x}' \in U,$$

aber wegen der strikten Konvexität von F gilt

$$F(x_\lambda) < \lambda F(\bar{x}) + (1 - \lambda) F(\bar{x}') = F(\bar{x}),$$

im Widerspruch zu $F(\bar{x}) \leq F(x)$ für alle $x \in U$. □

Zum Abschluß dieses Kapitels zeigen wir, dass *endlichwertige* konvexe Funktionen automatisch stetig sind. Das ist auf den ersten Blick erstaunlich: wie soll aus einer rein algebraischen Eigenschaft (Konvexität) eine topologische Eigenschaft (Stetigkeit) folgen – und überhaupt, stetig bezüglich welcher Topologie? Die Erklärung liegt in dem folgenden Resultat, aus dem die Aussage folgen wird: Eine konvexe Funktion, die *in einer Umgebung* eines Punktes nach oben beschränkt ist, ist in diesem Punkt (sogar lokal Lipschitz-)stetig. „Umgebung“ ist aber ein topologischer Begriff, und bezüglich der dadurch erzeugten Topologie wird die Funktion stetig sein. Hier verwenden wir die starke Topologie in einem normierten Vektorraum.

Satz 3.8. Sei X ein normierter Vektorraum und $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Existiert für $x \in X$ ein $\rho > 0$ so, dass F auf $O_\rho(x)$ nach oben beschränkt ist, so ist F in x lokal Lipschitz-stetig.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $F(y) \leq M$ für alle $y \in O_\rho(x)$. Wir zeigen zunächst, dass F dann ebenfalls lokal nach unten beschränkt ist. Sei dafür $y \in O_\rho(x)$ beliebig. Dann ist wegen $\|x - y\|_X < \rho$ auch $z := 2x - y = x - (y - x) \in O_\rho(x)$, und aus der Konvexität von F folgt $F(x) = F\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) \leq \frac{1}{2}F(y) + \frac{1}{2}F(z)$ und damit

$$-F(y) \leq F(z) - 2F(x) \leq M - 2F(x) =: m,$$

d. h. $-m \leq F(y) \leq M$ für alle $y \in O_\rho(x)$.

Wir zeigen nun, dass daraus die Lipschitz-Stetigkeit auf $O_{\frac{\rho}{2}}(x)$ folgt. Seien $y_1, y_2 \in O_{\frac{\rho}{2}}(x)$ mit $y_1 \neq y_2$ und setze

$$z := y_1 + \frac{\rho}{2} \frac{y_1 - y_2}{\|y_1 - y_2\|_X} \in O_\rho(x)$$

wegen $\|z - x\|_X \leq \|y_1 - x\|_X + \frac{\rho}{2} < \rho$. Nach Konstruktion ist nun

$$y_1 = \lambda z + (1 - \lambda)y_2 \quad \text{für} \quad \lambda := \frac{\|y_1 - y_2\|_X}{\|y_1 - y_2\|_X + \frac{\rho}{2}} \in (0, 1),$$

so dass wegen der Konvexität von F gilt $F(y_1) \leq \lambda F(z) + (1 - \lambda)F(y_2)$. Daraus folgt zusammen mit der Definition von λ sowie $F(z) \leq M$ und $-F(y_1) \leq m = M - 2F(x)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} F(y_1) - F(y_2) &\leq \lambda(F(z) - F(y_2)) \leq \lambda(2M - 2F(x)) \\ &\leq \frac{2(M - F(x))}{\|y_1 - y_2\|_X + \frac{\rho}{2}} \|y_1 - y_2\|_X \\ &\leq \frac{2(M - F(x))}{\rho/2} \|y_1 - y_2\|_X. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von y_1 und y_2 in der Konstruktion von z erhalten wir damit

$$|F(y_1) - F(y_2)| \leq \frac{2(M - F(x))}{\rho/2} \|y_1 - y_2\|_X \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in O_{\frac{\rho}{2}}(x)$$

und damit die lokale Lipschitz-Stetigkeit mit Konstante $L(x, \rho/2) := 4(M - F(x))/\rho$. \square

Wir folgern daraus die gewünschte Aussage zunächst für skalare Funktionen.

Folgerung 3.9. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig auf $(\text{dom } f)^\circ$.

Beweis. Sei $x \in (\text{dom } f)^\circ$. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a, b] \subset \text{dom } f$. Sei nun $z \in (a, b)$. Da Intervalle konvex sind, existiert ein $\lambda \in (0, 1)$ mit $z = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Aus der Konvexität folgt daher

$$f(z) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\} < \infty.$$

Also ist f in x lokal nach oben beschränkt, und die Behauptung folgt aus [Satz 3.8](#). \square

Mit etwas mehr Aufwand zeigt man, dass die Aussage auch für $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, gilt; siehe z. B. [Brokate 2014, Satz 2.18].

Um daraus den allgemeinen Fall zu erhalten, sind weitere Annahmen an X und F nötig.

Satz 3.10. *Sei X ein Banachraum und $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und unterhalbstetig. Dann ist F auf $(\text{dom } F)^\circ$ lokal Lipschitz-stetig.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage zuerst für den Fall $x = 0 \in (\text{dom } F)^\circ$. Dann ist insbesondere $M := |F(0)| < \infty$. Betrachte nun für $h \in X$ beliebig die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad t \mapsto F(th).$$

Man vergewissert sich leicht, dass f ebenfalls konvex und unterhalbstetig ist mit $0 \in (\text{dom } f)^\circ$. Nach [Folgerung 3.9](#) ist f daher lokal Lipschitz-stetig in 0, d. h. $|f(t) - f(0)| \leq Lt \leq 1$ für $t > 0$ klein genug. Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir also ein $\delta > 0$ mit

$$F(0 + th) \leq |F(0 + th)| = |f(t)| \leq |f(0)| + 1 = M + 1 \quad \text{für alle } t \in [0, \delta],$$

und damit liegt 0 im algebraischen Inneren der Subniveaumenge F_{M+1} , die nach [Lemma 3.3](#) konvex und abgeschlossen ist. Aus [Lemma 1.2](#) folgt nun $0 \in (F_{M+1})^\circ$, es gibt daher ein $\rho > 0$ mit $F(z) \leq M + 1$ für alle $z \in O_\rho(0)$. Also ist F in 0 lokal nach oben beschränkt und daher nach [Satz 3.8](#) lokal Lipschitz-stetig.

Für den allgemeinen Fall $x \in (\text{dom } F)^\circ$ betrachte

$$\tilde{F} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad y \mapsto F(y - x).$$

Wieder vergewissert man sich leicht, dass \tilde{F} ebenfalls konvex und unterhalbstetig ist mit $0 \in (\text{dom } \tilde{F})^\circ$. Also ist wie eben bewiesen \tilde{F} lokal Lipschitz-stetig in einer Umgebung $O_\rho(0)$, woraus folgt

$$|F(y_1) - F(y_2)| = |\tilde{F}(y_1 + x) - \tilde{F}(y_2 + x)| \leq L\|y_1 - y_2\|_X \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in O_\rho(x)$$

und damit die behauptete lokale Lipschitz-Stetigkeit von F . □

4 DAS KONVEXE SUBDIFFERENTIAL

Wir wenden uns nun der Charakterisierung von Minimierern konvexer Funktionen durch ein Fermatsches Prinzip zu. Ein erster Kandidat für den nötigen Ableitungsbegriff ist die Richtungsableitung, denn diese existiert (zumindest in den erweiterten reellen Zahlen) für jede konvexe Funktion.

Lemma 4.1. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und seien $x \in \text{dom } F$ und $h \in X$ gegeben. Dann gilt:

(i) Die Funktion

$$\varphi : (0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad t \mapsto \frac{F(x + th) - F(x)}{t},$$

ist monoton steigend.

(ii) Der Grenzwert $F'(x; h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) \in [-\infty, \infty]$ existiert und erfüllt

$$F'(x; h) \leq F(x + h) - F(x).$$

Beweis. Zu (i): Durch Einsetzen und Umformen sieht man, dass für alle $0 < s < t$ die Bedingung $\varphi(s) \leq \varphi(t)$ äquivalent ist zu

$$F(x + sh) \leq \frac{s}{t}F(x + th) + \left(1 - \frac{s}{t}\right)F(x).$$

Dies folgt aber wegen $x + sh = (1 - \frac{s}{t})x + \frac{s}{t}(x + th)$ aus der Konvexität von F .

Aussage (ii) folgt sofort nun aus (i) wegen

$$F'(x; h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \inf_{t > 0} \varphi(t) \leq \varphi(1) = F(x + h) - F(x). \quad \square$$

Leider liefert dieser Begriff noch nicht das Gewünschte, denn die konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = |t|$ hat ein Minimum in $t = 0$, dort aber nur die Richtungsableitung $f'(0; h) = |h| > 0$ für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt also nicht $f'(0; h) = 0$ für irgendein $h \neq 0$ – aber es gilt zumindest $0 \leq f'(0; h)$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Diese Bedingung wollen wir auf allgemeine normierte Räume verallgemeinern. Dafür betrachten wir für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und $x \in \text{dom } F$ die Menge

$$(4.1) \quad \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq F'(x; h) \text{ für alle } h \in X\}.$$

Diese Menge (die auch leer sein kann!) ist mit Hilfe von [Lemma 4.1](#) auch ohne Richtungsableitung charakterisierbar.

Lemma 4.2. Seien $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und $x \in \text{dom } F$. Dann sind für $x^* \in X^*$ äquivalent

- (i) $\langle x^*, h \rangle_X \leq F'(x; h)$ für alle $h \in X$;
- (ii) $\langle x^*, h \rangle_X \leq F(x + h) - F(x)$ für alle $h \in X$.

Beweis. Gilt (i), so folgt direkt aus Lemma 4.1 (ii), dass für alle $h \in X$ gilt

$$\langle x^*, h \rangle_X \leq F'(x; h) \leq F(x + h) - F(x).$$

Gilt (ii) für alle $h \in X$, so auch für th für alle $h \in X$ und $t > 0$. Division durch t und Grenzübergang liefert dann

$$\langle x^*, h \rangle_X \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} = F'(x; h). \quad \square$$

Führen wir $\tilde{x} = x + h \in X$ ein, so führt die zweite Bedingung auf die folgende Definition. Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $x \in \text{dom } F$ definieren wir das (konvexe) Subdifferential als

$$(4.2) \quad \partial F(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X \leq F(\tilde{x}) - F(x) \text{ für alle } \tilde{x} \in X\}.$$

(Beachten Sie, dass $\tilde{x} \notin \text{dom } F$ zugelassen ist, da dann die Ungleichung trivialerweise erfüllt ist.) Für $x \notin \text{dom } F$ setzen wir $\partial F(x) = \emptyset$. Direkt aus der Definition folgt, dass $\partial F(x)$ konvex und schwach-* abgeschlossen ist. Ein Element $\xi \in \partial F(x)$ heißt *Subgradient*.

Diese Definition liefert nun das Gewünschte.

Satz 4.3. Seien $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\bar{x} \in \text{dom } F$. Dann sind äquivalent:

- (i) $0 \in \partial F(\bar{x})$;
- (ii) $F(\bar{x}) = \min_{x \in X} F(x)$.

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen: Es ist $0 \in \partial F(\bar{x})$ genau dann, wenn gilt

$$0 = \langle 0, \tilde{x} - \bar{x} \rangle_X \leq F(\tilde{x}) - F(\bar{x}) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X,$$

d. h. $F(\bar{x}) \leq F(\tilde{x})$ für alle $\tilde{x} \in X$. □

Dies entspricht auch der geometrischen Anschauung: Für $X = \mathbb{R} = X^*$ beschreibt $\tilde{y} := f(\tilde{x}) = f(x) + \xi(\tilde{x} - x)$ mit $\xi \in \partial f(x)$ eine Tangente an $y = f(x)$ mit Steigung ξ ; die Bedingung $\xi = 0 \in \partial f(\tilde{x})$ bedeutet also, dass f in \bar{x} eine waagerechte Tangente hat.¹

Wir betrachten einige Beispiele. Zunächst ist aus der Konstruktion ersichtlich, dass das Subdifferential die Gâteaux-Ableitung verallgemeinert.

¹Beachten Sie, dass in Satz 4.3 nirgendwo die Konvexität von F eingeht! Tatsächlich charakterisiert $0 \in \partial F(\bar{x})$ die globalen Minimierer jeder Funktion. Nichtkonvexe Funktionen können aber auch lokale Minimierer haben, für die die Subdifferentialinklusion nicht erfüllt ist. Tatsächlich sind (konvexe) Subdifferenziale nichtkonvexer Funktionen in der Regel leer. Dies führt insbesondere für den Beweis einiger Rechenregeln zu Problemen, für die wir in der Tat Konvexität voraussetzen müssen.

Satz 4.4. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und Gâteaux-differenzierbar in x . Dann ist $\partial F(x) = \{DF(x)\}$.

Beweis. Nach Definition der Gâteaux-Ableitung gilt

$$\langle DF(x), h \rangle_X = DF(x)h = F'(x; h) \quad \text{für alle } h \in X.$$

Aus Lemma 4.2 folgt nun mit $\tilde{x} := x + h$ sofort $DF(x) \in \partial F(x)$.

Umgekehrt folgt aus $\xi \in \partial F(x)$ mit $h := \tilde{x} - x \in X$, dass gilt

$$\langle \xi, h \rangle_X \leq F'(x; h) = \langle DF(x), h \rangle_X.$$

Da $\tilde{x} \in X$ beliebig war, gilt dies für alle $h \in X$. Supremum über alle h mit $\|h\|_X \leq 1$ liefert dann $\|\xi - DF(x)\|_{X^*} \leq 0$, d. h. $\xi = DF(x)$. \square

Natürlich möchten wir auch Subdifferenziale von Funktionen haben, die nicht differenzierbar sind. Das kanonische Beispiel ist die Norm $\|x\|_X$ in einem normierten Raum, die ja in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Satz 4.5. Für $x \in X$ ist

$$\partial(\|\cdot\|_X)(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle_X = \|x\|_X \text{ und } \|x^*\|_{X^*} = 1\} & \text{falls } x \neq 0, \\ B_{X^*} & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Beweis. Für $x = 0$ ist nach Definition $\xi \in \partial(\|\cdot\|_X)(x)$ genau dann, wenn gilt

$$\langle \xi, \tilde{x} \rangle_X \leq \|\tilde{x}\|_X \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X \setminus \{0\}$$

(für $\tilde{x} = 0$ ist die Ungleichung trivial). Dies ist aber wegen der Definition der Operatornorm äquivalent mit $\|\xi\|_{X^*} \leq 1$.

Sei nun $x \neq 0$ und betrachte $\xi \in \partial(\|\cdot\|_X)(x)$. Indem wir nacheinander $\tilde{x} = 0$ und $\tilde{x} = 2x$ in die Definition (4.2) einsetzen, erhalten wir

$$\|x\|_X \leq \langle \xi, x \rangle_X = \langle \xi, 2x - x \rangle \leq \|2x\|_X - \|x\|_X = \|x\|_X,$$

d. h. $\langle \xi, x \rangle_X = \|x\|_X$. Analog haben wir für alle $\tilde{x} \in X$, dass gilt

$$\langle \xi, \tilde{x} \rangle_X = \langle \xi, (\tilde{x} + x) - x \rangle_X \leq \|\tilde{x} + x\|_X - \|x\|_X \leq \|\tilde{x}\|_X,$$

woraus wie im Fall $x = 0$ folgt $\|\xi\|_{X^*} \leq 1$. Für $\tilde{x} = x/\|x\|_X$ gilt nun

$$\langle \xi, \tilde{x} \rangle_X = \|x\|_X^{-1} \langle \xi, x \rangle_X = \|x\|_X^{-1} \|x\|_X = 1.$$

Also ist tatsächlich $\|\xi\|_{X^*} = 1$.

Es sei umgekehrt $x^* \in X^*$ mit $\langle x^*, x \rangle_X = \|x\|_X$ und $\|x^*\|_{X^*} = 1$. Dann gilt mit (1.1) für alle $\tilde{x} \in X$ die Relation

$$\langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X = \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X - \langle x^*, x \rangle_X \leq \|\tilde{x}\|_X - \|x\|_X,$$

und daher nach Definition $x^* \in \partial(\|\cdot\|_X)(x)$ \square

Für den Fall $X = \mathbb{R}$ erhalten wir daraus das Subdifferential der Betragsfunktion als

$$(4.3) \quad \partial(|\cdot|)(t) = \text{sign}(t) := \begin{cases} \{1\} & \text{falls } t > 0, \\ \{-1\} & \text{falls } t < 0, \\ [-1, 1] & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

Schließlich haben wir auch eine einfache Darstellung für das Subdifferential der Indikatorfunktion einer konvexen Menge $C \subset X$. Für $x \in C = \text{dom } \delta_C$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} x^* \in \partial\delta_C(x) &\Leftrightarrow \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X \leq \delta_C(\tilde{x}) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X \\ &\Leftrightarrow \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X \leq 0 \quad \text{für alle } \tilde{x} \in C, \end{aligned}$$

da die Ungleichung für alle $\tilde{x} \notin C$ trivialerweise erfüllt ist. Die Menge $\partial\delta_C(x)$ nennt man auch *Normalenkegel* an C in x . Wieder ist das Beispiel $X = \mathbb{R}$ erhellend: Betrachte $C = [-1, 1]$ und $t \in C$. Dann ist $\xi \in \partial\delta_{[-1,1]}(t)$ genau dann, wenn $\xi(\tilde{t} - t) \leq 0$ für alle $\tilde{t} \in [-1, 1]$ gilt. Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $t = 1$. Dann ist $\tilde{t} - t \in [-2, 0]$ und damit gilt die Bedingung genau dann, wenn $\xi \geq 0$ ist.
2. Fall: $t = -1$. Dann ist $\tilde{t} - t \in [0, 2]$ und damit gilt die Bedingung genau dann, wenn $\xi \leq 0$ ist.
3. Fall: $t \in (-1, 1)$. Dann kann $\tilde{t} - t$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen, und damit muss $\xi = 0$ sein.

Also ist

$$\partial\delta_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{falls } t = 1, \\ (-\infty, 0] & \text{falls } t = -1, \\ \{0\} & \text{falls } t \in (-1, 1), \\ \emptyset & \text{falls } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Dies entspricht den aus der linearen Optimierung bekannten *Komplementaritätsbedingungen* für Lagrange-Multiplikatoren zu den Ungleichungen $-1 \leq t \leq 1$.

Für konvexe Integralfunktionale lässt sich das Subdifferential punktweise charakterisieren. Im Folgenden sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $p^{-1} + q^{-1} = 1$, d. h. $L^q(\Omega) \cong L^p(\Omega)^*$ für $1 \leq p < \infty$, angenommen.

Lemma 4.6. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig und $F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $1 \leq p < \infty$ wie in Lemma 3.4. Dann ist für alle $u \in \text{dom } F$ für $q = \frac{p}{p-1}$

$$\partial F(u) = \{u^* \in L^q(\Omega) : u^*(x) \in \partial f(u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega\}.$$

Beweis. Sei $u \in \text{dom } F$, d. h. $f \circ u \in L^1(\Omega)$. Gilt für $u^* \in L^q(\Omega)$ nun $u^*(x) \in \partial f(u(x))$ fast überall, so folgt daraus sofort für alle $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$ durch Integration

$$F(\tilde{u}) - F(u) = \int_{\Omega} f(\tilde{u}(x)) - f(u(x)) dx \geq \int_{\Omega} u^*(x)(\tilde{u}(x) - u(x)) dx = \langle u^*, \tilde{u} - u \rangle_{L^p}.$$

Sei umgekehrt $u^* \in \partial F(u)$. Dann gilt nach Definition

$$\int_{\Omega} u^*(x)(\tilde{u}(x) - u(x)) dx \leq \int_{\Omega} f(\tilde{u}(x)) - f(u(x)) dx \quad \text{für alle } \tilde{u} \in L^p(\Omega).$$

Sei nun $t \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $A \subset \Omega$ eine beliebige messbare Menge. Für die Wahl

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} t & \text{falls } x \in A, \\ u(x) & \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

folgt wegen $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$ aus der obigen Ungleichung

$$\int_A u^*(x)(t - u(x)) dx \leq \int_A f(t) - f(u(x)) dx.$$

Da A beliebig war, muss gelten

$$u^*(x)(t - u(x)) \leq f(t) - f(u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Da $t \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt daraus $u^*(x) \in \partial u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. □

Analog zeigt man für $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $F(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$ und $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex, dass für $x \in \text{dom } F$ gilt

$$\partial F(x) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \xi_i \in \partial f_i(x_i), \quad 1 \leq i \leq N \right\}.$$

Zusammen mit den obigen Beispielen erhält man daraus die Subdifferenziale der Norm $\|\cdot\|_1$ sowie der Indikatorfunktion der Einheitskugel bezüglich der Supremumsnorm in \mathbb{R}^N .

Subdifferenziale weiterer Funktionale erhält man durch Rechenregeln. Es ist naheliegend, dass diese umso aufwändiger zu beweisen sind, je schwächer der Differenzierbarkeitsbegriff ist (d. h. je mehr Funktionen in diesem Sinne differenzierbar sind). Die ersten beiden Regeln folgen noch direkt aus der Definition.

Lemma 4.7. Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und $x \in \text{dom } F$ gilt

(i) $\partial(\lambda F)(x) = \lambda(\partial F(x)) := \{\lambda\xi : \xi \in \partial F(x)\}$ für $\lambda > 0$;

(ii) $\partial F(\cdot + x_0)(x) = \partial F(x + x_0)$ für $x_0 \in X$ mit $x + x_0 \in \text{dom } F$.

Schon die Summenregel ist deutlich aufwändiger.

Satz 4.8 (Summenregel). Seien $F, G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Dann gilt für alle $x \in \text{dom } F \cap \text{dom } G$

$$\partial F(x) + \partial G(x) \subset \partial(F + G)(x).$$

Existiert ein $x_0 \in \text{dom } F \cap \text{dom } G$ mit F stetig in x_0 , so gilt Gleichheit.

Beweis. Die Inklusion folgt direkt aus der Definition des Subdifferentials durch Addition. Seien daher $x \in \text{dom } F \cap \text{dom } G$ und $\xi \in \partial(F + G)(x)$, erfüllen also

$$(4.4) \quad \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X \leq (F(\tilde{x}) + G(\tilde{x})) - (F(x) + G(x)) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X.$$

Unser Ziel ist nun, ähnlich wie im Beweis von [Lemma 3.6](#) mit Hilfe der Charakterisierung konvexer Funktionale durch ihren Epigraphen und des Trennungssatzes ein lineares Funktional $\zeta \in \partial G(x) \subset X^*$ zu finden mit $\xi - \zeta \in \partial F(x)$, d. h.

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}) - F(x) - \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X &\geq \langle \zeta, x - \tilde{x} \rangle_X \quad \text{für alle } \tilde{x} \in \text{dom } F, \\ G(x) - G(\tilde{x}) &\leq \langle \zeta, x - \tilde{x} \rangle_X \quad \text{für alle } \tilde{x} \in \text{dom } G. \end{aligned}$$

Wir definieren dafür die Mengen

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{(\tilde{x}, t - (F(x) - \langle \xi, x \rangle_X)) : F(\tilde{x}) - \langle \xi, \tilde{x} \rangle_X \leq t\}, \\ C_2 &:= \{(\tilde{x}, G(x) - t) : G(\tilde{x}) \leq t\}, \end{aligned}$$

d. h.

$$C_1 = \text{epi}(F - \xi) - (0, F(x) - \langle \xi, x \rangle_X), \quad C_2 = -(\text{epi } G - (0, G(x))).$$

Da es sich um verschobene (und, für C_2 , gespiegelte) Epigraphen eigentlicher konvexer Funktionen (lineare Funktionale sind konvex) handelt, sind C_1 und C_2 nichtleer und konvex. Weiter ist x_0 ein innerer Punkt von $\text{dom } F = \text{dom}(F - \xi)$ (sonst wäre F nicht stetig in x_0) und damit (x_0, α) für α groß genug ein innerer Punkt von C_1 . Das Innere $(C_1)^o$ von C_1 ist also nichtleer. Bleibt zu zeigen, dass $(C_1)^o$ und C_2 disjunkt sind. Dafür sei $(\tilde{x}, \alpha) \in (C_1)^o \cap C_2$, für das nach Definition gilt

$$F(\tilde{x}) - F(x) - \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X < \alpha \leq G(x) - G(\tilde{x}),$$

im Widerspruch zu [\(4.4\)](#). [Folgerung 1.6](#) liefert also ein $(x^*, s) \in (X \times \mathbb{R})^* \setminus \{(0, 0)\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(4.5) \quad \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X + s(t - (F(x) - \langle \xi, x \rangle_X)) \leq \lambda, \quad \tilde{x} \in \text{dom } F, t \geq F(\tilde{x}) - \langle \xi, \tilde{x} \rangle_X,$$

$$(4.6) \quad \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X + s(G(x) - t) \geq \lambda, \quad \tilde{x} \in \text{dom } G, t \geq G(\tilde{x}).$$

Wir zeigen nun, dass $s < 0$ ist. Für $s = 0$ folgt mit $\tilde{x} = x_0 \in \text{dom } F \cap \text{dom } G$ sofort der Widerspruch

$$\langle x^*, x_0 \rangle_X < \lambda \leq \langle x^*, x_0 \rangle_X,$$

da (x_0, α) für α groß genug innerer Punkt von C_1 ist und daher nach [Satz 1.5](#) die Trennung sogar mit strikter Ungleichung erfüllt ist. Gilt $s > 0$, so ist für $t > F(x) - \langle \xi, x \rangle_X$ die Klammer in [\(4.5\)](#) positiv, und $t \rightarrow \infty$ mit \tilde{x} fest führt zum Widerspruch zur Beschränktheit durch λ .

Also ist $s < 0$, und aus [\(4.5\)](#) mit $t = F(\tilde{x}) - \langle \xi, \tilde{x} \rangle_X$ und aus [\(4.6\)](#) mit $t = G(\tilde{x})$ folgt

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}) - F(x) + \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X &\geq s^{-1}(\lambda - \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X), \quad \text{für alle } \tilde{x} \in \text{dom } F, \\ G(x) - G(\tilde{x}) &\leq s^{-1}(\lambda - \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X), \quad \text{für alle } \tilde{x} \in \text{dom } G. \end{aligned}$$

Setzen wir $\tilde{x} = x \in \text{dom } F \cap \text{dom } G$ in beiden Ungleichungen, so folgt sofort $\lambda = \langle x^*, x \rangle_X$. Damit ist $\zeta = s^{-1}x^*$ das gewünschte Funktional mit $(\xi - \zeta) \in \partial F(x)$ und $\zeta \in \partial G(x)$, d. h. $\xi \in \partial F(x) + \partial G(x)$. \square

Daraus erhält man per Induktion Summenregeln für beliebig viele Summanden (wobei in x_0 alle bis auf ein Summand stetig sein müssen). Analog beweist man eine Kettenregel für lineare Operatoren.

Satz 4.9 (Kettenregel). *Seien X, Y normierte Räume, $A \in L(X, Y)$, und $F : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Dann gilt für alle $x \in \text{dom}(F \circ A)$*

$$\partial(F \circ A)(x) \supset A^* \partial F(Ax) := \{A^* y^* : y^* \in \partial F(Ax)\}.$$

Existiert ein $x_0 \in X$ so, dass F stetig in Ax_0 ist, so gilt Gleichheit.

Beweis. Die Inklusion folgt wieder direkt aus der Definition: Für $\eta \in \partial F(Ax) \subset Y^*$ gilt insbesondere für alle $\tilde{y} = A\tilde{x} \in Y$ mit $\tilde{x} \in X$, dass gilt

$$F(A\tilde{x}) - F(Ax) \geq \langle \eta, A\tilde{x} - Ax \rangle_Y = \langle A^* \eta, \tilde{x} - x \rangle_X,$$

d. h. $\xi := A^* \eta \in \partial(F \circ A) \subset X^*$.

Sei nun $x \in \text{dom}(F \circ A)$ und $\xi \in \partial(F \circ A)(x)$, d. h.

$$F(Ax) + \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X \leq F(A\tilde{x}) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X.$$

Analog zur Summenregel könnten wir nun ein $\eta \in \partial F(Ax)$ mit $\xi = A^* \eta$ durch Trennung von $\text{epi } F$ und

$$\text{graph } A = \{(x, Ax) : x \in X\} \subset X \times Y$$

konstruieren. Der Abwechslung halber (und weil die verwendete Technik des „Liftens“ breiteren Nutzen hat) wenden wir stattdessen die Summenregel an auf

$$H : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad H(x, y) := F(y) + \delta_{\text{graph } A}(x, y).$$

Da A linear ist, ist $\text{graph } A$ und damit $\delta_{\text{graph } A}$ konvex. Weiter ist nach Annahme $Ax \in \text{dom } F$ und damit $(x, Ax) \in \text{dom } H$.

Zuerst zeigen wir, dass $\xi \in \partial(F \circ A)(x)$ genau dann gilt, wenn $(\xi, 0) \in \partial H(x, Ax)$ ist. Sei dafür $(\xi, 0) \in \partial H(x, Ax)$. Dann gilt für alle $\tilde{x} \in X, \tilde{y} \in Y$

$$\langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X + \langle 0, \tilde{y} - Ax \rangle_Y \leq F(\tilde{y}) - F(Ax) + \delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \delta_{\text{graph } A}(x, Ax).$$

Insbesondere gilt dies für alle $\tilde{y} \in \text{ran}(A) = \{A\tilde{x} : \tilde{x} \in X\}$. Also ist wegen $\delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, A\tilde{x}) = 0$

$$\langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X \leq F(A\tilde{x}) - F(Ax) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X,$$

d. h. $\xi \in \partial(F \circ A)(x)$. Sei umgekehrt $\xi \in \partial(F \circ A)(x)$. Dann ist für alle $\tilde{x} \in X$ und $\tilde{y} \in Y$ wegen $\delta_{\text{graph } A}(x, Ax) = 0$ und $\delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X + \langle 0, \tilde{y} - Ax \rangle_Y &= \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X \\ &\leq F(A\tilde{x}) - F(Ax) + \delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \delta_{\text{graph } A}(x, Ax) \\ &= F(\tilde{y}) - F(Ax) + \delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \delta_{\text{graph } A}(x, Ax), \end{aligned}$$

da für $\tilde{y} \neq A\tilde{x}$ beide Seiten der letzten Gleichung unendlich sind. Also ist $(\xi, 0) \in \partial H(x, Ax)$.

Da F stetig ist in Ax_0 , ist $(x, y) \mapsto F(y)$ stetig in $(x_0, Ax_0) \in \text{graph } A = \text{dom } \delta_{\text{graph } A}$. Wir können daher [Satz 4.8](#) anwenden und erhalten

$$(\xi, 0) \in \partial H(x, Ax) = \partial F(Ax) + \partial \delta_{\text{graph } A}(x, Ax).$$

Also ist $(\xi, 0) = (x^*, y^*) + (w^*, z^*)$ für ein $(x^*, y^*) \in \partial F(Ax)$ (mit F wieder aufgefasst als $(x, y) \mapsto F(y)$) und ein $(w^*, z^*) \in \partial \delta_{\text{graph } A}(x, Ax)$.

Nun ist $(x^*, y^*) \in \partial F(Ax)$ genau dann, wenn gilt

$$\langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X + \langle y^*, \tilde{y} - Ax \rangle_Y \leq F(\tilde{y}) - F(Ax) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X, \tilde{y} \in Y$$

ist. Festhalten von $\tilde{x} = x$ bzw. $\tilde{y} = Ax$ liefert $y^* \in \partial F(Ax)$ (wobei nun wieder F als Abbildung auf Y aufgefasst wird) und $x^* = 0$. Weiter ist $(w^*, z^*) \in \partial \delta_{\text{graph } A}(x, Ax)$ genau dann, wenn

$$\langle w^*, \tilde{x} - x \rangle_X + \langle z^*, \tilde{y} - Ax \rangle_Y \leq 0 \quad \text{für alle } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \text{graph } A,$$

d. h. für alle $\tilde{x} \in X$ und $\tilde{y} = A\tilde{x}$. Also ist

$$\langle w^* + A^*z^*, \tilde{x} - x \rangle_X \leq 0 \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X$$

und damit $w^* = -A^*z^*$. Zusammen erhalten wir

$$(\xi, 0) = (0, y^*) + (-A^*z^*, z^*),$$

woraus $y^* = -z^*$ und daher $\xi = -A^*z^* = A^*y^*$ mit $y^* \in \partial F(Ax)$ folgt, was zu zeigen war. \square

Damit erhalten wir eine Charakterisierung von Minimierern konvexer Funktionen unter (konvexen) Nebenbedingungen.

Folgerung 4.10. Sei $U \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen, und sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Existiert ein $x_0 \in U^\circ \cap \text{dom } F$, so ist $\bar{x} \in U$ Lösung von

$$\min_{x \in U} F(x)$$

genau dann, wenn ein $\xi \in X^*$ existiert mit

$$(4.7) \quad \begin{cases} -\xi \in \partial F(\bar{x}), \\ \langle \xi, \tilde{x} - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \tilde{x} \in U. \end{cases}$$

Beweis. Da F und U konvex sind, können wir [Satz 4.3](#) auf $J := F + \delta_U$ anwenden; und da δ_U in $x_0 \in U^\circ$ stetig ist, können wir auch die [Summenregel](#) anwenden. Also hat F in \bar{x} ein Minimum genau dann, wenn gilt

$$0 \in \partial J(\bar{x}) = \partial F(\bar{x}) + \partial \delta_U(\bar{x}).$$

Zusammen mit der Charakterisierung des Subdifferentials der Indikatorfunktion als Normalenkegel erhält man damit [\(4.7\)](#). \square

Für eine Gâteaux-differenzierbare (und damit stetige) Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt [\(4.7\)](#) die klassischen *Karush–Kuhn–Tucker-Bedingungen*; die Existenz des inneren Punktes $x_0 \in U^\circ$ entspricht dabei genau der *Slater-Bedingung*.

5 FENCHEL-DUALITÄT

Ein Grund für die Nützlichkeit des konvexen Subdifferentials ist, wie wir sehen werden, seine Verbindung mit der Fenchel–Legendre-Transformation. Sei X ein normierter Raum und $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich. Dann ist die *Fenchel-Konjugierte* zu F definiert als

$$F^* : X^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad F^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - F(x).$$

(Da $\text{dom } F \neq \emptyset$ angenommen ist, gilt $F^*(x^*) > -\infty$ für alle $x^* \in X^*$, also ist die Definition sinnvoll.) Aus [Lemma 3.5 \(v\)](#) und [Lemma 2.2 \(v\)](#) folgt sofort, dass F^* für eigentliche F stets konvex und unterhalbstetig ist. Ist F nach unten durch ein affin-lineares Funktional beschränkt, so ist auch F^* eigentlich. Die Definition liefert außerdem sofort die *Fenchel–Young-Ungleichung*

$$(5.1) \quad \langle x^*, x \rangle_X \leq F(x) + F^*(x^*) \quad \text{für alle } x \in X, x^* \in X^*.$$

Anschaulich ist $F^*(x^*)$ der (negative) affine Anteil der Tangente an F (im Punkt x , in dem das Supremum angenommen wird) mit der Steigung x^* . Analog definieren wir für $F : X^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die Fenchel-Konjugierte als

$$F^* : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad F^*(x) = \sup_{x^* \in X^*} \langle x^*, x \rangle_X - F(x^*).$$

Durch diese Konvention ist die *Bikonjugierte* $F^{**} := (F^*)^*$ selbst für nicht-reflexive Räume wieder auf X definiert (anstatt auf X^{**}). Anschaulich ist F^{**} die untere konvexe Hülle von F , die für konvexe Funktionen nach [Lemma 3.6](#) ja mit F übereinstimmt.

Satz 5.1 (Fenchel–Moreau–Rockafellar). Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich. Dann gilt

- (i) $F^{**} \leq F$;
- (ii) $F^{**} = F^\Gamma$;
- (iii) $F^{**} = F$ genau dann, wenn F konvex und unterhalbstetig ist.

Beweis. Für Aussage (i) nehmen wir in der Fenchel–Young-Ungleichung (5.1) das Supremum über alle $x^* \in X^*$ und erhalten

$$F(x) \geq \sup_{x^* \in X^*} \langle x^*, x \rangle_X - F^*(x^*) = F^{**}(x).$$

Für (ii) stellen wir zuerst fest, dass F^{**} nach Definition der Fenchel-Konjugierten konvex und unterhalbstetig und wegen (i) auch eigentlich ist. Also gilt nach Lemma 3.6

$$F^{**}(x) = (F^{**})^\Gamma(x) = \sup \{a(x) : a : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ affin mit } a \leq F^{**}\}.$$

Wir zeigen nun, dass wir auf der rechten Seite F^{**} durch F ersetzen können. Sei dafür $a(x) = \langle x^*, x \rangle_X - \alpha$ für $x^* \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Gilt $a \leq F^{**}$, so folgt aus (i) sofort $a \leq F$. Gilt umgekehrt $a \leq F$, so ist $\langle x^*, x \rangle_X - F(x) \leq \alpha$ für alle $x \in X$, und durch Supremum über alle $x \in X$ erhalten wir $\alpha \geq F^*(x^*)$. Daraus folgt nun nach Definition von F^{**}

$$a(x) = \langle x^*, x \rangle_X - \alpha \leq \langle x^*, x \rangle_X - F^*(x^*) \leq F^{**}(x) \quad \text{für alle } x \in X,$$

d. h. $a \leq F^{**}$.

Aussage (iii) folgt nun sofort aus (ii) und Lemma 3.6. □

Wir betrachten wieder relevante Beispiele.

Beispiel 5.2.

- (i) Sei X ein Hilbertraum und $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2$. Wir identifizieren X über den Satz von Fréchet–Riesz mit seinem Dualraum X^* , so dass die duale Paarung durch das Skalarprodukt ausgedrückt werden kann. Da F Fréchet-differenzierbar ist mit Gradient $\nabla F(x) = x$, muss die Lösung \bar{x} von

$$\sup_{x \in X} (x^*, x)_X - \frac{1}{2}(x, x)_X$$

das Fermat-Prinzip erfüllen, d. h. $x^* = \bar{x}$. Einsetzen und vereinfachen liefert die Konjugierte

$$F^* : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad F^*(x^*) = \frac{1}{2}\|x^*\|_X^2.$$

- (ii) Sei B_X die Einheitskugel im normierten Raum X und setze $F = \delta_{B_X}$. Dann ist für $x^* \in X^*$

$$(\delta_{B_X})^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - \delta_{B_X}(x) = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle x^*, x \rangle_X = \|x^*\|_{X^*}.$$

Analog zeigt man unter Verwendung der Definition der Konjugierten im Dualraum und Folgerung 1.7, dass $(\delta_{B_{X^*}})^*(x) = \|x\|_X$ ist.

(iii) Sei X ein normierter Raum und setze $F(x) = \|x\|_X$. Für $x^* \in X^*$ unterscheiden wir nun zwei Fälle:

1. Fall: $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$. Dann gilt mit (1.1) für alle $x \in X$ dass $\langle x^*, x \rangle_X - \|x\|_X \leq 0$ ist. Weiterhin ist $\langle x^*, 0 \rangle = 0 = \|0\|_X$. Also gilt

$$F^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - \|x\|_X = 0.$$

2. Fall: $\|x^*\|_{X^*} > 1$. Nach Definition der Norm im Dualraum existiert dann ein $x_0 \in X$ mit $\langle x^*, x_0 \rangle_X > \|x_0\|_X$. Lassen wir daher $t \rightarrow \infty$ gehen in

$$0 < t(\langle x^*, x_0 \rangle_X - \|x_0\|_X) = \langle x^*, tx_0 \rangle_X - \|tx_0\|_X \leq F^*(x^*),$$

so erhalten wir $F^*(x^*) = \infty$.

Zusammen ergibt dies $F^* = \delta_{B_{X^*}}$. Wie oben zeigt man analog, dass $(\|\cdot\|_{X^*})^* = \delta_{B_X}$ ist.

Wir notieren noch einige nützliche Rechenregeln.

Lemma 5.3. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich. Dann ist

(i) $(\alpha F)^* = \alpha F^* \circ (\alpha^{-1} \text{Id})$ für $\alpha > 0$;

(ii) $(F(\cdot + x_0) + \langle x_0^*, \cdot \rangle_X)^* = F^*(\cdot - x_0^*) - \langle \cdot - x_0^*, x_0 \rangle_X$ für alle $x_0 \in X, x_0^* \in X^*$;

(iii) $(F \circ A)^* = F^* \circ A^{-*}$ für $A \in L(Y, X)$ stetig invertierbar und $A^{-*} := (A^{-1})^*$.

Beweis. Die Regeln folgen direkt aus den Eigenschaften des Supremums.

Aussage (i) gilt wegen $\alpha > 0$ und

$$(\alpha F)^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\alpha \langle \alpha^{-1} x^*, x \rangle_X - \alpha F(x)) = \alpha \sup_{x \in X} (\langle \alpha^{-1} x^*, x \rangle_X - F(x)) = \alpha F^*(\alpha^{-1} x^*).$$

Aussage (ii) gilt wegen $\{x + x_0 : x \in X\} = X$ und

$$\begin{aligned} (F(\cdot + x_0) + \langle x_0^*, \cdot \rangle_X)^*(x^*) &= \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - F(x^* + x_0) - \langle x_0^*, x_0 \rangle_X \\ &= \sup_{x \in X} (\langle x^* - x_0^*, x + x_0 \rangle_X - F(x^* + x_0)) - \langle x^* - x_0^*, x_0 \rangle_X \\ &= \sup_{\tilde{x} = x + x_0, x \in X} (\langle x^* - x_0^*, \tilde{x} \rangle_X - F(\tilde{x})) - \langle x^* - x_0^*, x_0 \rangle_X \\ &= F^*(x^* - x_0^*) - \langle x^* - x_0^*, x_0 \rangle_X. \end{aligned}$$

Aussage (iii) gilt wegen $X = \text{ran } A$ und

$$\begin{aligned} (F \circ A)^*(y^*) &= \sup_{y \in Y} \langle y^*, A^{-1}Ay \rangle_Y - F(Ay) \\ &= \sup_{x = Ay, y \in Y} \langle A^{-*}y^*, x \rangle_X - F(x) = F^*(A^{-*}y^*). \end{aligned}$$

□

Analog zu Lemma 4.6 zeigt man, dass sich auch die Fenchel-Konjugierte punktweise berechnen lässt; siehe z. B. [Ekeland & Témam 1999, Proposition IV.1.2].

Lemma 5.4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich und unterhalbstetig, und sei $F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $1 \leq p < \infty$ wie in Lemma 3.4. Dann ist für $q = \frac{p}{p-1}$

$$F^* : L^q(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad F^*(u^*) = \int_{\Omega} f^*(u^*(x)) \, dx.$$

Die Definition der Fenchel-Konjugierten ist auf besondere Weise verträglich mit der des Subdifferentials.

Lemma 5.5. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Dann sind äquivalent für $x \in X$ und $x^* \in X^*$:

- (i) $\langle x^*, x \rangle_X = F(x) + F^*(x^*);$
- (ii) $x^* \in \partial F(x);$
- (iii) $x \in \partial F^*(x^*).$

Beweis. Gilt (i), so folgt aus der Definition von F^* als Supremum

$$(5.2) \quad \langle x^*, x \rangle_X - F(x) = F^*(x^*) \geq \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X - F(\tilde{x}) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X,$$

was nach Definition äquivalent ist zu $x^* \in \partial F(x)$. Umgekehrt ergibt Supremum über alle $\tilde{x} \in X$ auf beiden Seiten von (5.2)

$$\langle x^*, x \rangle_X \geq F(x) + F^*(x^*),$$

und zusammen mit der Fenchel-Young-Ungleichung (5.1) folgt (i).

Analog erhält man aus (i) zusammen mit Satz 5.1 für alle $\tilde{x}^* \in X^*$ die Ungleichung

$$\langle x^*, x \rangle_X - F^*(x^*) = F(x) = F^{**}(x) \geq \langle \tilde{x}^*, x \rangle - F^*(\tilde{x}^*),$$

woraus wie oben die Äquivalenz von (i) und (iii) folgt. □

Bemerkung. Ist X nicht reflexiv, so ist dabei $x \in \partial F^*(x^*) \subset X^{**}$ über die kanonische Injektion aufzufassen, d. h. via

$$\langle J(x), \tilde{x}^* - x^* \rangle_{X^*} = \langle \tilde{x}^* - x^*, x \rangle_X \leq F^*(\tilde{x}^*) - F^*(x^*) \quad \text{für alle } \tilde{x}^* \in X^*.$$

Gleichheit in der Fenchel-Young-Ungleichung (oder äquivalent die Subdifferentialinklusion (ii)) garantiert also in (iii) die Existenz eines Subgradienten in $X \subset X^{**}$ und nicht nur in X^{**} ; umgekehrt ist in (iii) die Existenz eines Subgradienten in $X \subset X^{**}$ notwendig für die Gleichheit (und damit (ii)). (Analoges gilt für $F : X^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $F^* : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.)

Lemma 5.5 spielt die Rolle des „Satzes von der konvexen Umkehrfunktion“. Damit kann man insbesondere das Subdifferential einer komplizierten Norm durch das (einfachere) der konjugierten Indikatorfunktion ersetzen. Hat man zum Beispiel ein Problem der Form

$$(5.3) \quad \inf_{x \in X} F(x) + G(Ax)$$

für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $G : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex, und unterhalbstetig sowie $A \in L(X, Y)$, so können wir G mit Hilfe von **Satz 5.1** ersetzen durch die Definition von G^{**} und erhalten

$$\inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*).$$

Dürften wir nun \inf und \sup vertauschen, so könnten wir schreiben (mit $\inf F = -\sup(-F)$)

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*) &= \sup_{y^* \in Y^*} \inf_{x \in X} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*) \\ &= \sup_{y^* \in Y^*} - \left(\sup_{x \in X} -F(x) + \langle -A^* y^*, x \rangle_X \right) - G^*(y^*). \end{aligned}$$

Einsetzen der Definition von F^* ergibt dann das *duale Problem*

$$(5.4) \quad \sup_{y^* \in Y^*} -F^*(-A^* y^*) - G^*(y^*).$$

Als Nebeneffekt haben wir den Operator A zwischen den Funktionalen verschoben.

Der folgende Satz nutzt auf elegante Weise das Fermat-Prinzip, Summen- und Kettenregel sowie die Fenchel-Young-Gleichung, um hinreichende Bedingungen für die Vertauschbarkeit zu geben.

Satz 5.6 (Fenchel-Rockafellar). *Seien X, Y normierte Räume, $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $G : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig, und $A \in L(X, Y)$. Gelte weiterhin:*

- (i) *das primale Problem (5.3) hat eine Lösung $\bar{x} \in X$;*
- (ii) *es existiert ein $x_0 \in \text{dom } F \cap \text{dom}(G \circ A)$ so dass G stetig ist in Ax_0 .*

Dann hat das duale Problem (5.4) eine Lösung $\bar{y}^ \in Y^*$ und es gilt*

$$(5.5) \quad \min_{x \in X} F(x) + G(Ax) = \max_{y^* \in Y^*} -F^*(-A^* y^*) - G^*(y^*).$$

Weiterhin sind \bar{x} und \bar{y}^ Lösungen von (5.3) bzw. (5.4) genau dann, wenn gilt*

$$(5.6) \quad \begin{cases} -A^* \bar{y}^* \in \partial F(\bar{x}), \\ \bar{y}^* \in \partial G(A\bar{x}). \end{cases}$$

Beweis. Nach [Satz 4.3](#) ist $\bar{x} \in X$ genau dann eine Lösung von (5.3), wenn $0 \in \partial(F + G \circ A)(\bar{x})$ gilt. Wegen Voraussetzung (ii) sind [Satz 4.8](#) und [Satz 4.9](#) anwendbar; wir erhalten also

$$0 \in \partial(F + G \circ A)(\bar{x}) = \partial F(\bar{x}) + A^* \partial G(A\bar{x})$$

und damit die Existenz eines $\bar{y}^* \in \partial G(A\bar{x})$ mit $-A^* \bar{y}^* \in \partial F(\bar{x})$, d. h. (5.6) ist erfüllt.

Aus (5.6) folgt nun mit [Lemma 5.5](#) die Gleichheit in den Fenchel–Youngschen Ungleichungen für F und G , d. h.

$$(5.7) \quad \begin{cases} \langle -A^* \bar{y}^*, \bar{x} \rangle_X = F(\bar{x}) + F^*(-A^* \bar{y}^*), \\ \langle \bar{y}^*, A\bar{x} \rangle_Y = G(A\bar{x}) + G^*(\bar{y}^*). \end{cases}$$

Durch Summieren beider Gleichungen erhalten wir

$$(5.8) \quad F(\bar{x}) + G(A\bar{x}) = -F^*(-A^* \bar{y}^*) - G^*(\bar{y}^*).$$

Es bleibt zu zeigen, dass \bar{y}^* Lösung von (5.4) ist. Setze dafür

$$L : X \times Y^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad L(x, y^*) = F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*).$$

Dann gilt für alle $\tilde{x} \in X$ und $\tilde{y}^* \in Y^*$ stets

$$\sup_{y^* \in Y^*} L(\tilde{x}, y^*) \geq L(\tilde{x}, \tilde{y}^*) \geq \inf_{x \in X} L(x, \tilde{y}^*),$$

und damit (Infimum über alle \tilde{x} in der ersten und Supremum über alle \tilde{y}^* in der zweiten Ungleichung)

$$\inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} L(x, y^*) \geq \sup_{y^* \in Y^*} \inf_{x \in X} L(x, y^*).$$

Also ist

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) + G(A\bar{x}) &= \inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*) \\ &\geq \sup_{y^* \in Y^*} \inf_{x \in X} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*) \\ &= \sup_{y^* \in Y^*} -F^*(-A^* y^*) - G^*(y^*). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Gleichung (5.8) erhalten wir damit

$$-F^*(-A^* \bar{y}^*) - G^*(\bar{y}^*) = F(\bar{x}) + G(A\bar{x}) \geq \sup_{y^* \in Y^*} -F^*(-A^* y^*) - G^*(y^*),$$

d. h. \bar{y}^* ist Lösung von (5.4). Damit folgt aus (5.8) auch (5.5).

Sind schließlich $\bar{x} \in X$ und $\bar{y}^* \in Y^*$ Lösungen von (5.3) bzw. (5.4), so folgt aus (5.5) auch (5.8). Zusammen mit der produktiven Null erhalten wir daraus

$$0 = [F(\bar{x}) + F^*(-A^* \bar{y}^*) - \langle -A^* \bar{y}^*, \bar{x} \rangle_X] + [G(A\bar{x}) + G^*(\bar{y}^*) - \langle \bar{y}^*, A\bar{x} \rangle_Y].$$

Da beide Klammern wegen der Fenchel–Young-Ungleichung nicht-negativ sind, müssen sie einzeln verschwinden. Also gilt (5.7), und aus [Lemma 5.5](#) folgt (5.6). \square

Man nennt (5.6) auch *Fenchel-Extremalitätsbedingungen*; mit Hilfe von [Lemma 5.5](#) können wir aus ihnen weitere äquivalente Optimalitätsbedingungen erzeugen, indem wir eine oder beide Subdifferentialinklusionen invertieren. Dies werden wir später nutzen, um praktisch durchführbare Algorithmen für die Lösung von Optimierungsproblemen dieser Form herzuleiten.

6 MONOTONE OPERATOREN UND PROXIMALPUNKTE

Ist $\bar{x} \in X$ ein Minimierer der konvexen Funktion $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so gilt nach [Satz 4.3](#) das Fermat-Prinzip $0 \in \partial F(\bar{x})$. Um daraus Informationen über (und später konkrete Verfahren zur Berechnung) von \bar{x} zu erhalten, müssen wir daher die (mengenwertige!) Abbildung $x \mapsto \partial F(x)$ untersuchen. Um technischen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen – und da wir die folgenden Resultate primär für numerische Algorithmen, d. h. in $X = \mathbb{R}^N$, benötigen – beschränken wir uns in diesem und dem nächsten Kapitel auf den Fall, dass X ein Hilbertraum ist. Dies erlaubt, X^* mit X identifizieren; insbesondere identifizieren wir $\partial F(x) \subset X^*$ mit der Menge der entsprechenden Riesz-Repräsentanten in X .

6.1 MONOTONE OPERATOREN

Für zwei normierte Räume X, Y betrachten wir eine *mengenwertige Abbildung* $A : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, geschrieben auch $A : X \rightrightarrows Y$, und definieren

- den *Definitionsbereich* $\text{dom } A = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$;
- das *Bild* $\text{ran } A = \bigcup_{x \in X} Ax$;
- der *Graph* $\text{graph } A = \{(x, y) \in X \times Y : y \in Ax\}$;
- die *Inverse* $A^{-1} : Y \rightrightarrows X$ durch $A^{-1}(y) = \{x \in X : y \in Ax\}$ für alle $y \in Y$. (Beachten Sie, dass $A^{-1}(y) = \emptyset$ möglich ist; für mengenwertige Abbildungen fallen also Inverse und Urbild – das ja stets existiert – zusammen.)

Für $A, B : X \rightrightarrows Y, C : Y \rightrightarrows Z$, und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir weiter

- $\lambda A : X \rightrightarrows Y$ durch $(\lambda A)(x) = \{\lambda y : y \in Ax\}$;
- $A + B : X \rightrightarrows Y$ durch $(A + B)(x) = \{y + z : y \in Ax, z \in Bx\}$;
- $C \circ A : X \rightrightarrows Z$ durch $(C \circ A)(x) = \{z : \text{es gibt } y \in Ax \text{ mit } z \in Cy\}$.

Eine mengenwertige Abbildung $A : X \rightrightarrows X$ heißt *monoton*, falls gilt $\text{graph } A \neq \emptyset$ (um den trivialen Fall auszuschliessen) und

$$(x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2)_X \geq 0 \quad \text{für alle } (x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in \text{graph } A.$$

Gilt Gleichheit nur für $x_1 = x_2$, so heißt A *streng monoton*.

Klarerweise ist die Identität $\text{Id} : X \rightrightarrows X, x \mapsto \{x\}$, monoton. Für eine konvexe Funktion $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist $\partial F : X \rightrightarrows X, x \mapsto \partial F(x)$ monoton: Sind $x_1, x_2 \in X$ und $x_1^* \in \partial F(x_1)$ und $x_2^* \in \partial F(x_2)$, so gilt nach Definition

$$\begin{aligned} (x_1^*, \tilde{x} - x_1) &\leq F(\tilde{x}) - F(x_1) && \text{für alle } \tilde{x} \in X, \\ (x_2^*, \tilde{x} - x_2) &\leq F(\tilde{x}) - F(x_2) && \text{für alle } \tilde{x} \in X, \end{aligned}$$

woraus nach Addition der ersten Ungleichung mit $\tilde{x} = x_2$ und der zweiten Ungleichung mit $\tilde{x} = x_1$ durch Umformen die Monotonie folgt. Ebenso sind für A, B monoton und $\lambda \geq 0$ auch λA und $A + B$ monoton. Wir werden aber noch eine stärkere Eigenschaft benötigen, die zusätzlich die Abgeschlossenheit von A garantiert: Wir nennen einen monotonen Operator $A : X \rightrightarrows X$ *maximal monoton*, wenn für beliebige $x \in X$ und $x^* \in X$ die Bedingung

$$(6.1) \quad (x^* - \tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X \geq 0 \quad \text{für alle } (\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in \text{graph } A$$

impliziert, dass $x^* \in Ax$ ist. (In anderen Worten, (6.1) gilt dann *und nur dann*, wenn $(x, x^*) \in \text{graph } A$.) Für feste $x \in X$ und $x^* \in X$ besagt die Bedingung gerade, dass mit A auch die Erweiterung

$$\tilde{A} : X \rightrightarrows X, \quad \tilde{x} \mapsto \begin{cases} Ax \cup \{x^*\} & \text{falls } \tilde{x} = x, \\ A\tilde{x} & \text{falls } \tilde{x} \neq x, \end{cases}$$

monoton ist. Die Behauptung ist dann genau, dass dies keine echte Erweiterung darstellt. Beispielsweise ist

$$A : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \{1\} & \text{falls } t > 0, \\ \{0\} & \text{falls } t = 0, \\ \{-1\} & \text{falls } t < 0, \end{cases}$$

monoton aber nicht maximal monoton, da A eine echte Teilmenge des durch $\tilde{A}t = \text{sign}(t) = \partial(|\cdot|)(t)$ definierten monotonen Operators ist.

Aus der Definition folgen sofort einige nützliche Aussagen.

Lemma 6.1. *Ist $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton, dann ist es auch λA für alle $\lambda > 0$.*

Beweis. Seien $x, x^* \in X$ und gelte

$$0 \leq (x^* - \tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X = \lambda (\lambda^{-1}x^* - \lambda^{-1}\tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X \quad \text{für alle } (\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in \text{graph } \lambda A.$$

Da für $\tilde{x}^* \in \lambda Ax$ gilt $\lambda^{-1}\tilde{x}^* \in Ax$ und A maximal monoton ist, folgt daraus $\lambda^{-1}\tilde{x}^* \in A\tilde{x}$, d. h. $\tilde{x}^* \in (\lambda A)\tilde{x}$. Damit ist λA maximal monoton. \square

Lemma 6.2. *Ist $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton, dann ist A schwach–stark abgeschlossen, d. h. aus $x_n \rightharpoonup x$ und $Ax_n \ni x_n^* \rightarrow x^*$ folgt $x^* \in Ax$.*

Beweis. Für $\tilde{x} \in X$ und $\tilde{x}^* \in A\tilde{x}$ beliebig gilt wegen der Monotonie von A

$$0 \leq (x_n^* - \tilde{x}^*, x_n - \tilde{x})_X \rightarrow (x^* - \tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X,$$

da x_n schwach und x_n^* stark in X konvergieren. Da A maximal monoton ist, folgt daraus $x^* \in Ax$. \square

Von zentraler Bedeutung für die Theorie der monotonen Operatoren ist der *Satz von Minty*, der besagt, dass ein monotoner Operator A genau dann maximal ist, wenn $\text{Id} + A$ surjektiv ist. Als Vorbereitung beweisen wir eine wichtige Teilaussage.

Lemma 6.3. *Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig ist $\text{Id} + \partial F$ surjektiv.*

Beweis. Für gegebenes $z \in X$ betrachten wir das Funktional $J : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$J(x) = \frac{1}{2} \|x - z\|_X^2 + F(x).$$

Mit F ist auch J eigentlich, (strikt) konvex und unterhalbstetig. Weiterhin ist J koerziv, da F als konvexe Funktion wegen [Lemma 3.6](#) nach unten durch eine affine Funktion beschränkt ist, so dass für $\|x\|_X \rightarrow \infty$ die quadrierte Norm garantiert „gewinnt“. (Man nennt sie daher auch *superkoerziv*.) Nach [Satz 3.7](#) existiert also ein (eindeutiges) $\bar{x} \in X$ mit $J(\bar{x}) = \min_{x \in X} J(x)$, für welches nach [Satz 4.3](#), [Satz 4.8](#) und [Satz 4.4](#) gilt

$$0 \in \partial J(\bar{x}) = \{\bar{x} - z\} + \partial F(\bar{x}),$$

d. h. $z \in \{\bar{x}\} + \partial F(\bar{x}) = (\text{Id} + \partial F)(\bar{x})$. \square

Nun zum allgemeinen Fall.

Satz 6.4 (Minty). *Sei $A : X \rightrightarrows X$ monoton. Dann ist A maximal monoton genau dann, wenn $\text{Id} + A$ surjektiv ist.*

Beweis. Sei zuerst $\text{Id} + A$ surjektiv, und seien $x \in X$ und $x^* \in X$ mit

$$(6.2) \quad (x^* - \tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X \geq 0 \quad \text{für alle } (\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in \text{graph } A.$$

Nach Annahme existiert nun für $x + x^* \in X$ ein $z \in X$ und ein $z^* \in Az$ mit

$$(6.3) \quad x + x^* = z + z^* \in (\text{Id} + A)z.$$

Einsetzen von $(\tilde{x}, \tilde{x}^*) = (z, z^*)$ in (6.2) ergibt dann

$$0 \leq (x^* - z^*, x - z)_X = (z - x, x - z)_X = -\|x - z\|_X^2 \leq 0,$$

d. h. $x = z$. Aus (6.3) folgt dann auch $x^* = z^* \in Az = Ax$, und damit ist A maximal monoton.

Die umgekehrte Richtung ist deutlich aufwändiger. Den Spezialfall $A = \partial F$ für ein konvexes Funktional F haben wir bereits in Lemma 6.3 gezeigt. Für den allgemeinen Fall gehen wir ähnlich vor, indem wir ein Funktional F_A konstruieren, das für A die selbe Rolle spielt wie F für ∂F . Für $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton definieren wir dazu die *Fitzpatrick-Funktion*

$$(6.4) \quad F_A : X \times X \rightarrow [-\infty, \infty], \quad (x, y) \mapsto \sup_{(z, w) \in \text{graph } A} ((z, y)_X + (x, w)_X - (z, w)_X).$$

Durch Umformen erhält man die äquivalente Darstellung

$$(6.5) \quad F_A(x, y) = (x, y)_X - \inf_{(z, w) \in \text{graph } A} (x - z, y - w)_X.$$

Daraus folgen sofort einige nützliche Eigenschaften.

(i) Wegen der maximalen Monotonie von A gilt nach Definition $(x - z, y - w)_X \geq 0$ für alle $(z, w) \in \text{graph } A$ genau dann, wenn $(x, y) \in \text{graph } A$; insbesondere ist für $(x, y) \notin \text{graph } A$ stets $(x - z, y - w)_X < 0$. Aus (6.5) folgt also $F_A(x, y) \geq (x, y)_X$ mit Gleichheit genau dann, wenn $(x, y) \in \text{graph } A$ (denn in diesem Fall wird das Infimum in $(z, w) = (x, y)$ angenommen). Insbesondere ist F_A eigentlich.

(ii) Aus (6.4) erhält man

$$F_A = (G_A)^* \quad \text{für } G_A(w, z) = (w, z)_X + \delta_{\text{graph } A^{-1}}(w, z)$$

(denn mit $(z, w) \in \text{graph } A$ ist $(w, z) \in \text{graph } A^{-1}$). Wegen der Monotonie von A ist ebenfalls nach Definition $\text{graph } A \neq \emptyset$; also ist F_A die Fenchel-Konjugierte eines eigentlichen Funktionals und damit konvex und unterhalbstetig.

Als ersten Schritt zeigen wir nun $0 \in \text{ran}(\text{Id} + A)$ und führen den allgemeinen Fall $z \neq 0$ darauf zurück. Wir setzen dafür in Folge $Z := X \times X$ sowie $\xi := (x, y)$ und betrachten

$$J_A : Z \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \xi \mapsto F_A(\xi) + \frac{1}{2} \|\xi\|_Z^2.$$

Zunächst halten wir fest, dass wegen (i) für alle $\xi \in Z$ gilt

$$(6.6) \quad \begin{aligned} J_A(\xi) &= F_A(\xi) + \frac{1}{2} \|\xi\|_Z^2 = F_A(x, y) + \frac{1}{2} \|x\|_X^2 + \frac{1}{2} \|y\|_X^2 \\ &\geq (x, y)_X + \frac{1}{2} \|x\|_X^2 + \frac{1}{2} \|y\|_X^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Weiter ist J_A eigentlich, (strikt) konvex und unterhalbstetig sowie koerziv, denn F_A ist nach (6.4) nach unten durch eine affine Funktion beschränkt und die quadrierte Norm

superkoerziv. Nach [Satz 3.7](#) existiert also wieder ein (eindeutiges) $\bar{\xi} := (\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ mit $J_A(\bar{\xi}) = \min_{\xi \in Z} J_A(\xi)$, für welches nach [Satz 4.3](#), [Satz 4.8](#) und [Satz 4.4](#) gilt

$$0 \in \partial J_A(\bar{\xi}) = \{\bar{\xi}\} + \partial F_A(\bar{\xi}),$$

d. h. $-\bar{\xi} \in \partial F_A(\bar{\xi})$. Nach Definition gilt also für alle $\xi \in Z$

$$\begin{aligned} F_A(\xi) &\geq F_A(\bar{\xi}) + (-\bar{\xi}, \xi - \bar{\xi})_Z = J_A(\bar{\xi}) + \frac{1}{2} \|\bar{\xi}\|_Z^2 + (-\bar{\xi}, \xi)_Z \\ &\geq \frac{1}{2} \|\bar{\xi}\|_Z^2 + (-\bar{\xi}, \xi)_Z, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt [\(6.6\)](#) verwendet haben. Der Übersichtlichkeit halber ersetzen wir in Folge $\bar{\xi} \mapsto -\bar{\xi}$; zusammen mit Eigenschaft (i) folgt dann für alle $(x, y) \in \text{graph } A$

$$\begin{aligned} (6.7) \quad (x, y)_X &= F_A(x, y) \geq \frac{1}{2} \|\bar{x}\|_X^2 + (\bar{x}, x)_X + \frac{1}{2} \|\bar{y}\|_X^2 + (\bar{y}, y)_X \\ &\geq -(\bar{x}, \bar{y})_X + (\bar{x}, x)_X + (\bar{y}, y)_X \end{aligned}$$

und damit $(y - \bar{x}, x - \bar{y})_X \geq 0$. Wegen der maximalen Monotonie von A ist daher $\bar{x} \in A\bar{y}$, d. h. $(\bar{y}, \bar{x}) \in \text{graph } A$. Einsetzen in die erste Ungleichung von [\(6.7\)](#) ergibt dann

$$(\bar{y}, \bar{x})_X \geq \frac{1}{2} \|\bar{x}\|_X^2 + (\bar{x}, \bar{y})_X + \frac{1}{2} \|\bar{y}\|_X^2 + (\bar{y}, \bar{x})_X = \frac{1}{2} \|\bar{x} + \bar{y}\|_X^2 + (\bar{y}, \bar{x})_X \geq (\bar{y}, \bar{x})_X$$

und damit $\|\bar{x} + \bar{y}\|_X = 0$, d. h. $0 = \bar{y} + \bar{x} \in (\text{Id} + A)(\bar{y})$.

Sei nun $z \in X$ beliebig und definiere $B : X \rightrightarrows X$, $x \mapsto \{-z\} + Ax$. Man vergewissert sich leicht anhand der Definition, dass mit A auch B maximal monoton ist. Nach dem soeben Bewiesenen existiert also ein $\bar{y} \in X$ mit $0 \in (\text{Id} + B)(\bar{y}) = \{\bar{y}\} + \{-z\} + A\bar{y}$, d. h. $z \in (\text{Id} + A)(\bar{y})$. Also ist $\text{Id} + A$ surjektiv. \square

Zusammen mit [Lemma 6.3](#) erhalten wir daraus die maximale Monotonie von konvexen Subdifferentialen.

Folgerung 6.5. Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig ist $\partial F : X \rightrightarrows X$ maximal monoton.

6.2 RESOLVENTEN UND PROXIMALPUNKTE

Nach [Lemma 6.3](#) ist $\text{Id} + \partial F$ surjektiv; da die quadrierte Norm im Hilbertraum und damit J strikt konvex ist, ist der Minimierer von J und damit das Urbild sogar eindeutig. Also ist $(\text{Id} + \partial F)^{-1}$ einwertig, auch wenn ∂F dies nicht ist. Es besteht daher die Hoffnung, dieses Objekt anstelle des Subdifferentials – oder allgemeiner, eines monotonen Operators – für Algorithmen nutzen zu können.

Wir definieren daher für $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton die *Resolvente*

$$\mathcal{R}_A : X \rightrightarrows X, \quad \mathcal{R}_A(x) = (\text{Id} + A)^{-1}x,$$

und für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig die *Proximalpunktabbildung*

$$(6.8) \quad \text{prox}_F : X \rightarrow X, \quad \text{prox}_F(x) = \arg \min_{z \in X} \frac{1}{2} \|z - x\|_X^2 + F(z).$$

Da $w \in \mathcal{R}_{\partial F}(x)$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass w der eindeutige Minimierer (man sagt auch *Proximalpunkt*) dieser strikt konvexen Funktion ist, gilt

$$(6.9) \quad \text{prox}_F = (\text{Id} + \partial F)^{-1} = \mathcal{R}_{\partial F}.$$

Wir müssen noch zeigen, dass auch die Resolvente von beliebigen maximal monotonen Operators einwertig ist, d. h. die Schreibweise $\mathcal{R}_A : X \rightarrow X$ gerechtfertigt ist.

Lemma 6.6. *Sei $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton. Dann ist \mathcal{R}_A auf ganz X definiert und einwertig.*

Beweis. Da A maximal monoton ist, ist $\text{Id} + A$ surjektiv, woraus $\text{dom } \mathcal{R}_A = X$ folgt. Seien nun $x, z \in X$ beliebig und $x^* \in \mathcal{R}_A(x)$ und $z^* \in \mathcal{R}_A(z)$, d. h. es gilt $x \in \{x^*\} + Ax^*$ und $z \in \{z^*\} + Az^*$. Aus $x - x^* \in Ax^*$ und $z - z^* \in Az^*$ folgt mit der Monotonie von A , dass gilt

$$(6.10) \quad \|x^* - z^*\|_X^2 \leq (x - z, x^* - z^*)_X.$$

Ist nun $x = z$, so muss daher auch $x^* = z^*$ sein. Also ist \mathcal{R}_A einwertig. \square

Tatsächlich ist die Resolvente sogar Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$; solche Abbildungen nennt man auch *nichtexpansiv* (englisch: „nonexpansive“). Wir können sogar noch mehr zeigen: Eine Abbildung $T : X \rightarrow X$ heißt *stark nichtexpansiv* (englisch: „firmly nonexpansive“), wenn gilt

$$\|Tx - Tz\|_X^2 \leq (Tx - Tz, x - z)_X \quad \text{für alle } x, z \in X.$$

Mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung folgt natürlich sofort, dass stark nichtexpansive Abbildungen stets auch nichtexpansiv sind.

Lemma 6.7. *Sei $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton. Dann ist $\mathcal{R}_A : X \rightarrow X$ stark nichtexpansiv, und es gilt*

$$\|\mathcal{R}_A x - \mathcal{R}_A z\|_X^2 + \|(\text{Id} - \mathcal{R}_A)x - (\text{Id} - \mathcal{R}_A)z\|_X^2 \leq \|x - z\|_X^2 \quad \text{für alle } x, z \in X.$$

Beweis. Die starke Nichtexpansivität von \mathcal{R}_A haben wir bereits mit (6.10) gezeigt. Aus (6.10) folgt weiter

$$\begin{aligned} \|(\text{Id} - \mathcal{R}_A)x - (\text{Id} - \mathcal{R}_A)z\|_X^2 &= \|x - z\|_X^2 - 2(x - z, \mathcal{R}_A x - \mathcal{R}_A z)_X + \|\mathcal{R}_A x - \mathcal{R}_A z\|_X^2 \\ &\leq \|x - z\|_X^2 - \|\mathcal{R}_A x - \mathcal{R}_A z\|_X^2. \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung 6.8. Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig ist $\text{prox}_F : X \rightarrow X$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$.

Tatsächlich lassen sich Minimierer konvexer Funktionen auch als Proximalpunkte charakterisieren, indem man den folgende nützlichen Zusammenhang verwendet.

Lemma 6.9. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig, und seien $x, x^* \in X$. Dann ist für beliebige $\gamma > 0$

$$x^* \in \partial F(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{prox}_{\gamma F}(x + \gamma x^*).$$

Beweis. Aus den Rechenregeln für mengenwertige Abbildungen folgt dann

$$\begin{aligned} x^* \in \partial F(x) &\Leftrightarrow x + \gamma x^* \in (\text{Id} + \gamma \partial F)(x) \\ &\Leftrightarrow x \in (\text{Id} + \gamma \partial F)^{-1}(x + \gamma x^*) \\ &\Leftrightarrow x = \text{prox}_{\gamma F}(x + \gamma x^*). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei $\gamma \partial F = \partial(\gamma F)$ nach **Lemma 4.7** (ii) und damit $\text{prox}_{\gamma F} = \mathcal{R}_{\gamma \partial F}$ verwendet. \square

Wendet man diese Umformulierung auf das Fermat-Prinzip $0 \in \partial F(\bar{x})$ an, erhält man sofort das folgende Resultat.

Folgerung 6.10. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig und $\gamma > 0$ beliebig. Dann ist $\bar{x} \in \text{dom } F$ ein Minimierer von F genau dann, wenn gilt

$$\bar{x} = \text{prox}_{\gamma F}(\bar{x}).$$

Damit liefert uns die Proximalpunkt-Abbildung eine Möglichkeit, Minimierer konvexer Funktionen statt durch (explizite) Mengeninklusion durch eine (implizite) Gleichung zu charakterisieren (und durch eine Fixpunktiteration zu berechnen).

Weiter erhält man daraus eine Verallgemeinerung der orthogonalen Zerlegung von Vektorräumen.

Satz 6.11 (Moreau-Zerlegung). Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Dann gilt für alle $x \in X$

$$x = \text{prox}_F(x) + \text{prox}_{F^*}(x).$$

Beweis. Setze $w = \text{prox}_F(x)$. Aus **Lemma 6.9** und **Lemma 5.5** folgt dann

$$\begin{aligned} w = \text{prox}_F(x) = \text{prox}_F(w + (x - w)) &\Leftrightarrow x - w \in \partial F(w) \\ &\Leftrightarrow w \in \partial F^*(x - w) \\ &\Leftrightarrow x - w = \text{prox}_{F^*}((x - w) + w) = \text{prox}_{F^*}(x). \quad \square \end{aligned}$$

Folgende Rechenregeln werden nützlich sein.

Lemma 6.12. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig.

(i) Für $\lambda \neq 0$ und $z \in X$ gilt mit $H(x) = F(\lambda x + z)$

$$\text{prox}_H(x) = \lambda^{-1}(\text{prox}_{\lambda^2 F}(\lambda x + z) - z).$$

(ii) Für $\gamma > 0$ gilt

$$\text{prox}_{\gamma F^*}(x) = x - \gamma \text{prox}_{\gamma^{-1} F}(\gamma^{-1} x).$$

(iii) Für $G : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig gilt mit $H : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,
 $H(x, y) = F(x) + G(y)$,

$$\text{prox}_{\gamma H}(x, y) = \begin{pmatrix} \text{prox}_{\gamma F}(x) \\ \text{prox}_{\gamma G}(y) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zu (i): Nach Definition ist

$$\text{prox}_H(x) = \arg \min_{w \in X} \frac{1}{2} \|w - x\|_X^2 + F(\lambda w + z) =: \bar{w}.$$

Mit der Substitution $v = \lambda w + z$ folgt wegen $\min_{w \in X} G(w) = \min_{v \in X} G(v)$ für alle G

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \arg \min_{v \in X} \frac{1}{2} \|\lambda^{-1}(v - z) - x\|_X^2 + F(v) \\ &= \arg \min_{v \in X} \frac{1}{2\lambda^2} \|v - (\lambda x + z)\|_X^2 + F(v) \\ &= \arg \min_{v \in X} \frac{1}{2} \|v - (\lambda x + z)\|_X^2 + \lambda^2 F(v) \\ &= \text{prox}_{\lambda^2 F}(\lambda x + z). \end{aligned}$$

Also ist $\bar{w} = \lambda^{-1}(\bar{v} - z)$ der gesuchte Minimierer.

Zu (ii): Aus der Moreau-Zerlegung, [Lemma 5.3](#) (i), und (i) für $\lambda = \gamma^{-1}$ und $z = 0$, folgt

$$\begin{aligned} \text{prox}_{\gamma F^*}(x) &= x - \text{prox}_{(\gamma F)^*}(x) \\ &= x - \text{prox}_{\gamma F^* \circ (\gamma^{-1} \text{Id})}(x) \\ &= x - \gamma \text{prox}_{\gamma(\gamma^{-2} F^*)}(\gamma^{-1} x). \end{aligned}$$

Anwenden auf F^* unter Verwendung von $F^{**} = F$ liefert nun die Aussage.

Zu (iii): Nach Definition der Norm auf $X \times Y$ gilt

$$\begin{aligned} \text{prox}_{\gamma H}(x, y) &= \arg \min_{(u, v) \in X \times Y} \frac{1}{2} \|(u, v) - (x, y)\|_{X \times Y}^2 + \gamma H(u, v) \\ &= \arg \min_{u \in X, v \in Y} \left(\frac{1}{2} \|u - x\|_X^2 + \gamma F(u) \right) + \left(\frac{1}{2} \|v - y\|_Y^2 + \gamma G(v) \right). \end{aligned}$$

Da keine gemischten Terme in u und v auftreten, können die Klammern separat minimiert werden. Also ist $\text{prox}_{\gamma H}(x, y) = (\bar{u}, \bar{v})$ mit

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \arg \min_{u \in X} \frac{1}{2} \|u - x\|_X^2 + \gamma F(u) = \text{prox}_{\gamma F(x)}, \\ \bar{v} &= \arg \min_{v \in Y} \frac{1}{2} \|v - y\|_Y^2 + \gamma G(v) = \text{prox}_{\gamma G(x)}.\end{aligned}\quad \square$$

Das Ausrechnen von Proximalpunkten ist in der Regel schwierig, denn die Auswertung von prox_F enthält ja bereits die Minimierung von F . In manchen Fällen kann man aber eine geschlossene Formel angeben.

Beispiel 6.13. Wir betrachten zuerst skalare $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

- (i) $f(t) = \frac{1}{2}|t|^2$. Da f differenzierbar ist, können wir die Ableitung von $\frac{1}{2}(s - t)^2 + \frac{\gamma}{2}s^2$ gleich Null setzen und nach s auflösen und erhalten $\text{prox}_{\gamma f}(t) = (1 + \gamma)^{-1}t$.
- (ii) $f(t) = |t|$. Nach (4.3) gilt $\partial f(t) = \text{sign}(t)$; also ist $s := \text{prox}_{\gamma f}(t) = (\text{Id} + \gamma \text{sign})^{-1}(t)$ genau dann, wenn $t \in \{s\} + \gamma \text{sign}(s)$ ist. Angenommen, für gegebenes t gelte diese Inklusion für ein \bar{s} . Wir machen nun eine Fallunterscheidung.
 1. Fall $\bar{s} > 0$. Dies impliziert $t = \bar{s} + \gamma$, d. h. $\bar{s} = t - \gamma$ und damit $t > \gamma$.
 2. Fall $\bar{s} < 0$. Dies impliziert $t = \bar{s} - \gamma$, d. h. $\bar{s} = t + \gamma$ und damit $t < -\gamma$.
 3. Fall $\bar{s} = 0$. Dies impliziert $t \in \gamma[-1, 1] = [-\gamma, \gamma]$.

Da die so erhaltenen Bedingungen an t disjunkt und vollständig sind, erhalten wir

$$\text{prox}_{\gamma f}(t) = \begin{cases} t - \gamma & \text{falls } t > \gamma, \\ 0 & \text{falls } t \in [-\gamma, \gamma], \\ t + \gamma & \text{falls } t < -\gamma. \end{cases}$$

Diese Abbildung wird auch als *soft-shrinkage*-Operator bezeichnet.

- (iii) $f(t) = \delta_{[-1,1]}(t)$. Nach Beispiel 5.2 (iii) gilt $f^*(t) = |t|$, und daraus erhalten wir mit Lemma 6.12 (ii)

$$\begin{aligned}\text{prox}_{\gamma f}(t) &= t - \gamma \text{prox}_{\gamma^{-1}f^*}(\gamma^{-1}t) \\ &= \begin{cases} t - \gamma(\gamma^{-1}t - \gamma^{-1}) & \text{falls } \gamma^{-1}t > \gamma^{-1}, \\ t - 0 & \text{falls } \gamma^{-1}t \in [-\gamma^{-1}, \gamma^{-1}], \\ t - \gamma(\gamma^{-1}t + \gamma^{-1}) & \text{falls } \gamma^{-1}t < -\gamma^{-1} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 1, \\ t & \text{falls } t \in [-1, 1], \\ -1 & \text{falls } t < -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Die Proximalpunktabbildung ist also – für alle γ – die Projektion von t auf $[-1, 1]$.

Beispiel 6.14. [Beispiel 6.13](#) kann auf $X = \mathbb{R}^N$ (versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt) verallgemeinert werden, indem man N mal [Lemma 6.12](#) (iii) anwendet. Man erhält dann komponentenweise

(i) für $F(x) = \frac{1}{2} \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} x_i^2$:

$$[\text{prox}_{\gamma F}(x)]_i = \left(\frac{1}{1 + \gamma} \right) x_i, \quad 1 \leq i \leq N;$$

(ii) für $F(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$:

$$[\text{prox}_{\gamma F}(x)]_i = (|x_i| - \gamma)^+ \text{sign}(x_i), \quad 1 \leq i \leq N;$$

(iii) für $F(x) = \delta_{B_\infty}(x) = \sum_{i=1}^N \delta_{[-1,1]}(x_i)$:

$$[\text{prox}_{\gamma F}(x)]_i = x_i - (x_i - 1)^+ - (x_i + 1)^- = \frac{x_i}{\max\{1, |x_i|\}}, \quad 1 \leq i \leq N;$$

mit der Schreibweise $(t)^+ := \max\{t, 0\}$ und $(t)^- := \min\{t, 0\}$.

Viele weitere Beispiele findet man in [[Parikh & Boyd 2014](#), § 6.5].

Da für konvexe Integralfunktionale nach [Lemma 4.6](#) das Subdifferential punktweise ausgewertet werden kann, gilt dasselbe auch für die Definition (6.9) der Proximalpunkt-abbildung.

Folgerung 6.15. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig und $F : L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ wie in [Lemma 3.4](#). Dann ist für alle $\gamma > 0$ und $u \in L^2(\Omega)$

$$[\text{prox}_{\gamma F}(u)](x) = \text{prox}_{\gamma f}(u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Beispiel 6.16. Durch Fallunterscheidung analog zu [Beispiel 6.13](#) zeigt man für allgemeine Hilberträume X :

(i) Ist $F = \frac{1}{2} \|\cdot\|_X^2 = \frac{1}{2} (\cdot, \cdot)_X$, so ist

$$\text{prox}_{\gamma F}(x) = \left(\frac{1}{1 + \gamma} \right) x.$$

(ii) Ist $F = \|\cdot\|_X$, so zeigt man analog mit Fallunterscheidung wie in [Satz 4.5](#)

$$\text{prox}_{\gamma F}(x) = \left(1 - \frac{\gamma}{\|x\|_X} \right)^+ x.$$

(iii) Ist $F = \delta_C$ für $C \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen, so ist nach Definition

$$\text{prox}_{\gamma F}(x) = \text{proj}_C(x) := \arg \min_{z \in C} \|z - x\|_X$$

die *Projektion* von x auf C ; die Proximalpunkt-abbildung verallgemeinert also die metrische Projektion auf (konvexe) Mengen. Projektionsformeln bzw. -verfahren für verschiedene Klassen von Mengen sind in [[Cegielski 2012](#), Kapitel 4.1] aufgeführt.

6.3 MOREAU–YOSIDA-REGULARISIERUNG

Bevor wir zu Algorithmen für die Minimierung konvexer Funktionen kommen, betrachten wir noch eine weitere Möglichkeit, Optimalitätsbedingungen mit Hilfe von Proximalpunkt-abbildungen umzuformulieren. Dies ist zwar keine äquivalente Umformung mehr, bildet aber die Brücke zu den Newton-artigen Verfahren im letzten Kapitel.

Sei $A : X \rightrightarrows X$ ein maximal monotoner Operator und $\gamma > 0$. Dann ist die *Yosida-Approximation* von A definiert durch

$$A_\gamma := \frac{1}{\gamma} (\text{Id} - \mathcal{R}_{\gamma A}).$$

Insbesondere gilt für das Subdifferential einer eigentlichen, konvexen und unterhalbstetigen Funktion $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$(\partial F)_\gamma := \frac{1}{\gamma} (\text{Id} - \text{prox}_{\gamma F}).$$

Nach [Folgerung 6.8](#) ist die Yosida-Approximation also stets Lipschitz-stetig mit Konstante $L = \gamma^{-1}$.

Eine andere Sichtweise erlaubt die folgende Definition. Für eine eigentliche, konvexe und unterhalbstetige Funktion $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\gamma > 0$ ist die *Moreau-Hülle*¹ von F definiert durch

$$F_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf_{z \in X} \frac{1}{2\gamma} \|z - x\|_X^2 + F(z).$$

Vergleich mit der Definition (6.8) der Proximalpunktabbildung liefert

$$(6.11) \quad F_\gamma(x) = \frac{1}{2\gamma} \|\text{prox}_{\gamma F}(x) - x\|_X^2 + F(\text{prox}_{\gamma F}(x)).$$

(Beachte, dass sich der Minimierer nicht ändert, wenn das Funktional mit $\gamma > 0$ multipliziert wird.) Also ist F_γ in der Tat wohldefiniert und einwertig. Zudem ist mit F auch F_γ konvex.

Lemma 6.17. *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Dann ist für alle $\gamma > 0$ auch F_γ konvex.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex die Abbildung

$$H : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad (x, z) \mapsto F(z) + G(z - x)$$

ebenfalls konvex ist. Seien dafür $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in X \times X$ und $\lambda \in [0, 1]$. Aus der Konvexität von F und G folgt dann

$$\begin{aligned} H(\lambda(x_1, z_1) + (1 - \lambda)(x_2, z_2)) &= F(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) + G(\lambda(z_1 - x_1) + (1 - \lambda)(z_2 - x_2)) \\ &\leq \lambda(F(z_1) + G(z_1 - x_1)) + (1 - \lambda)(F(z_2) + G(z_2 - x_2)) \\ &= \lambda H(x_1, z_1) + (1 - \lambda)H(x_2, z_2). \end{aligned}$$

¹nicht zu verwechseln mit der *konvexen Hülle* F^Γ !

Seien nun $x_1, x_2 \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$. Wegen $F_\gamma(x) = \inf_{z \in X} H(x, z)$ für $G(y) := \frac{1}{2\gamma} \|y\|_X^2$ existieren dann zwei Minimalfolgen $\{z_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}, \{z_n^2\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit

$$H(x_1, z_n^1) \rightarrow F_\gamma(x_1), \quad H(x_2, z_n^2) \rightarrow F_\gamma(x_2).$$

Aus der Definition des Infimums zusammen mit der Konvexität von H folgt daher für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F_\gamma(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\leq H(\lambda(x_1, z_n^1) + (1 - \lambda)(x_2, z_n^2)) \\ &\leq \lambda H(x_1, z_n^1) + (1 - \lambda)H(x_2, z_n^2), \end{aligned}$$

und Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten ergibt die behauptete Konvexität. \square

Der nächste Satz stellt den Zusammenhang zwischen den beiden Definitionen her und rechtfertigt damit den Begriff *Moreau–Yosida-Regularisierung*.

Satz 6.18. *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Dann ist F_γ für alle $\gamma > 0$ Fréchet-differenzierbar, und es gilt*

$$\nabla(F_\gamma) = (\partial F)_\gamma.$$

Beweis. Seien $x, y \in X$ beliebig und $x^* = \text{prox}_{F_\gamma}(x)$ sowie $y^* = \text{prox}_{F_\gamma}(y)$. Wir zeigen zunächst, dass gilt

$$(6.12) \quad \frac{1}{\gamma} (y^* - x^*, x - x^*)_X \leq F(y^*) - F(x^*).$$

(Beachte, dass für F eigentlich aus der Definition von Proximalpunkten als Minimierer notwendigerweise $x^*, y^* \in \text{dom } F$ folgt.) Dafür betrachten wir für $t \in (0, 1)$ den Punkt $x_t^* := ty^* + (1 - t)x^*$. Aus der Definition des Proximalpunktes x^* als Minimierer und der Konvexität von F folgt durch quadratisches Ergänzen

$$\begin{aligned} F(x^*) &\leq F(x_t^*) + \frac{1}{2\gamma} \|x_t^* - x\|_X^2 - \frac{1}{2\gamma} \|x^* - x\|_X^2 \\ &\leq tF(y^*) + (1 - t)F(x^*) - \frac{t}{\gamma} (x - x^*, y^* - x^*)_X + \frac{t^2}{2\gamma} \|x^* - y^*\|_X^2. \end{aligned}$$

Umstellen, Division durch $t > 0$ und Grenzübergang $t \rightarrow 0$ ergibt dann die gewünschte Ungleichung. Zusammen mit (6.11) folgt daraus

$$\begin{aligned} F_\gamma(y) - F_\gamma(x) &= F(y^*) - F(x^*) + \frac{1}{2\gamma} (\|y - y^*\|_X^2 - \|x - x^*\|_X^2) \\ &\geq \frac{1}{2\gamma} (2(y^* - x^*, x - x^*)_X + \|y - y^*\|_X^2 - \|x - x^*\|_X^2) \\ &= \frac{1}{2\gamma} (2(y - x, x - x^*)_X + \|y - y^* - x + x^*\|_X^2) \\ &\geq \frac{1}{\gamma} (y - x, x - x^*)_X. \end{aligned}$$

Analog zeigt man durch Vertauschen der Rollen von x^* und y^* in (6.12), dass gilt

$$F_Y(y) - F_Y(x) \leq \frac{1}{\gamma} (y - x, y - y^*)_X.$$

Kombination dieser beiden Ungleichungen liefert dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq F_Y(y) - F_Y(x) - \frac{1}{\gamma} (y - x, x - x^*)_X \\ &\leq \frac{1}{\gamma} (y - x, (y - y^*) - (x - x^*))_X \\ &\leq \frac{1}{\gamma} (\|y - x\|_X^2 - \|y^* - x^*\|_X^2) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \|y - x\|_X^2, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die starke Nichtexpansivität der Proximalpunktabbildung (Lemma 6.7) verwendet haben.

Setzen wir nun $y = x + h$ für $h \in X$ beliebig, so folgt daraus

$$0 \leq \frac{F_Y(x + h) - F_Y(x) - (\gamma^{-1}(x - x^*), h)_X}{\|h\|_X} \leq \frac{1}{\gamma} \|h\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0,$$

d. h. F_Y ist Fréchet-differenzierbar, und der Gradient ist genau $\frac{1}{\gamma}(x - x^*) = (\partial F)_Y$. \square

Da F_Y nach Lemma 6.17 konvex ist, folgt daraus zusammen mit Satz 4.4 die eingängige Gleichung $\partial(F_Y) = (\partial F)_Y$.

Beispiel 6.19. Wir betrachten wieder $X = \mathbb{R}^N$.

- (i) $F(x) = \|x\|_1$. Nach Beispiel 6.14 (ii) ist die Proximalpunktabbildung der komponentenweise soft-shrinkage-Operator, und damit ist

$$[(\partial \|\cdot\|_1)_Y(x)]_i = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}(x_i - (x_i - \gamma)) = 1 & x_i > \gamma, \\ \frac{1}{\gamma}x_i & x_i \in [-\gamma, \gamma], \\ \frac{1}{\gamma}(x_i - (x_i + \gamma)) = -1 & x_i < -\gamma. \end{cases}$$

Im Vergleich zum entsprechenden Subdifferential (4.3) ist also der mengenwertige Fall in $x_i = 0$ durch eine lineare Funktion auf einem kleinen Intervall ersetzt worden.

Analog erhält man durch Einsetzen in (6.11)

$$F_Y(x) = \sum_{i=1}^N f_Y(x_i) \quad \text{für} \quad f_Y(t) := \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}|t - (t - \gamma)|^2 + |t - \gamma| = t - \frac{\gamma}{2} & t > \gamma, \\ \frac{1}{2\gamma}|t|^2 & t \in [-\gamma, \gamma], \\ \frac{1}{2\gamma}|t - (t + \gamma)|^2 + |t + \gamma| = -t + \frac{\gamma}{2} & t < -\gamma. \end{cases}$$

Der Betrag wird also für kleine Argumente durch eine quadratische Funktion ersetzt (wodurch die Nichtdifferenzierbarkeit im Ursprung verschwindet). Diese Modifikation ist seit langem als *Huber-Norm* bekannt.

- (ii) $F(x) = \delta_{B_\infty}(x)$. Nach [Beispiel 6.14](#) (iii) ist die Proximalpunktabbildung gegeben durch die komponentenweise Projektion auf $[-1, 1]$, und damit ist

$$\left[(\partial \delta_{B_\infty})_\gamma(x) \right]_i = \frac{1}{\gamma} \left(x_i - (x_i - (x_i - 1)^+ - (x_i + 1)^-) \right) = \frac{1}{\gamma} (x_i - 1)^+ + \frac{1}{\gamma} (x_i + 1)^-.$$

Analog folgt durch Einsetzen wegen $\text{prox}_{\gamma F}(x) \in B_\infty$ und $((x + 1)^+, (x - 1)^-)_X = 0$

$$(\delta_{B_\infty})_\gamma(x) = \frac{1}{2\gamma} \|(x - 1)^+\|_2^2 + \frac{1}{2\gamma} \|(x + 1)^-\|_2^2,$$

was genau der aus der nichtlinearen Optimierung bekannten Penalty-Funktion für die Ungleichungsnebenbedingungen $x - 1 \leq 0$ und $x + 1 \geq 0$ entspricht.

Ein weiterer Zusammenhang besteht zwischen der Moreau-Hülle F_γ und der Fenchel-Konjugierten F^* .

Satz 6.20. *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Dann gilt für alle $\gamma > 0$ und $x^* \in X$*

$$(F_\gamma)^*(x^*) = F^*(x^*) + \frac{\gamma}{2} \|x^*\|_X^2.$$

Beweis. Die Definition der Fenchel-Konjugierten im Hilbertraum und der Moreau-Hülle ergibt direkt

$$\begin{aligned} (F_\gamma)^*(x^*) &= \sup_{x \in X} \left((x^*, x)_X - \inf_{z \in X} \left(\frac{1}{2\gamma} \|x - z\|_X^2 + F(z) \right) \right) \\ &= \sup_{x \in X} \left((x^*, x)_X + \sup_{z \in X} \left(-\frac{1}{2\gamma} \|x - z\|_X^2 - F(z) \right) \right) \\ &= \sup_{z \in X} \left((x^*, z)_X - F(z) + \sup_{x \in X} \left((x^*, x - z)_X - \frac{1}{2\gamma} \|x - z\|_X^2 \right) \right) \\ &= F^*(x^*) + \left(\frac{1}{2\gamma} \|\cdot\|_X^2 \right)^*(x^*), \end{aligned}$$

da unabhängig von der Wahl von $z \in X$ das innere Supremum stets über den ganzen Raum läuft. Aus [Beispiel 5.2](#) (i) und [Lemma 5.3](#) (i) folgt nun die Aussage. \square

Wir skizzieren kurz die Relevanz für die Optimierung. Ist $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex, so erfüllt jeder Minimierer das Fermat-Prinzip $0 \in \partial F(\bar{x})$, welches wir äquivalent schreiben können

als $\bar{x} \in \partial F^*(0)$. Ersetzen wir ∂F^* durch die Yosida-Approximation $(\partial F^*)_\gamma$, so erhalten wir eine regularisierte Bedingung

$$x_\gamma = (\partial F^*)_\gamma(0) = -\frac{1}{\gamma} \text{prox}_{\gamma F^*}(0).$$

Dies ist nun eine *explizite* und sogar Lipschitz-stetige Relation. Zwar ist x_γ selber kein Minimierer von F , wegen der Konvexität von F_γ ist $x_\gamma \in (\partial F^*)_\gamma(0) = \partial(F_\gamma^*)(0)$ aber äquivalent mit

$$0 \in \partial(F_\gamma^*)^*(x_\gamma) = \partial \left(F^{**} + \frac{\gamma}{2} \|\cdot\|_X^2 \right) (x_\gamma) = \partial \left(F + \frac{\gamma}{2} \|\cdot\|_X^2 \right) (x_\gamma),$$

d. h. x_γ ist der (wegen der strikten Konvexität der quadrierten Norm) einzige Minimierer von $F + \frac{\gamma}{2} \|\cdot\|_X^2$. Durch die Regularisierung von ∂F^* wurde das zu minimierende Funktional also nicht geglättet, sondern lediglich stärker konvexifiziert. Aus der Äquivalenz folgt auch (ähnlich wie im Beweis von [Satz 2.1](#)) $x_\gamma \rightarrow \bar{x}$ für $\gamma \rightarrow 0$. In der Praxis scheitert dieses Vorgehen an der Berechnung von F^* , weshalb man es mit dem im nächsten Kapitel vorgestellten Splitting-Ansatz kombiniert.

7 PROXIMALPUNKT- UND SPLITTING-VERFAHREN

Wir beschäftigen uns jetzt mit Verfahren zur numerischen Berechnung von Minimierern von Funktionalen $J : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ der Form

$$J(x) := F(x) + G(x)$$

für F, G konvex aber nicht differenzierbar. Die Schwierigkeit dabei ist, dass im Gegensatz zu differenzierbaren Funktionen das Äquivalent zum Gradientenabstieg, die Iteration

$$x^{k+1} \in x^k - \tau_k \partial J(x^k),$$

nicht praktikabel ist, da ein beliebiges Element im Subdifferential keine Abstiegsrichtung sein muss; dies kann man nur für den Subgradienten minimaler Norm garantieren – und für J erhält man diesen auch nicht aus den entsprechenden Subgradienten von F und G . Wir ändern daher unseren Blickwinkel und suchen eine Nullstelle der mengenwertigen Abbildung $x \mapsto \partial J(x) \subset X^* \cong X$.

7.1 PROXIMALPUNKT-VERFAHREN

Wir haben in [Folgerung 6.10](#) gesehen, dass eine Nullstelle \bar{x} von $\partial F : X \rightrightarrows X$ charakterisiert werden kann als Fixpunkt von $\text{prox}_{\gamma F}$ für beliebiges $\gamma > 0$. Dies legt nahe, diese durch eine Fixpunktiteration zu berechnen: Wähle $x^0 \in X$ und setze für eine geeignete Folge $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k F}(x^k).$$

Wie bei der klassischen Fixpunktiteration müssen wir nun nachweisen, dass die Fixpunktabbildung in einem passenden Sinne kontrahierend wirkt. Es zeigt sich, dass die starke Nichtexpansivität ausreicht, was nach [Folgerung 6.8](#) für Resolventen maximal monotoner Operatoren stets der Fall ist. Für den späteren Gebrauch betrachten wir gleich die allgemeine Version für beliebige maximal monotone Operatoren.

Satz 7.1. *Sei $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton und habe eine Nullstelle $x^* \in X$, und sei $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 = \infty$. Erfüllt $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ die Rekursion*

$$x^{k+1} = \mathcal{R}_{\gamma_k A} x^k,$$

dann konvergiert $x^k \rightarrow \bar{x}$ mit $0 \in A\bar{x}$.

Beweis. Aus der Rekursion $x^{k+1} = \mathcal{R}_{\gamma_k A} x^k = (\text{Id} + \gamma_k A)^{-1} x^k$ folgt

$$w^k := \gamma_k^{-1}(x^k - x^{k+1}) \in Ax^{k+1}$$

und damit auch $x^{k+1} - x^{k+2} = \gamma_{k+1} w^{k+1}$. (Der Vektor w^k spielt die Rolle des Residuums in der verallgemeinerten Gleichung $0 \in Ax$.) Da A monoton ist, gilt für $\gamma_{k+1} > 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma_{k+1}^{-1} \left(w^k - w^{k+1}, x^{k+1} - x^{k+2} \right)_X \\ &= \left(w^k - w^{k+1}, w^{k+1} \right)_X \\ &= \left(w^k, w^{k+1} \right)_X - \|w^{k+1}\|_X^2 \\ &\leq \|w^{k+1}\|_X \left(\|w^k\|_X - \|w^{k+1}\|_X \right). \end{aligned}$$

Also ist die nicht-negative Folge $\{\|w^k\|_X\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton fallend und daher konvergent (zumindest solange $w^{k+1} \neq 0$ gilt, aber andernfalls ist wegen $w^{k+1} \in Ax^{k+2}$ bereits x^{k+2} die gesuchte Nullstelle.)

Sei nun $x^* \in X$ eine Nullstelle von A , d. h. $0 \in Ax^*$, die nach Voraussetzung existiert. Dann folgt wie im Beweis von [Folgerung 6.10](#) $x^* = \mathcal{R}_{\gamma A} x^*$ für alle $\gamma > 0$. Aus [Lemma 6.7](#) folgt dann mit $(\text{Id} - \mathcal{R}_{\gamma A})x^k = x^k - x^{k+1} = \gamma_k w^k$

$$\begin{aligned} (7.1) \quad \|x^{k+1} - x^*\|_X^2 &= \|\mathcal{R}_{\gamma_k A} x^k - \mathcal{R}_{\gamma_k A} x^*\|_X^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|_X^2 - \|(\text{Id} - \mathcal{R}_{\gamma_k A})x^k - (\text{Id} - \mathcal{R}_{\gamma_k A})x^*\|_X^2 \\ &= \|x^k - x^*\|_X^2 - \gamma_k^2 \|w^k\|_X^2. \end{aligned}$$

Also ist $\{\|x^k - x^*\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ für jede Nullstelle x^* monoton fallend (man nennt solche Folgen *Féjer-monoton*) und damit beschränkt. Also ist auch $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ beschränkt und hat daher eine schwach konvergente Teilfolge $x^{k_l} \rightharpoonup \bar{x}$.

Rekursives Anwenden von (7.1) ergibt ausserdem

$$0 \leq \|x^{k+1} - x^*\|_X^2 \leq \|x^0 - x^*\|_X^2 - \sum_{j=0}^k \gamma_j^2 \|w^j\|_X^2.$$

Die (monoton wachsende) Partialsummenfolge auf der rechten Seite ist also beschränkt, und deshalb konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 \|w^k\|_X^2$. Da die Folge $\{\gamma_k^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ nach Annahme nicht summierbar ist, muss $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|w^k\|_X^2 = 0$ gelten. Zusammen mit der Konvergenz von $\{\|w^k\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ folgt daraus $w^k \rightarrow 0$. Insbesondere gilt $Ax^{k_l+1} \ni w^{k_l} \rightarrow 0$ für $x^{k_l+1} \rightharpoonup \bar{x}$, und aus der Abgeschlossenheit von maximal monotonen Operatoren ([Lemma 6.2](#)) folgt dann $0 \in A\bar{x}$, d. h. jeder schwache Häufungspunkt von $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullstelle von A .

Wir zeigen schließlich, dass die gesamte Folge $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Seien \bar{x} und \hat{x} schwache Häufungspunkte und damit Nullstellen von A . Dann sind wegen der Féjer-Monotonie von

$\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sowohl $\{\|x^k - \bar{x}\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ als auch $\{\|x^k - \hat{x}\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt und daher konvergent. Also konvergiert auch

$$\left(x^k, \bar{x} - \hat{x}\right)_X = \frac{1}{2} \left(\|x^k - \hat{x}\|_X^2 - \|x^k - \bar{x}\|_X^2 + \|\bar{x}\|_X^2 - \|\hat{x}\|_X^2 \right) \rightarrow c \in \mathbb{R}.$$

Da \bar{x} schwacher Häufungspunkt ist, existiert eine Teilfolge $\{x^{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x^{k_n} \rightharpoonup \bar{x}$; ebenso existiert eine Teilfolge $\{x^{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ mit $x^{k_m} \rightarrow \hat{x}$. Also ist

$$(\bar{x}, \bar{x} - \hat{x})_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^{k_n}, \bar{x} - \hat{x}\right)_X = c = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(x^{k_m}, \bar{x} - \hat{x}\right)_X = (\hat{x}, \bar{x} - \hat{x})_X,$$

und damit

$$0 = (\bar{x} - \hat{x}, \bar{x} - \hat{x})_X = \|\bar{x} - \hat{x}\|_X^2,$$

d. h. $\bar{x} = \hat{x}$. Jede Teilfolge hat daher den selben Grenzwert, und deshalb konvergiert die gesamte Folge $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen diesen. \square

7.2 EXPLIZITES SPLITTING

Für Funktionale der Form $J(x) = F(x) + G(x)$ ist das Proximalpunkt-Verfahren in der Regel nicht praktikabel, da die Auswertung von prox_J nicht wesentlich einfacher ist als das ursprüngliche Problem – selbst wenn prox_F und prox_G eine geschlossene Darstellung haben. Anstatt die Proximalpunkt-Formulierung auf $0 \in \partial J(\bar{x})$ anzuwenden, verwendet man daher zuerst die Summenregel und erhält dadurch ein $\bar{p} \in X$ mit

$$(7.2) \quad \begin{cases} \bar{p} \in \partial F(\bar{x}), \\ -\bar{p} \in \partial G(\bar{x}). \end{cases}$$

Man kann nun eine oder beide der Subdifferentialinklusionen durch eine Proximalpunkt-abbildung ersetzen.

In expliziten Splitting-Verfahren – auch *forward-backward splitting* genannt – wendet man [Lemma 6.9](#) nur auf die zweite Inklusion in (7.2) an und erhält

$$\begin{cases} \bar{p} \in \partial F(\bar{x}), \\ \bar{x} = \text{prox}_{\gamma G}(\bar{x} - \gamma \bar{p}). \end{cases}$$

Die zugehörige Fixpunkt-Iteration ist dann

1. Wähle $p^k \in \partial F(x^k)$ (mit minimaler Norm).
2. Setze $x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k G}(x^k - \gamma_k p^k)$.

Dies ist im Allgemeinen kein praktikables Verfahren, da die Bestimmung eines Subgradienten minimaler Norm aufwändig ist. Eine Ausnahme ist jedoch, wenn F zusätzlich differenzierbar ist: Dann gilt (im Hilbertraum) $\partial F(x) = \{\nabla F(x)\}$. In diesem Fall erhalten wir das *Proximal-Gradientenverfahren*

$$(7.3) \quad x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k G}(x^k - \gamma_k \nabla F(x^k))$$

(im Spezialfall $G = \delta_C$ – d. h. $\text{prox}_{\gamma G}(x) = \text{proj}_C(x)$ – auch *projiziertes Gradientenverfahren* genannt).

Um nun analog zum Proximalpunkt-Verfahren Konvergenz zu zeigen, müssen wir die Lipschitz-Stetigkeit des Gradienten voraussetzen (da wir für F ja keine Resolvente verwenden, die automatisch stark nichtexpansiv und damit Lipschitz-stetig ist).

Lemma 7.2. *Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar mit Lipschitz-stetigem Gradienten. Dann gilt*

$$F(y) \leq F(x) + (\nabla F(x), x - y)_X + \frac{L}{2} \|x - y\|_X^2 \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Beweis. Aus der Gâteaux-Differenzierbarkeit von F folgt

$$\frac{d}{dt} F(x + t(y - x)) = (\nabla F(x + t(y - x)), y - x)_X \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Integration über t auf $[0, 1]$ liefert damit

$$\int_0^1 (\nabla F(x + t(y - x)), y - x)_X dt = F(y) - F(x).$$

Zusammen mit der produktiven Null erhalten wir dann unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Lipschitz-Stetigkeit

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x) + (\nabla F(x), y - x)_X + \int_0^1 (\nabla F(x + t(y - x)) - \nabla F(x), y - x)_X dt \\ &\leq F(x) + (\nabla F(x), y - x)_X + \int_0^1 \|\nabla F(x + t(y - x)) - \nabla F(x)\|_X \|x - y\|_X dt \\ &\leq F(x) + (\nabla F(x), y - x)_X + \int_0^1 Lt \|x - y\|_X^2 dt \\ &= F(x) + (\nabla F(x), y - x)_X + \frac{L}{2} \|x - y\|_X^2. \quad \square \end{aligned}$$

Für genügend kleine Schrittweiten kann man damit die Konvergenz des Proximal-Gradientenverfahrens zeigen.

Satz 7.3. *Seien $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex, und unterhalbstetig. Sei zusätzlich F Gâteaux-differenzierbar mit Lipschitz-stetigem Gradienten. Gilt $0 < \gamma_{\min} \leq \gamma_k \leq L^{-1}$, dann konvergiert die durch (7.3) erzeugte Folge $x^k \rightarrow \bar{x}$ mit $0 \in \partial J(\bar{x})$.*

Beweis. Wir argumentieren ähnlich wie im Beweis von [Satz 7.1](#), wobei wir die Monotonie der Folge der Residuumsnormen $w^k \in Ax^{k+1}$ durch die der Funktionswerte $J(x^k)$ ersetzen. Wir definieren dafür

$$T_\gamma : X \rightarrow X, \quad x \mapsto \gamma^{-1}(x - \text{prox}_{\gamma G}(x - \gamma \nabla F(x))),$$

womit wir die Iteration (7.3) umschreiben können als

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k G}(x^k - \gamma_k \nabla F(x^k)) = x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k).$$

Nach [Lemma 6.9](#) gilt daher

$$(7.4) \quad T_{\gamma_k}(x^k) - \nabla F(x^k) \in \partial G(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)).$$

Aus [Lemma 7.2](#) folgt weiter mit $x = x^k$, $y = x^{k+1} = x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)$, und $\gamma_k \leq L^{-1}$

$$(7.5) \quad \begin{aligned} F(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)) &\leq F(x^k) - \gamma_k \left(\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k) \right)_X + \frac{\gamma_k^2 L}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2 \\ &\leq F(x^k) - \gamma_k \left(\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k) \right)_X + \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2. \end{aligned}$$

Damit gilt auch für alle $z \in X$ unter Verwendung von (7.4) und $\nabla F(x) \in \partial F(x)$, dass

$$\begin{aligned} J(x^{k+1}) &= F(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)) + G(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)) \\ &\leq F(x^k) - \gamma_k \left(\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k) \right)_X + \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2 \\ &\quad + G(z) + \left(T_{\gamma_k}(x^k) - \nabla F(x^k), x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k) - z \right)_X \\ &\leq F(z) + \left(\nabla F(x^k), x^k - z \right)_X - \gamma_k \left(\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k) \right)_X + \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2 \\ &\quad + G(z) + \left(T_{\gamma_k}(x^k) - \nabla F(x^k), x^k - z - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k) \right)_X \\ &= J(z) + \left(T_{\gamma_k}(x^k), x^k - z \right)_X - \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2. \end{aligned}$$

Für $z = x^k$ folgt daraus

$$J(x^{k+1}) \leq J(x^k) - \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2,$$

d. h. $\{J(x^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend. (Das Proximal-Gradientenverfahren ist also ein *Abstiegsverfahren*.) Für $z = x^*$ mit $J(x^*) = \min_{x \in X} J(x)$ folgt weiter durch quadratisches Ergänzen

$$\begin{aligned} 0 \leq J(x^{k+1}) - J(x^*) &\leq \left(T_{\gamma_k}(x^k), x^k - x^* \right)_X - \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2 \\ &= \frac{1}{2\gamma_k} \left(\|x^k - x^*\|_X^2 - \|x^k - x^* - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\gamma_k} \left(\|x^k - x^*\|_X^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_X^2 \right). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\{\|x^k - x^*\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und damit $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ Féjer-monoton und beschränkt. Es existiert also eine schwach konvergente Teilfolge $\{x^{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ mit $x^{k_l} \rightharpoonup \bar{x}$.

Summieren über $k = 1, \dots, n$ liefert nun

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (J(x^k) - J(x^*)) &\leq \frac{1}{2\gamma_{\min}} \sum_{k=1}^n \left(\|x^{k-1} - x^*\|_X^2 - \|x^k - x^*\|_X^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\gamma_{\min}} \left(\|x^0 - x^*\|_X^2 - \|x^n - x^*\|_X^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2\gamma_{\min}} \|x^0 - x^*\|_X^2. \end{aligned}$$

Da $\{J(x^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt

$$(7.6) \quad J(x^n) - J(x^*) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (J(x^k) - J(x^*)) \leq \frac{1}{2n\gamma_{\min}} \|x^0 - x^*\|_X^2$$

und damit $J(x^n) \rightarrow J(x^*)$ für $n \rightarrow \infty$. Also gilt auch wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit von F und G , dass

$$J(\bar{x}) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} J(x^{k_l}) = J(x^*).$$

Wie im Beweis von [Satz 7.1](#) folgt nun aus der Féjer-Monotonie von $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, dass $x^k \rightharpoonup \bar{x}$ für die gesamte Folge gilt. \square

Aus (7.6) folgt insbesondere $J(x^k) = J(x^*) + \mathcal{O}(k^{-1})$. Um $J(x^k) \leq J(x^*) + \varepsilon$ zu erreichen, sind also $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ Iterationen notwendig. Durch eine geschickte Extrapolation lässt sich dies auf $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$ reduzieren, was beweisbar optimal ist; siehe [[Nesterov 1983](#)], [[Nesterov 2004](#), Theorem 2.1.7]. (Dafür ist die Folge der Funktionswerte allerdings nicht mehr monoton fallend.) Die Iterationsvorschrift dafür ist

$$\begin{cases} x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k G}(\bar{x}^k - \gamma_k \nabla F(\bar{x}^k)), \\ \bar{x}^{k+1} = \left(1 - \frac{1 - \tau_k}{\tau_{k+1}}\right) x^{k+1} + \frac{1 - \tau_k}{\tau_{k+1}} x^k, \end{cases}$$

für die (schwer zu motivierende) Folge

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\tau_{k-1}^2}}{2} \quad (\rightarrow \infty),$$

siehe [[Beck & Teboulle 2009](#), § 4].

Ein Nachteil des expliziten Splittings ist die Notwendigkeit, für die Wahl einer zulässigen Schrittweite γ_k die Lipschitzkonstante L von ∇F zu kennen. Im Beweis von [Satz 7.3](#) erkennt

man, dass dies lediglich dazu dient, die Abschätzung (7.5) zu garantieren. Ist die Lipschitzkonstante nicht bekannt, kann man versuchen, die Gültigkeit von (7.5) durch Liniensuche zu erfüllen: Man startet mit $\gamma^0 > 0$ und verkleinert γ_k (etwa durch Halbieren) so lange, bis

$$F(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)) \leq F(x^k) - \gamma_k \left(\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k) \right)_X + \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2$$

erfüllt ist (was spätestens für $\gamma_k < L^{-1}$ der Fall ist). Dafür ist in jedem Schritt der Liniensuche jeweils eine Auswertung von F und $\text{prox}_{\gamma_k G}$ erforderlich (wobei Letzteres durch Vertauschen von Proximal- und Gradientenschritt – *backward-forward splitting* – vermieden werden kann).

7.3 IMPLIZITES SPLITTING

Auch mit Liniensuche bleiben die Anforderungen an die Schrittweite γ_k in expliziten Verfahren unbefriedigend. Dies kann man mit einem impliziten Splitting umgehen. Hier wenden wir die Proximalpunkt-Formulierung auf beide Subdifferential-Inklusionen in (7.2) an und erhalten

$$\begin{cases} \bar{x} = \text{prox}_{\gamma F}(\bar{x} + \gamma \bar{p}), \\ \bar{x} = \text{prox}_{\gamma G}(\bar{x} - \gamma \bar{p}). \end{cases}$$

Um \bar{p} aus den Gleichungen zu eliminieren, setzen wir $\bar{z} := \bar{x} + \gamma \bar{p}$ und $\bar{w} := \bar{x} - \gamma \bar{p}$. Dann ist $\bar{z} + \bar{w} = 2\bar{x}$, d. h.

$$\bar{w} = 2\bar{x} - \bar{z}.$$

Damit brauchen wir nur noch eine Rekursion für \bar{z} ; diese gewinnen wir aus der produktiven Null

$$\bar{z} = \bar{z} + (\bar{x} - \bar{x}).$$

Durch eine geeignete Fixpunktiteration auf diesen Gleichungen erhalten wir das *Douglas-Rachford-Verfahren*

$$(7.7) \quad \begin{cases} x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma F}(z^k), \\ y^{k+1} = \text{prox}_{\gamma G}(2x^{k+1} - z^k), \\ z^{k+1} = z^k + y^{k+1} - x^{k+1}. \end{cases}$$

Diese Iteration kann man durch Einführen von geeigneten Operatoren als Proximalpunkt-Verfahren schreiben, woraus mit etwas Aufwand (nach Nachweisen der maximalen Monotonie des entsprechenden Operators) die Konvergenz mit [Satz 7.1](#) folgt; siehe etwa [\[Eckstein & Bertsekas 1992\]](#). Wir betrachten hier gleich eine allgemeinere Variante, die sich vor allem in der mathematischen Bildverarbeitung als sehr erfolgreich erwiesen hat.

7.4 PRIMAL-DUALE VERFAHREN

Diese Verfahren wurden speziell für Probleme der Form

$$\min_{x \in X} F(x) + G(Ax)$$

für F, G eigentlich, konvex und unterhalbstetig und $A \in L(X, Y)$ entwickelt. Aus [Satz 5.6](#) und [Lemma 5.5](#) erhält man dafür die Fenchel-Extremalitätsbedingungen

$$(7.8) \quad \begin{cases} -A^* \bar{y} \in \partial F(\bar{x}), \\ \bar{y} \in \partial G(A\bar{x}), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A^* \bar{y} \in \partial F(\bar{x}), \\ A\bar{x} \in \partial G^*(\bar{y}). \end{cases}$$

Die zugehörige Proximalpunktformulierung nach [Lemma 6.9](#) ist

$$\begin{cases} \bar{x} = \text{prox}_{\tau F}(\bar{x} - \tau A^* \bar{y}), \\ \bar{y} = \text{prox}_{\sigma G^*}(\bar{y} + \sigma A\bar{x}), \end{cases}$$

für beliebige $\sigma, \tau > 0$. Daraus lässt sich direkt eine Fixpunktiteration gewinnen. Es ist aber sowohl aus praktischer als auch aus theoretischer Sicht hilfreich, einen Extrapolationsschritt wie in [\(7.7\)](#) einzuschieben:

$$(7.9) \quad \begin{cases} x^{k+1} = \text{prox}_{\tau F}(x^k - \tau A^* y^k), \\ \bar{x}^{k+1} = 2x^{k+1} - x^k, \\ y^{k+1} = \text{prox}_{\sigma G^*}(y^k + \sigma A\bar{x}^{k+1}). \end{cases}$$

Dieses *primal-duale Extragradienten-Verfahren* kann man nun als Proximalpunkt-Verfahren auffassen.¹ Dazu formen wir [\(7.9\)](#) so um, dass (x^k, y^k) und (x^{k+1}, y^{k+1}) auf jeweils einer Seite stehen. Verwenden von $\text{prox}_{\tau F} = (\text{Id} + \tau \partial F)^{-1}$ ergibt für die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} x^{k+1} = \text{prox}_{\tau F}(x^k - \tau A^* y^k) &\Leftrightarrow x^k - \tau A^* y^k \in \{x^{k+1}\} + \tau \partial F(x^{k+1}) \\ &\Leftrightarrow \tau^{-1} x^k - A^* y^k \in \{\tau^{-1} x^{k+1}\} + \partial F(x^{k+1}). \end{aligned}$$

Analog haben wir für die zweite Gleichung (nach Elimination von \bar{x}^{k+1})

$$y^{k+1} = \text{prox}_{\sigma G^*}(y^k + \sigma A(2x^{k+1} - x^k)) \Leftrightarrow \sigma^{-1} y^k - Ax^k \in \{\sigma^{-1} y^{k+1} - 2Ax^{k+1}\} + \partial G^*(y^{k+1}).$$

Setzen wir $Z = X \times Y, z = (x, y)$,

$$M = \begin{pmatrix} \tau^{-1} \text{Id} & -A^* \\ -A & \sigma^{-1} \text{Id} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \partial F & A^* \\ -A & \partial G^* \end{pmatrix},$$

¹Eingeführt wurde das Verfahren in [[Chambolle & Pock 2011](#)], weshalb es in der Literatur auch oft als *Chambolle–Pock-Verfahren* bezeichnet wird; der Zusammenhang mit Proximalpunkt-Verfahren wurde in [[He & Yuan 2012](#)] beschrieben.

so ist (7.9) äquivalent mit

$$Mz^k \in (M + T)z^{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad z^{k+1} \in (M + T)^{-1}Mz^k.$$

Ist M invertierbar, so gilt $M = (M^{-1})^{-1}$ und damit $(M + T)^{-1}Mz^k = (\text{Id} + M^{-1}T)^{-1}z^k$; es handelt sich dann also in der Tat um ein Proximalpunkt-Verfahren für den Operator $M^{-1}T$. Dazu zeigen wir, dass – unter Voraussetzungen an σ, τ – M selbstadjungiert und positiv definit ist bezüglich des Skalarproduktes

$$(z_1, z_2)_Z = (x_1, x_2)_X + (y_1, y_2)_Y \quad \text{für alle } z_1 = (x_1, y_1) \in Z, z_2 = (x_2, y_2) \in Z.$$

Lemma 7.4. *Der Operator M ist beschränkt und selbstadjungiert. Gilt $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 < 1$, so ist M positiv definit.*

Beweis. Direkt aus der Definition von M folgt die Beschränktheit (da $A \in L(X, Y)$ beschränkt ist) und Selbstadjungiertheit. Sei nun $z = (x, y) \in Z \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} (Mz, z)_Z &= (\tau^{-1}x - A^*y, x)_X + (\sigma^{-1}y - Ax, y)_Y \\ &= \tau^{-1}\|x\|_X^2 - 2(x, A^*y)_X + \sigma^{-1}\|y\|_Y^2 \\ &\geq \tau^{-1}\|x\|_X^2 - 2\|A\|_{L(X,Y)}\|x\|_X\|y\|_Y + \sigma^{-1}\|y\|_Y^2 \\ &\geq \tau^{-1}\|x\|_X^2 - \|A\|_{L(X,Y)}\sqrt{\sigma\tau}(\tau^{-1}\|x\|_X^2 + \sigma^{-1}\|y\|_Y^2) + \sigma^{-1}\|y\|_Y^2 \\ &= (1 - \|A\|_{L(X,Y)}\sqrt{\sigma\tau})(\sqrt{\tau}^{-1}\|x\|_X^2 + \sqrt{\sigma}^{-1}\|y\|_Y^2) \\ &\geq C(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2) \end{aligned}$$

für $C := (1 - \|A\|_{L(X,Y)}\sqrt{\sigma\tau}) \min\{\tau^{-1}, \sigma^{-1}\} > 0$. Also ist $(Mz, z)_Z > C\|z\|_Z^2$ für alle $z \neq 0$ und damit M positiv definit. \square

Der Operator M induziert also ein Skalarprodukt $(z_1, z_2)_M := (Mz_1, z_2)_Z$ und dadurch eine Norm $\|z\|_M^2 = (z, z)_M$, für die gilt

$$(7.10) \quad c_1\|z\|_Z \leq \|z\|_M \leq c_2\|z\|_Z \quad \text{für alle } z \in Z.$$

Folgerung 7.5. *Gilt $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 < 1$, so ist M stetig invertierbar, d. h. es gilt $M^{-1} \in L(Y, X)$.*

Beweis. Wegen (7.10) ist für beliebige $z \in Z$ die Abbildung $z \mapsto (z, v)_Z$ ein (bezüglich $\|\cdot\|_M$) beschränktes Funktional. Nach dem Satz von **Fréchet–Riesz** existiert also ein eindeutiges $z^* \in Z$ mit

$$(Mz^*, v)_Z = (z^*, v)_M = (z, v)_Z \quad \text{für alle } v \in Z,$$

und die Abbildung $M^{-1} : z \mapsto z^*$ ist linear. Damit gilt

$$c_1^2\|z^*\|_Z^2 \leq \|z^*\|_M^2 = (Mz^*, z^*)_Z = (z, z^*)_Z \leq \|z\|_Z\|z^*\|_Z,$$

und nach Division durch $c_1^2\|z^*\|_Z$ folgt die behauptete Beschränktheit von M^{-1} . \square

Also ist $M^{-1}T$ wohldefiniert, d. h. $\text{graph } M^{-1}T \neq \emptyset$. Um die maximale Monotonie von $M^{-1}T$ zu beweisen, benötigen wir auch noch, dass die Skalarprodukte $(\cdot, \cdot)_M$ und $(\cdot, \cdot)_Z$ äquivalent sind.

Folgerung 7.6. *Es existieren $C_1, C_2 > 0$, so dass gilt*

$$C_1 (z, z')_Z \leq (z, z')_M \leq C_2 (z, z')_Z \quad \text{für alle } z, z' \in Z.$$

Beweis. Aus der Parallelogrammgleichung und (7.10) folgt

$$\begin{aligned} (z, z')_M &= \frac{1}{4} (\|z + z'\|_M^2 - \|z - z'\|_M^2) \\ &\geq \frac{1}{4} (c_1^2 \|z + z'\|_Z^2 - c_2^2 \|z - z'\|_Z^2) \\ &\geq \min\{c_1^2, c_2^2\} (z, z')_Z \end{aligned}$$

und damit die erste Abschätzung mit $C_1 := \max\{c_1^2, c_2^2\}$. Die zweite Abschätzung zeigt man analog. \square

Lemma 7.7. *Gilt $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 < 1$, so ist $M^{-1}T$ maximal monoton.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Monotonie. Sei $z \in Z$ und $z^* \in M^{-1}Tz$, d. h. $Mz^* \in Tz$. Nach Definition von T existieren daher für $z = (x, y)$ ein $\xi \in \partial F(x)$ und ein $\eta \in \partial G^*(y)$ mit $Mz^* = (\xi + A^*y, \eta - Ax)$. Analog können wir für $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ und $\bar{z}^* \in M^{-1}T\bar{z}$ schreiben $M\bar{z}^* = (\bar{\xi} + A^*\bar{y}, \bar{\eta} - A\bar{x})$ für $\bar{\xi} \in \partial F(\bar{x})$ und $\bar{\eta} \in \partial G^*(\bar{y})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (M\bar{z}^* - Mz^*, \bar{z} - z)_Z &= ((\bar{\xi} + A^*\bar{y}) - (\xi + A^*y), \bar{x} - x)_X \\ &\quad + ((\bar{\eta} - A\bar{x}) - (\eta - Ax), \bar{y} - y)_Y \\ &= (\bar{\xi} - \xi, \bar{x} - x)_X + (A^*(\bar{y} - y), \bar{x} - x)_X \\ &\quad - (A(\bar{x} - x), \bar{y} - y)_Y + (\bar{\eta} - \eta, \bar{y} - y)_Y \\ &= (\bar{\xi} - \xi, \bar{x} - x)_X + (\bar{\eta} - \eta, \bar{y} - y)_Y \geq 0 \end{aligned}$$

wegen der Monotonie der Subdifferentiale. Aus **Folgerung 7.6** erhalten wir dann

$$(\bar{z}^* - z^*, \bar{z} - z)_Z \geq C_2^{-1} (M\bar{z}^* - Mz^*, \bar{z} - z)_Z \geq 0$$

und damit die Monotonie.

Für die maximale Monotonie seien nun $\bar{z}^*, \bar{z} \in Z$ und es gelte

$$(\bar{z}^* - z^*, \bar{z} - z)_Z \geq 0 \quad \text{für alle } (z^*, z) \in \text{graph } M^{-1}T.$$

Wie oben ist nun $Mz^* = (\xi + A^*y, \eta - Ax)$ für ein $\xi \in \partial F(x)$ und ein $\eta \in \partial G^*(y)$. Aus **Folgerung 7.6** erhalten wir auch

$$(7.11) \quad (M\bar{z}^* - Mz^*, \bar{z} - z)_Z \geq C_1 (\bar{z}^* - z^*, \bar{z} - z)_Z \geq 0 \quad \text{für alle } z \in Z, Mz^* \in Tz.$$

Setze nun $\bar{\xi} := \bar{x}^* - A^*\bar{y}$ und $\bar{\eta} := \bar{y}^* + A\bar{x}$ für $M\bar{z}^* = (\bar{x}^*, \bar{y}^*)$ und $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$. Dann ist $M\bar{z}^* = (\bar{\xi} + A^*\bar{y}, \bar{\eta} - A\bar{x})$, und aus (7.11) folgt daher für alle $(x, y) \in Z$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq ((\bar{\xi} + A^*\bar{y}) - (\xi + A^*y), \bar{x} - x)_X + ((\bar{\eta} - A\bar{x}) - (\eta - Ax), \bar{y} - y)_Y \\ &= (\bar{\xi} - \xi, \bar{x} - x)_X + (\bar{\eta} - \eta, \bar{y} - y)_Y. \end{aligned}$$

Setzen wir speziell Paare der Form (x, \bar{y}) für $x \in X$ beliebig und (\bar{x}, y) für $y \in Y$ beliebig ein, erhalten wir, dass beide Skalarprodukte auf der rechten Seiten nichtnegativ sind. Aus der maximalen Monotonie von Subdifferentialen folgt nun $\bar{\xi} \in \partial F(\bar{x})$ und $\bar{\eta} \in \partial G^*(\bar{y})$. Also ist

$$M\bar{z}^* = (\bar{\xi} + A^*\bar{y}, \bar{\eta} - A\bar{x}) \in T\bar{z}$$

und damit $\bar{z}^* \in M^{-1}T\bar{z}$. Dies zeigt die maximale Monotonie von $M^{-1}T$. \square

Das primal-duale Extragradienten-Verfahren (7.9) ist also äquivalent mit der Proximalpunktiteration $z^{k+1} = \mathcal{R}_{M^{-1}T}z^k$ für $M^{-1}T$ maximal monoton, so dass aus Satz 7.1 die Konvergenz folgt.

Satz 7.8. *Erfüllen F, G, A die Voraussetzungen von Satz 5.6 und gilt $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 < 1$, so konvergiert $\{(x^k, y^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ schwach in Z gegen eine Lösung (\bar{x}, \bar{y}) von (7.8).*

Beachten Sie, dass das Verfahren durch die Proximalpunktformulierung der Fenchel-Extremalitätsbedingungen zwar implizit in F und G , nicht jedoch in A ist; es ist also nicht verwunderlich, dass dadurch eine Schrittweitenrestriktion an τ und σ durch A entsteht.²

Setzt man $A = \text{Id}$, $\tau = \gamma$, $\sigma = \gamma^{-1}$ und $z^k = x^k - \gamma y^k$ und wendet Lemma 6.12 (ii) an, so erkennt man, dass die Iteration (7.9) äquivalent ist mit (7.7); die Konvergenz des Douglas-Rachford-Verfahrens kann man aber wegen $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 = 1$ nicht aus Satz 7.8 folgern.

²Die Proximalpunktabbildung zu $G \circ A$ würde zu einem voll impliziten Verfahren führen, dafür aber aufgrund der Rechenregeln die Anwendung von A^{-1} benötigen. Es ist gerade Sinn und Zweck des primal-dualen Extragradientenverfahrens, die Invertierung von A – was in der Praxis oft schlecht konditioniert oder sogar unmöglich ist – zu vermeiden.

Teil III

LIPSCHITZ-ANALYSIS

8 DAS CLARKE-SUBDIFFERENTIAL

Wir suchen nun nach einem verallgemeinerten Ableitungskonzept, das sowohl die Fréchet-Ableitung als auch das konvexe Subdifferential verallgemeinert. Dieses finden wir für lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Zur Erinnerung: Eine Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$, falls ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$ (womit wir im Folgenden stets die Lipschitz-Konstante bezeichnen werden) existieren mit

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\|_X \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in O_\delta(x).$$

Beachte, dass dies im Gegensatz zur Konvexität eine rein lokale Bedingung ist, wir aber F als (lokal) endlich-wertig voraussetzen müssen.

Wir gehen analog zum konvexen Subdifferential vor und definieren zunächst die *verallgemeinerte Richtungsableitung* in $x \in X$ in Richtung $h \in X$ über

$$F^\circ(x; h) := \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + th) - F(y)}{t}.$$

Beachte den Unterschied zur Richtungsableitung: Es wird nicht verlangt, dass irgendein Grenzwert existiert, nur Häufungspunkte. Wir benötigen die folgenden Eigenschaften.

Lemma 8.1. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in x . Dann ist die Abbildung $h \mapsto F^\circ(x; h)$

- (i) Lipschitz-stetig mit Konstante L und erfüllt $|F^\circ(x; h)| \leq L\|h\|_X < \infty$;
- (ii) subadditiv, d. h. $F^\circ(x; h + g) \leq F^\circ(x; h) + F^\circ(x; g)$ für alle $h, g \in X$;
- (iii) positiv homogen, d. h. für alle $\alpha > 0$ ist $F^\circ(x; \alpha h) = (\alpha F)^\circ(x; h)$ für alle $h \in X$;
- (iv) reflektiv, d. h. $F^\circ(x; -h) = (-F)^\circ(x; h)$ für alle $h \in X$.

Beweis. Zu (i): Seien $h, g \in X$ beliebig. Aus der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von F folgt dann

$$F(y + th) - F(y) \leq F(y + tg) - F(y) + tL\|h - g\|_X$$

für alle y hinreichend nahe an x und t klein genug. Division durch t und Bilden des Limes superior ergibt dann

$$F^\circ(x; h) \leq F^\circ(x; g) + L\|h - g\|_X.$$

Vertauschen von h und g liefert dann die Lipschitz-Stetigkeit. Weiter folgt direkt aus der Definition $F^\circ(x; g) = 0$ für $g = 0$ und damit auch die behauptete Beschränktheit.

Zu (ii): Aus der Definition des Limes superior und der produktiven Null folgt sofort

$$\begin{aligned} F^\circ(x; h + g) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + th + tg) - F(y)}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + th + tg) - F(y + tg)}{t} + \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + tg) - F(y)}{t} \\ &= F^\circ(x; h) + F^\circ(x; g), \end{aligned}$$

da für $y \rightarrow x$ und $t \rightarrow 0$ auch $y + tg \rightarrow x$ konvergiert.

Zu (iii): Direkt aus der Definition folgt wegen $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} F^\circ(x; \alpha h) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y - t(\alpha h)) - F(y)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \alpha t \rightarrow 0^+}} \alpha \frac{F(y + (\alpha t)h) - F(y)}{\alpha t} = (\alpha F)^\circ(x; h). \end{aligned}$$

Zu (iv): Ebenso folgt

$$\begin{aligned} F^\circ(x; -h) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y - th) - F(y)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{w \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{-F(w + th) - (-F(w))}{t} = (-F)^\circ(x; h), \end{aligned}$$

da für $y \rightarrow x$ und $t \rightarrow 0$ auch $w := y - th \rightarrow x$ konvergiert. \square

Aus [Lemma 8.1](#) (i–iii) folgt insbesondere, dass $h \mapsto F^\circ(x; h)$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig ist.

Wir definieren nun für $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig das *Clarke-Subdifferential* in $x \in X$ durch

$$(8.1) \quad \partial_C F(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq F^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\}.$$

Direkt aus der Definition und [Lemma 8.1](#) (i) folgt, dass $\partial_C F(x)$ konvex, schwach-* abgeschlossen und beschränkt (da $\|\xi\|_{X^*} \leq L$ für alle $\xi \in \partial_C F(x)$ nach Definition der Norm im Dualraum) ist. Auch hier gilt nach Konstruktion das Fermat-Prinzip.

Satz 8.2. *Hat $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Minimum in \bar{x} , so gilt $0 \in \partial_C F(\bar{x})$.*

Beweis. Ist $\bar{x} \in X$ ein lokaler Minimierer von F , so gilt insbesondere $F(\bar{x}) \leq F(\bar{x} + th)$ für alle $h \in X$ und $t > 0$ hinreichend klein. Daraus folgt

$$\langle 0, h \rangle_X = 0 \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(\bar{x} + th) - F(\bar{x})}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(\bar{x} + th) - F(\bar{x})}{t} \leq F^\circ(x; h)$$

und damit $0 \in \partial_C F(\bar{x})$ nach Definition. □

Beachte, dass F nicht konvex und damit die Bedingung nicht mehr hinreichend sein muss! (Betrachte z. B. $f(t) = -|t|$.)¹

Wir werden später auch noch die folgende Abgeschlossenheitseigenschaft benötigen.

Lemma 8.3. *Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$. Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \rightarrow x$ und sei $x_n^* \in \partial_C F(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n^* \rightharpoonup^* x^*$ in X^* . Dann ist $x^* \in \partial_C F(x)$.*

Beweis. Sei $h \in X$ beliebig. Nach Annahme gilt dann $\langle x_n^*, h \rangle_X \leq F^\circ(x_n; h)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der schwach-* Konvergenz folgt dann

$$\langle x^*, h \rangle_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n^*, h \rangle_X \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F^\circ(x_n; h).$$

Wir sind also fertig, wenn wir zeigen können, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} F^\circ(x_n; h) \leq F^\circ(x; h)$ gilt (denn dann ist nach Definition $x^* \in \partial_C F(x)$).

Nach Definition von $F^\circ(x_n; h)$ existieren Folgen $\{y_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ und $\{t_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ mit $y_{n,m} \rightarrow x_n$ und $t_{n,m} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, die den Limes superior realisieren. Wir finden also für alle $n \in \mathbb{N}$ ein y_n und t_n mit $\|y_n - x_n\|_X + t_n < n^{-1}$ (und damit insbesondere $y_n \rightarrow x$ und $t_n \rightarrow 0$) sowie

$$F^\circ(x_n; h) - \frac{1}{n} \leq \frac{F(y_n + t_n h) - F(y_n)}{t_n}$$

für n hinreichend groß. Übergang zum Limes superior für $n \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten liefert dann die gewünschte Ungleichung. □

Wir zeigen nun, dass das Clarke-Subdifferential in der Tat eine Verallgemeinerung der bereits bekannten Ableitungen darstellt.

Satz 8.4. *Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig Fréchet-differenzierbar in einer Umgebung U um $x \in X$. Dann ist $\partial_C F(x) = \{F'(x)\}$.*

¹Ähnlich wie in Satz 4.3 musste auch hier die Lipschitz-Stetigkeit von F nicht vorausgesetzt werden – das Fermat-Prinzip für das Clarke-Subdifferential charakterisiert (unter anderem) jedes lokale Minimum. Will man aber diese Charakterisierung verwenden, um nachzuprüfen ob ein gegebenes $\bar{x} \in X$ tatsächlich ein (Kandidat für einen) Minimierer ist, benötigt man eine vernünftige Darstellung des Subdifferentials – und das ist nur für (bestimmte) lokal Lipschitz-stetige Funktionale möglich.

Beweis. Zunächst folgt aus der Annahme die lokale Lipschitz-Stetigkeit: Da F' in U stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|F'(z) - F'(x)\|_{X^*} \leq 1$ und damit $\|F'(z)\|_{X^*} \leq 1 + \|F'(x)\|_{X^*}$ für alle $z \in K_\delta(x) \subset U$. Aus der Konvexität von Kugeln folgt dann $x_1, x_2 \in K_\delta(x)$ beliebig auch $x_2 + t(x_1 - x_2) \in K_\delta(x)$ für alle $t \in [0, 1]$ und damit aus [Satz 2.6](#)

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &\leq \int_0^1 \|F'(x_2 + t(x_1 - x_2))\|_{X^*} t \|x_1 - x_2\|_X dt \\ &\leq \frac{1 + \|F'(x)\|_{X^*}}{2} \|x_1 - x_2\|_X. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun $F^\circ(x; h) = F'(x)h$ für alle $h \in X$. Seien dafür $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $x_n \rightarrow x$ und $t_n \rightarrow 0^+$, die den Limes superior realisieren. Dann folgt wieder aus dem Mittelwertsatz und der Stetigkeit von F' für $h \in X$ beliebig

$$\begin{aligned} F^\circ(x; h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n + t_n h) - F(x_n)}{t_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{t_n} \langle F'(x_n + t(t_n h)), t_n h \rangle_X dt \\ &= \langle F'(x), h \rangle_X, \end{aligned}$$

da der Integrand gleichmäßig in $t \in [0, 1]$ gegen $\langle F'(x), h \rangle_X$ konvergiert. Also ist nach Definition $x^* \in \partial_C F(x)$ genau dann, wenn $\langle x^*, h \rangle_X \leq \langle F'(x), h \rangle_X$ für alle $h \in X$ gilt, was nur für $x^* = F'(x)$ möglich ist. \square

Satz 8.5. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und unterhalbstetig. Dann ist $\partial_C F(x) = \partial F(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Da F endlichwertig ist, gilt $(\text{dom } F)^o = X$, und damit ist F nach [Satz 3.10](#) lokal Lipschitz-stetig in x . Wir zeigen nun $F^\circ(x; h) = F'(x; h)$ für alle $h \in X$, woraus mit Definition (4.1) des konvexen Subdifferentials (die nach [Lemma 4.2](#) mit Definition (3.1) äquivalent ist) die Aussage folgt. Zunächst gilt stets

$$F'(x; h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} \leq \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + th) - F(y)}{t} = F^\circ(x; h).$$

Für die umgekehrte Richtung sei $\delta > 0$ beliebig. Da nach [Lemma 4.1](#) (i) für konvexe Funktionale der Differenzenquotient monoton wachsend ist, können wir abschätzen

$$\begin{aligned} F^\circ(x; h) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{y \in K_{\delta\varepsilon}(x)} \sup_{0 < t < \varepsilon} \frac{F(y + th) - F(y)}{t} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{y \in K_{\delta\varepsilon}(x)} \frac{F(y + \varepsilon h) - F(y)}{\varepsilon} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(x + \varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon} + 2L\delta \\ &= F'(x; h) + 2L\delta, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt zweimal die produktive Null zusammen mit der lokalen Lipschitz-Stetigkeit in x verwendet haben. Da $\delta > 0$ beliebig war, muss also $F^\circ(x; h) \leq F'(x; h)$ gelten. \square

Ist $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig und gilt $F^\circ(x; h) = F'(x; h)$ für alle $h \in X$, so heißt F *regulär* in x . Wie wir gerade gezeigt haben, ist jedes stetig differenzierbare sowie jedes konvexe und unterhalbstetige Funktional regulär. Anschaulich sind Funktionen also regulär in Punkten, in denen sie entweder differenzierbar sind oder einen “konvexen Knick” haben.

Wir kommen nun zu Rechenregeln. Die erste folgt wieder direkt aus der Definition.

Satz 8.6. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\partial_C(\alpha F)(x) = \alpha \partial_C(F)(x).$$

Beweis. Zunächst ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ offensichtlich αF lokal Lipschitz-stetig. Für $\alpha = 0$ steht nach [Satz 8.4](#) auf beiden Seiten $\{0\}$. Für alle $\alpha > 0$ ist nach Definition stets $(\alpha F)^\circ(x; h) = \alpha F^\circ(x; h)$ für alle $h \in X$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \alpha \partial_C F(x) &= \{\alpha x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq F^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \{\alpha x^* \in X^* : \langle \alpha x^*, h \rangle_X \leq \alpha F^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \{y^* \in X^* : \langle y^*, h \rangle_X \leq (\alpha F)^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \partial_C(\alpha F)(x). \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall muss daher nur noch die Aussage für $\alpha = -1$ gezeigt werden. Dazu schreiben wir analog mit [Lemma 8.1](#) (iv)

$$\begin{aligned} \partial_C(-F)(x) &= \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq (-F)^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \{x^* \in X^* : \langle -x^*, -h \rangle_X \leq F^\circ(x; -h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \{-y^* \in X^* : \langle y^*, g \rangle_X \leq F^\circ(x; g) \text{ für alle } g \in X\} \\ &= -\partial_C(F)(x). \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung 8.7. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in \bar{x} . Hat F ein lokales Maximum in \bar{x} , so gilt $0 \in \partial_C F(\bar{x})$.

Beweis. Hat F ein lokales Maximum in \bar{x} , so hat $-F$ ein lokales Minimum. Aus [Satz 8.2](#) folgt dann

$$0 \in \partial_C(-F)(\bar{x}) = -\partial_C F(\bar{x}),$$

d. h. $0 = -0 \in \partial_C F(\bar{x})$. \square

Die weiteren Regeln sind wieder aufwändiger. Dazu müssen wir Mengen der Form [\(8.1\)](#) vergleichen, wofür wir wiederholt die folgenden Argumente anwenden.

Lemma 8.8. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ positiv homogen, subadditiv und unterhalbstetig, und sei

$$A = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle_X \leq F(x) \text{ für alle } x \in X\}.$$

Dann ist

$$F(x) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis. Nach Definition gilt für alle $x^* \in A$ (und nur diese!) die Ungleichung $\langle x^*, x \rangle_X - F(x) \leq 0$ für alle $x \in X$. Durch Fallunterscheidung analog zu [Beispiel 5.2 \(iii\)](#) folgt daraus zusammen mit der positiven Homogenität von F für $x^* \in X^*$ beliebig

$$F^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - F(x) = \begin{cases} 0 & x^* \in A, \\ \infty & x^* \notin A, \end{cases}$$

d. h. $F^* = \delta_A$. Nun ist F nach Voraussetzung zusätzlich subadditiv und damit konvex sowie unterhalbstetig. Aus [Satz 5.1](#) folgt daher für alle $x \in X$

$$F(x) = F^{**}(x) = (\delta_A)^*(x) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle_X. \quad \square$$

Lemma 8.9. Seien $F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$ positiv homogen, subadditiv, und unterhalbstetig, und seien

$$\begin{aligned} A &:= \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \leq F(x) \text{ für alle } x \in X\}, \\ B &:= \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \leq G(x) \text{ für alle } x \in X\}, \end{aligned}$$

nichtleere Teilmengen von X^* . Gilt $F \leq G$, so ist $A \subset B$.

Beweis. Angenommen, es existiert ein $x^* \in A$ mit $x^* \notin B$. Nach Konstruktion sind sowohl A als auch B konvex und schwach-* abgeschlossen. Nach [Satz 1.11](#) existiert daher ein $x \in X$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle z^*, x \rangle_X \leq \lambda < \langle x^*, x \rangle_X \leq F(x) \quad \text{für alle } z^* \in B.$$

Aus [Lemma 8.8](#) folgt nun

$$G(x) = \sup_{z^* \in B} \langle z^*, x \rangle_X < F(x),$$

im Widerspruch zur Annahme $F \leq G$. □

Lemma 8.10. Seien $A, B \subset X^*$ konvex und schwach-* abgeschlossen. Dann ist $A = B$ genau dann, wenn gilt

$$(8.2) \quad \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle_X = \sup_{x^* \in B} \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis. Die eine Richtung ist klar. Gilt umgekehrt (8.2), so ist für alle $x \in X$

$$(\delta_A)^*(x) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle_X = \sup_{x^* \in B} \langle x^*, x \rangle_X = (\delta_B)^*(x).$$

Nun sind unter den genannten Voraussetzungen die zugehörigen Indikatorfunktionen δ_A und δ_B konvex und schwach-* unterhalbstetig. Aus Satz 5.1 (diesmal mit Satz 1.11) folgt daher

$$\delta_A = ((\delta_A)^*)^* = ((\delta_B)^*)^* = \delta_B,$$

und das ist nur dann möglich, wenn beide Mengen übereinstimmen. \square

Damit können wir zum Beispiel eine Summenregel beweisen.

Satz 8.11. *Seien $F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$. Dann gilt*

$$\partial_C(F + G)(x) \subset \partial_C F(x) + \partial_C G(x).$$

Sind F und G regulär in x , so auch $F + G$ und es gilt Gleichheit.

Beweis. Man sieht sofort die Lipschitz-Stetigkeit von $F + G$ in x . Aus der Definition des Limes superior folgt weiter für beliebiges $h \in X$

$$(F + G)^\circ(x; h) \leq F^\circ(x; h) + G^\circ(x; h).$$

Sind F und G regulär in x , so erhalten wir aus den Rechenregeln für konvergente Folgen

$$F^\circ(x; h) + G^\circ(x; h) = F'(x; h) + G'(x; h) = (F + G)'(x; h) \leq (F + G)^\circ(x; h)$$

und damit $(F + G)^\circ(x; h) = (F + G)^\circ(x; h) = (F + G)'(x; h)$ und damit die behauptete Regularität.

Nach Lemma 8.9 sind wir also fertig, wenn wir gezeigt haben, dass gilt

$$\partial_C F(x) + \partial_C G(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle_X \leq F^\circ(x; h) + G^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} =: A.$$

Dafür verwenden wir, dass beide Mengen konvex und schwach-* abgeschlossen sind, sowie dass verallgemeinerte Richtungsableitungen und damit auch ihre Summe nach Lemma 8.1 positiv homogen, subadditiv und unterhalbstetig sind. Nach Lemma 8.8 gilt daher für alle $h \in X$

$$\begin{aligned} \sup_{x^* \in \partial_C F(x) + \partial_C G(x)} \langle x^*, h \rangle_X &= \sup_{x_1^* \in \partial_C F(x)} \langle x_1^*, h \rangle_X + \sup_{x_2^* \in \partial_C G(x)} \langle x_2^*, h \rangle_X \\ &= F^\circ(x; h) + G^\circ(x; h) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, h \rangle_X, \end{aligned}$$

woraus mit Lemma 8.10 die behauptete Inklusion bzw. Gleichheit der Subdifferenziale folgt. \square

Beachten Sie den Unterschied zur konvexen Summenregel: Die Inklusion ist genau umgekehrt; auch müssen jetzt *beide* Summanden regulär sein, und zwar in genau dem Punkt, in dem die Summenregel angewendet wird. Wieder erhält man per Induktion Summenregeln für mehr Summanden (wobei diesmal alle regulär sein müssen).

Für die Kettenregel brauchen wir den folgenden „nichtglatten“ Mittelwertsatz.

Satz 8.12. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$. Dann existiert für alle $y \in X$ hinreichend nahe an x ein $\lambda \in (0, 1)$ und ein $x^* \in \partial_C F(x + \lambda(y - x))$ mit

$$F(y) - F(x) = \langle x^*, y - x \rangle_X.$$

Beweis. Wir definieren $\psi, \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\psi(\lambda) := F(x + \lambda(y - x)), \quad \varphi(\lambda) := \psi(\lambda) + \lambda(F(x) - F(y)).$$

Da F lokal Lipschitz-stetig und y nahe genug an x ist, sind sowohl φ als auch ψ Lipschitz-stetig. Wegen $\varphi(0) = F(x) = \varphi(1)$ hat φ daher ein lokales Minimum oder Maximum in einem Punkt $\bar{\lambda} \in (0, 1)$. Nach [Satz 8.2](#) oder [Folgerung 8.7](#) zusammen mit der Summenregel aus [Satz 8.11](#) sowie [Satz 8.4](#) ist daher

$$0 \in \partial_C \varphi(\bar{\lambda}) \subset \partial_C \psi(\bar{\lambda}) + \{F(x) - F(y)\}.$$

Wir sind also fertig, wenn wir zeigen können, dass für $x_{\bar{\lambda}} := x + \bar{\lambda}(y - x)$ gilt

$$(8.3) \quad \partial_C \psi(\bar{\lambda}) \subset \{ \langle x^*, y - x \rangle_X : x^* \in \partial_C F(x_{\bar{\lambda}}) \}.$$

Dafür betrachten wir zunächst für $s \in \mathbb{R}$ beliebig die verallgemeinerte Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \psi^\circ(\bar{\lambda}; s) &= \limsup_{\substack{\lambda \rightarrow \bar{\lambda} \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\psi(\bar{\lambda} + ts) - \psi(\bar{\lambda})}{t} \\ &= \limsup_{\substack{\lambda \rightarrow \bar{\lambda} \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(x + (\lambda + ts)(y - x)) - F(x + \lambda(y - x))}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{z \rightarrow x_{\bar{\lambda}} \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(z + ts(y - x)) - F(z)}{t} = F^\circ(x_{\bar{\lambda}}; s(y - x)), \end{aligned}$$

da wir im letzten Limes superior *beliebige* Folgen $z \rightarrow x_{\bar{\lambda}}$ (anstelle von Folgen der speziellen Form $z_n = x + \lambda_n(y - x)$) betrachten. Nach [Lemma 8.9](#) ist daher

$$(8.4) \quad \partial_C \psi(\bar{\lambda}) \subset \{ t^* \in \mathbb{R} : t^* s \leq F^\circ(x_{\bar{\lambda}}; s(y - x)) \text{ für alle } s \in \mathbb{R} \}.$$

Bleibt nur noch zu zeigen, dass die Mengen auf der jeweils rechten Seite von (8.3) und (8.4) – nennen wir sie A bzw. B – übereinstimmen. Dies folgt aber wieder aus [Lemmata 8.8](#) und [8.10](#), denn für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sup_{t^* \in A} t^* s = \sup_{x^* \in \partial_C F(x_{\bar{\lambda}})} \langle x^*, s(y - x) \rangle_X = F^\circ(x_{\bar{\lambda}}; s(y - x)) = \sup_{t^* \in B} t^* s. \quad \square$$

Wir kommen nun zur Kettenregel, für die im Gegensatz zum konvexen Fall die innere Abbildung nicht mehr linear sein muss; dies ist einer der wesentlichen Vorzüge des Clarke-Subdifferentials in unserem Kontext.

Satz 8.13. *Sei Y separabel, sei $F : X \rightarrow Y$ stetig differenzierbar in $x \in X$, und sei $G : Y \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $F(x)$. Dann gilt*

$$\partial_C(G \circ F)(x) \subset F'(x)^* \partial_C G(F(x)) := \{F'(x)^* y^* : y^* \in \partial_C G(F(x))\}.$$

Ist G regulär in $F(x)$, so ist auch $G \circ F$ regulär in x , und es gilt Gleichheit.

Beweis. Die Lipschitz-Stetigkeit von $G \circ F$ folgt sofort aus der von G und F . Für die Mengeninklusion bzw. Gleichheit argumentieren wir wie zuvor. Zuerst zeigen wir, dass für jedes $h \in X$ ein $y^* \in \partial_C G(F(x))$ existiert mit

$$(8.5) \quad (G \circ F)^\circ(x; h) = \langle y^*, F'(x)h \rangle_Y.$$

Dafür betrachte zwei Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ und $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ mit $x_n \rightarrow x$, $t_n \rightarrow 0$ und

$$(G \circ F)^\circ(x; h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(F(x_n + t_n h)) - G(F(x_n))}{t_n}.$$

Nun ist F insbesondere stetig; wir können also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq n_0$ sowohl x_n nahe genug an x als auch t_n klein genug ist, dass $F(x_n)$ und $F(x_n + t_n h)$ nahe genug an $F(x)$ liegen, um [Satz 8.12](#) anwenden zu können. Es existiert also für alle $n \geq n_0$ ein $\lambda_n \in (0, 1)$ und ein $y_n^* \in \partial_C G(y_n)$ für $y_n := F(x_n) + \lambda_n(F(x_n + t_n h) - F(x_n))$ mit

$$(8.6) \quad \frac{G(F(x_n + t_n h)) - G(F(x_n))}{t_n} = \left\langle y_n^*, \frac{F(x_n + t_n h) - F(x_n)}{t_n} \right\rangle_Y.$$

Wegen $x_n \rightarrow x$, $t_n \rightarrow 0$, und $\lambda_n \in (0, 1)$ sowie der Stetigkeit von F gilt nun $y_n \rightarrow F(x)$; für $n \in \mathbb{N}$ groß genug ist y_n also ebenfalls nahe genug an $F(x)$, so dass dort $y_n^* \in \partial_C G(y_n) \subset K_L(0)$ aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von G gilt. Also ist $\{y_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^*$ beschränkt und hat daher nach dem [Satz 1.10](#) von [Banach–Alaoglu](#) eine schwach-* konvergente Teilfolge, für dessen Grenzwert nach [Lemma 8.3](#) gilt $y^* \in \partial_C G(F(x))$. Andererseits ist F stetig differenzierbar in x , und deshalb konvergiert der Differenzenquotient auf der rechten Seite stark gegen $F'(x)h$. Da das Produkt von schwach-* und stark konvergenten Folgen konvergiert, erhalten wir durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in [\(8.6\)](#) die Gleichung [\(8.5\)](#). Für $y^* \in \partial_C G(F(x))$ gilt daher nach Definition des Clarke-Subdifferentials

$$(8.7) \quad (G \circ F)^\circ(x; h) = \langle y^*, F'(x)h \rangle_Y \leq G^\circ(F(x); F'(x)h).$$

Ist nun G regulär, so gilt $G^\circ(F(x); F'(x)h) = G'(F(x); F'(x)h)$ und damit wegen der Lipschitz-Stetigkeit von G und der Fréchet-Differenzierbarkeit von F

$$\begin{aligned} G^\circ(F(x); F'(x)h) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(F(x) + tF'(x)h) - G(F(x))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(F(x) + tF'(x)h) - G(F(x + th)) + G(F(x + th)) - G(F(x))}{t} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{G(F(x + th)) - G(F(x))}{t} + L\|h\|_X \frac{\|F(x) + F'(x)th - F(x + th)\|_Y}{\|th\|_X} \right) \\ &= (G \circ F)'(x; h) \leq (G \circ F)^\circ(x; h). \end{aligned}$$

(Da sowohl die Summe als auch der zweite Summand konvergieren, muss auch der erste Summand konvergieren.) Zusammen mit (8.7) folgt daraus $(G \circ F)'(x; h) = (G \circ F)^\circ(x; h)$ (d. h. $G \circ F$ ist regulär) sowie $(G \circ F)^\circ(x; h) = G^\circ(F(x); F'(x)h)$.

Wie im Beweis von Satz 8.12 zeigt man nun, dass gilt

$$F'(x)^* \partial_C G(F(x)) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq G^\circ(F(x); F'(x)h) \text{ für alle } h \in X\},$$

woraus die restlichen Behauptungen folgen. □

Wieder ist die Inklusion umgekehrt zur konvexen Kettenregel. Ist G nicht regulär aber $F'(x)$ surjektiv, so kann man auf ähnliche Weise zeigen, dass die Kettenregel mit Gleichheit (aber nicht die Regularität von $G \circ F$) gilt; siehe [Clarke 2013, Theorem 10.19].

Ist X endlich-dimensional, so ist eine explizitere Charakterisierung des Clarke-Subdifferentials möglich. Die Grundlage ist der Satz von Rademacher, der nur in \mathbb{R}^N gilt; siehe z. B. [DiBenedetto 2002, Theorem 23.2] oder [Heinonen 2005, Theorem 3.1].

Satz 8.14 (Rademacher). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Dann ist F fast überall Fréchet-differenzierbar.*

Dies erlaubt, den Limes superior in der Definition des Clarke-Subdifferentials (das wir nun als Teilmenge des \mathbb{R}^N auffassen, d. h. den Dualraum von \mathbb{R}^N mit \mathbb{R}^N identifizieren) durch einen Grenzwert zu ersetzen.

Satz 8.15. *Sei $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in \mathbb{R}^N$ und Fréchet-differenzierbar auf $\mathbb{R}^N \setminus E_F$ für eine Lebesgue-Nullmenge $E_F \subset \mathbb{R}^N$. Dann gilt*

$$(8.8) \quad \partial_C F(x) = \text{co} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n) : x_n \rightarrow x, x_n \notin E_F \right\},$$

wobei $\text{co } A$ die konvexe Hülle der Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ bezeichnet.

Beweis. Zunächst folgt aus dem Satz von Rademacher, dass so ein E_F existiert und – eingeschränkt auf die Umgebung, in der F Lipschitz-stetig ist – eine Nullmenge ist. Also existieren überhaupt Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N \setminus E_F$ mit $x_n \rightarrow x$. Weiter folgt aus der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von F für x_n hinreichend nahe an x und $h \in \mathbb{R}^N$ beliebig

$$|(\nabla F(x_n), h)| = \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x_n + th) - F(x_n)}{t} \right| \leq L \|h\|$$

und damit $\|\nabla F(x_n)\| \leq L$. Also ist $\{\nabla F(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und enthält daher eine konvergente Teilfolge. Damit ist die Menge auf der rechten Seite von (8.8) nichtleer.

Sei nun $x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n)$ für eine beliebige zulässige Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N \setminus E_F$. Da F nach Konstruktion in jedem $x_n \notin E_F$ differenzierbar ist, folgt aus Satz 8.4 insbesondere $\nabla F(x_n) \in \partial_C F(x_n)$ und damit nach Lemma 8.3 auch $x^* \in \partial_C F(x)$. Wegen der Konvexität von $\partial_C F(x)$ ist daher auch jede Konvex-Kombination von solchen x^* in $\partial_C F(x)$ enthalten. Damit folgt die Inklusion “ \supset ” der beiden Mengen.

Für die andere Inklusion zeigen wir zunächst, dass für alle $h \in \mathbb{R}^N$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$(8.9) \quad F^\circ(x; h) - \varepsilon \leq \limsup_{E_F \ni y \rightarrow x} (\nabla F(y), h) =: M(h).$$

Nach Definition von $M(h)$ und des Limes superior existiert nun für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$(\nabla F(y), h) \leq M(h) + \varepsilon \quad \text{für alle } y \in O_\delta(x) \setminus E_F.$$

Dabei kann δ so klein gewählt werden, dass F Lipschitz-stetig auf $O_\delta(x)$ ist. Insbesondere ist $E_F \cap O_\delta(x)$ eine Nullmenge. Für fast alle $y \in O_{\delta/2}(x)$ ist also F in $y + th$ für fast alle $t \in (0, \frac{\delta}{2\|h\|})$ differenzierbar (dies folgt aus dem Satz von Fubini). Für diese y und t gilt nach dem klassischen Mittelwertsatz

$$(8.10) \quad F(y + th) - F(y) = \int_0^t (\nabla F(y + sh), h) ds \leq t(M(h) + \varepsilon),$$

denn $y + sh \in O_\delta(x)$ für alle $s \in (0, t)$ nach Wahl von t . Da F stetig ist, gilt die gesamte Ungleichung in (8.10) sogar für alle $y \in O_{\delta/2}(x)$ und alle $t \in (0, \frac{\delta}{2\|h\|})$. Division durch t und Übergang zum Limes superior über alle $y \rightarrow x$ und $t \rightarrow 0^+$ ergibt nun die gewünschte Ungleichung (8.9). Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $F^\circ(x; h) \leq M(h)$ für alle $h \in \mathbb{R}^N$.

Nun kann man wie in Lemma 8.1 zeigen, dass $h \mapsto M(h)$ positiv homogen, subadditiv und unterhalbstetig ist. Wir sind daher fertig, wenn wir zeigen können, dass wir die Menge auf der rechten Seite von (8.8) – in Folge als $\text{co } A$ bezeichnet – schreiben können als

$$\text{co } A = \{x^* \in \mathbb{R}^N : (x^*, h) \leq M(h) \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^N\}.$$

Dafür verwenden wir wieder Lemma 8.10 (denn beide Mengen sind konvex und abgeschlossen). Zunächst gilt nach Definition der konvexen Hülle für alle $h \in \mathbb{R}^N$

$$\sup_{x^* \in \text{co } A} (x^*, h) = \sup_{\substack{x_i^* \in A \\ \sum_i t_i = 1, t_i \geq 0}} \sum_i t_i (x_i^*, h) = \sup_{\sum_i t_i = 1, t_i \geq 0} \sum_i t_i \sup_{x_i^* \in A} (x_i^*, h) = \sup_{x^* \in A} (x^*, h),$$

denn die Summe ist maximal genau dann, wenn jeder Summand maximal ist. Nun gilt

$$M(h) = \limsup_{E_F \ni y \rightarrow x} (\nabla F(y), h) = \sup_{E_F \ni x_n \rightarrow x} (\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n), h) = \sup_{x^* \in A} (x^*, h),$$

woraus mit [Lemma 8.8](#) die Aussage folgt. \square

Schließlich gilt, dass man ähnlich wie in [Lemma 4.6](#) das Clarke-Subdifferential von Integralfunktionalen mit Lipschitz-stetigen Integranden punktweise darstellen kann; siehe z. B. [[Clarke 1990](#), Theorem 2.7.3, 2.7.5].

Satz 8.16. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $1 \leq p \leq \infty$ wie in [Lemma 3.4](#). Dann ist für alle $u \in L^p(\Omega)$ mit $q = \frac{p}{p-1}$ ($q = 1$ für $p = \infty$)

$$\partial_C F(u) \subset \{u^* \in L^q(\Omega) : u^*(x) \in \partial_C f(u(x)) \text{ für fast alle } x \in \Omega\}.$$

Ist f regulär in $u(x)$ für alle $x \in \Omega$, so ist F regulär in u und es gilt Gleichheit.

9 SEMIGLATTE NEWTON-VERFAHREN

Die Proximalpunkt- und Splitting-Verfahren aus [Kapitel 7](#) stellen Verallgemeinerungen von Gradientenverfahren dar und weisen im Allgemeinen auch nur deren lineare Konvergenz auf. In diesem Kapitel suchen wir daher eine Verallgemeinerung des Newton-Verfahrens, für das (lokal) superlineare Konvergenz gilt.

Als Motivation betrachten wir zuerst die allgemeine Form eines Newton-artigen Verfahrens. Sei $F : X \rightarrow Y$ für zwei Banachräume X und Y , und gesucht sei ein $\bar{x} \in X$ mit $F(\bar{x}) = 0$. Ein Newton-artiges Verfahren hat dann die folgende Form:

1. wähle $M_k := M(x^k) \in L(X, Y)$ invertierbar;
2. löse $M_k s^k = -F(x^k)$;
3. setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.

Wir können uns nun fragen, unter welchen Bedingungen diese Iteration konvergiert, und insbesondere, wann die Konvergenz superlinear ist, d. h. wann gilt

$$(9.1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|_X}{\|x^k - \bar{x}\|_X} = 0.$$

Dafür setzen wir $e^k := x^k - \bar{x}$ und verwenden den Newton-Schritt sowie $F(\bar{x}) = 0$ um zu schreiben

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - \bar{x}\|_X &= \|x^k - M(x^k)^{-1}F(x^k) - \bar{x}\|_X \\ &= \|M(x^k)^{-1} [F(x^k) - F(\bar{x}) - M(x^k)(x^k - \bar{x})]\|_X \\ &= \|M(\bar{x} + e^k)^{-1} [F(\bar{x} + e^k) - F(\bar{x}) - M(\bar{x} + e^k)e^k]\|_X \\ &\leq \|M(\bar{x} + e^k)^{-1}\|_{L(Y, X)} \|F(\bar{x} + e^k) - F(\bar{x}) - M(\bar{x} + e^k)e^k\|_Y. \end{aligned}$$

Also gilt (9.1), falls erfüllt sind

- (i) eine *Regularitätsbedingung*: es existiert ein $C > 0$ mit

$$\|M(\bar{x} + e^k)^{-1}\|_{L(Y, X)} \leq C \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

(ii) eine *Approximationsbedingung*:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|F(\bar{x} + e^k) - F(\bar{x}) - M(\bar{x} + e^k)e^k\|_Y}{\|e^k\|_X} = 0.$$

Dies motiviert die folgende Definition: Wir nennen $F : X \rightarrow Y$ *Newton-differenzierbar* in $x \in X$ mit *Newton-Ableitung* $D_N F(x) \in L(X, Y)$, falls gilt

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(x + h) - F(x) - D_N F(x)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Beachte die Unterschiede zur Fréchet-Ableitung: Zum einen wird die Newton-Ableitung in $x + h$ anstelle von x ausgewertet. Wichtiger ist aber, dass kein konkreter Zusammenhang von $D_N F$ mit F gefordert wurde (im Gegensatz zur Fréchet-Ableitung, für die nur die Gâteaux-Ableitung als Kandidat in Frage kam); eine Funktion ist also nur Newton-differenzierbar (oder nicht) in Bezug auf eine konkrete Wahl von $D_N F$. Insbesondere sind Newton-Ableitungen nicht eindeutig!¹

Ist F Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung $D_N F$, so erhält man das *semiglatte Newton-Verfahren*

$$x^{k+1} = x^k - D_N F(x^k)^{-1} F(x^k).$$

Direkt aus der Konstruktion folgt dann die lokal superlineare Konvergenz.

Satz 9.1. *Sei $F : X \rightarrow Y$ und $\bar{x} \in X$ mit $F(\bar{x}) = 0$. Ist F Newton-differenzierbar in \bar{x} mit Newton-Ableitung $D_N F(\bar{x})$, und existieren $\delta > 0$ und $C > 0$ mit $\|D_N F(x)^{-1}\|_{L(Y, X)} \leq C$ für alle $x \in O_\delta(\bar{x})$, so konvergiert für alle x^0 hinreichend nahe an \bar{x} das semiglatte Newton-Verfahren superlinear gegen \bar{x} .*

Beweis. Der Beweis ist völlig analog zum Konvergenzbeweis für das klassische Newton-Verfahren. Für $x^0 \in O_\delta(\bar{x})$ gilt wie schon gezeigt

$$(9.2) \quad \|e^1\|_X \leq C \|F(\bar{x} + e^0) - F(\bar{x}) - D_N F(\bar{x} + e^0)e^0\|_Y.$$

Sei nun $\varepsilon \in (0, 1)$ beliebig. Aufgrund der Newton-Differenzierbarkeit existiert dann ein $\rho > 0$ mit

$$\|F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) - D_N F(\bar{x} + h)h\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{C} \|h\|_X \quad \text{für alle } \|h\|_X \leq \rho.$$

¹Wir folgen hier [Chen u. a. 2000; Ito & Kunisch 2008; Schiela 2008] und betrachten nur einwertige Newton-Ableitungen (in ersterer Arbeit als *slanting function* eingeführt). Alternativ kann man für jedes $x \in X$ eine Menge $\partial_N F(x)$ festlegen, aus der $M(x)$ zu wählen ist. Gelten die Approximations- und eine Beschränktheitsbedingung *gleichmäßig* für alle $M \in \partial_N F(x)$, so nennt man F *semiglatte*, was die Namensgebung in diesem Kapitel erklärt. Dieser Zugang wird z. B. in [Mifflin 1977; Kummer 1988; Ulbrich 2011] verfolgt.

Wählen wir also x^0 so, dass $\|\bar{x} - x^0\|_X \leq \min\{\delta, \rho\}$ gilt, so folgt aus (9.2) die Abschätzung $\|\bar{x} - x^1\|_X \leq \varepsilon\|\bar{x} - x^0\|_X$ und damit durch Induktion $\|\bar{x} - x^k\|_X \leq \varepsilon^k\|\bar{x} - x^0\|_X \rightarrow 0$. Da ε beliebig war, kann man für jeden Schritt ein neues $\varepsilon_k \rightarrow 0$ wählen, und daher ist die Konvergenz superlinear. \square

Der Rest des Kapitels ist nun der Konstruktion von Newton-Ableitungen gewidmet (wobei nicht verschwiegen werden soll, dass in der Praxis der Nachweis der Regularitätsbedingung die deutlich aufwändigere Aufgabe ist). Wir beginnen mit dem offensichtlichen Zusammenhang mit der Fréchet-Differenzierbarkeit.

Satz 9.2. *Ist $F : X \rightarrow Y$ stetig differenzierbar in $x \in X$, so ist F Newton-differenzierbar in x mit Newton-Ableitung $D_N F(x) = F'(x)$.*

Beweis. Für beliebige $h \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y &\leq \|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y \\ &\quad + \|F'(x) - F'(x+h)\|_{L(X,Y)}\|h\|_X, \end{aligned}$$

wobei beide Summanden $o(\|h\|_X)$ sind: der erste nach Definition der Fréchet-Ableitung und der zweite wegen der Stetigkeit von F' . \square

Rechenregeln beweist man nun analog zu denen für Fréchet-Ableitungen. Die Summenregel ist offensichtlich; wir beweisen beispielhaft die Kettenregel.

Satz 9.3. *Seien X, Y, Z Banachräume und $F : X \rightarrow Y$ Newton-differenzierbar in $x \in X$ mit Newton-Ableitung $D_N F(x)$ und $G : Y \rightarrow Z$ Newton-differenzierbar in $y := F(x) \in Y$ mit Newton-Ableitung $D_N G(y)$. Sind $D_N F$ und $D_N G$ gleichmäßig beschränkt in einer Umgebung von x bzw. y , so ist $G \circ F$ Newton-differenzierbar in x mit Newton-Ableitung*

$$D_N(G \circ F)(x) = D_N G(F(x)) \circ D_N F(x).$$

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Satz 2.5 vor. Für $h \in X$ und $g := F(x+h) - F(x)$ ist

$$(G \circ F)(x+h) - (G \circ F)(x) = G(y+g) - G(y).$$

Aus der Newton-Differenzierbarkeit von G folgt nun

$$\|(G \circ F)(x+h) - (G \circ F)(x) - D_N G(y+g)g\|_Z = r_1(\|g\|_Y)$$

mit $r_1(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Aus der Newton-Differenzierbarkeit von F folgt weiter

$$\|g - D_N F(x+h)h\|_Y = r_2(\|h\|_X)$$

mit $r_2(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Insbesondere ist

$$\|g\|_Y \leq \|D_N F(x+h)\|_{L(X,Y)}\|h\|_Y + r_2(\|h\|_X).$$

Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $D_N F$ gilt also $\|g\|_Y \rightarrow 0$ für $\|h\|_X \rightarrow 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \|(G \circ F)(x+h) - (G \circ F)(x) - D_N G(F(x+h))D_N F(x+h)h\|_Z & \\ & \leq \|G(y+g) - G(g) - D_N G(y+g)g\|_Z \\ & \quad + \|D_N G(y+g)[g - D_N F(x+h)h]\|_Z \\ & \leq r_1(\|g\|_Y) + \|D_N G(y+g)\|_{L(Y,Z)} r_2(\|h\|_X), \end{aligned}$$

woraus wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $D_N G$ die gewünschte Aussage folgt. \square

Schließlich folgt direkt aus der Definition der Produktnorm und der Newton-Differenzierbarkeit, dass für vektorwertige Funktionen die Newton-Ableitung komponentenweise berechnet werden kann.

Satz 9.4. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig und seien $F_i : X \rightarrow Y_i$ Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung $D_N F_i$ für $1 \leq i \leq m$. Dann ist

$$F : X \rightarrow (Y_1 \times \dots \times Y_m), \quad x \mapsto (F_1(x), \dots, F_m(x))^T$$

Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung

$$D_N F(x) = (D_N F_1(x), \dots, D_N F_m(x))^T.$$

Da die Definition keine konstruktive Vorschrift für die Newton-Ableitung enthält, bleibt die Frage, wie man dafür Kandidaten erhält, für die die Approximationsbedingung nachgeprüft werden kann. Für zwei Klassen von Funktionen ist solch eine explizite Konstruktion bekannt.

LOKAL LIPSCHITZ-STETIGE FUNKTIONEN AUF \mathbb{R}^N

Ist $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, so liefert das Clarke-Subdifferential die gesuchten Kandidaten, die wegen [Satz 8.15](#) eine explizite Darstellung haben. Unter zusätzlichen Annahmen sind diese Kandidaten auch tatsächlich Newton-Ableitungen.²

Eine Funktion $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stückweise (stetig) differenzierbar* oder *PC¹-Funktion*, falls F stetig ist und für alle $x \in \mathbb{R}^N$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ um x sowie eine endliche Menge $\{F_i : U \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ von stetig differenzierbaren Funktionen existiert mit

$$F(y) \in \{F_i(y)\}_{i \in I} \quad \text{für alle } y \in U.$$

²Dies war die ursprüngliche Herleitung der semiglatte Newton-Verfahren.

Wir nennen F dann eine *stetige Auswahl* der F_i in U . Die Menge

$$I(x) := \{i \in I : F(x) = F_i(x)\}$$

heißt *aktive Index-Menge*. Aufgrund der Stetigkeit der F_i gilt $F(y) \neq F_j(y)$ für alle $j \notin I(x)$ und y hinreichend nahe an x . Indizes, die nur auf einer Nullmenge aktiv sind, müssen wir in Folge nicht berücksichtigen. Wir definieren daher die *essentiell aktive Index-Menge*

$$I_e(x) := \{i \in I : x \in \text{cl}(\{y \in U : F(y) = F_i(y)\}^o)\} \subset I(x).$$

PC¹-Funktionen sind stets lokal Lipschitz-stetig; siehe [Scholtes 2012, Corollary 4.1.1].

Satz 9.5. Sei $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise differenzierbar. Dann ist F lokal Lipschitz-stetig mit Konstante $L = \max_{i \in I(x)} L_i$.

Aus Satz 8.15 erhalten wir daher die folgende Darstellung des Clarke-Subdifferentials.

Satz 9.6. Sei $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise differenzierbar. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^N$

$$\partial_C F(x) = \text{co} \{ \nabla F_i(x) : i \in I_e(x) \}.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^N$ beliebig. Nach Satz 8.15 genügt zu zeigen, dass gilt

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n) : x_n \rightarrow x, x_n \notin E_F \right\} = \{ \nabla F_i(x) : i \in I_e(x) \}.$$

Sei dafür $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}^N mit $x_n \rightarrow x$, F differenzierbar in x_n für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\nabla F(x_n) \rightarrow x^* \in \mathbb{R}^n$. Da F differenzierbar ist in x_n , muss $F(y) = F_{i_n}(y)$ für ein i_n und alle y hinreichend nahe an x_n gelten, woraus $\nabla F(x_n) = \nabla F_{i_n}(x_n)$ folgt. Für $n \in \mathbb{N}$ groß genug können wir darüberhinaus $i_n \in I_e(x)$ (eventuell durch Hinzunahme einer weiteren Nullmenge zu E_F) annehmen. Betrachten wir Teilfolgen $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit konstanten Indizes $i_{n_k} = i \in I_e(x)$ (solche existieren, da $I_e(x)$ endlich ist), so erhalten wir wegen der Stetigkeit von ∇F_i

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla F(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla F_i(x_{n_k}) \in \{ \nabla F_i(x) : i \in I_e(x) \}.$$

Umgekehrt existiert für $\nabla F_i(x)$ mit $i \in I_e(x)$ nach Definition der essentiell aktiven Indizes eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x$ und $F = F_i$ in einer hinreichend kleinen Umgebung aller x_n . Wegen der stetigen Differenzierbarkeit der F_i ist dann $\nabla F(x_n) = \nabla F_i(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\nabla F_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F_i(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n). \quad \square$$

Daraus folgt die Newton-Differenzierbarkeit von PC¹-Funktionen.

Satz 9.7. Sei $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise differenzierbar. Dann ist F Newton-differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}^N$, und jedes $D_N F(x) \in \partial_C F(x)$ ist eine Newton-Ableitung.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^N$ beliebig und $h \in X$ mit $x+h \in U$. Nach [Satz 9.6](#) hat jedes $D_N F(x+h) \in \partial_C F(x+h)$ die Form

$$D_N F(x+h) = \sum_{i \in I_e(x+h)} t_i \nabla F_i(x+h) \quad \text{für} \quad \sum_{i \in I_e(x+h)} t_i = 1, t_i \geq 0.$$

Da alle F_i stetig sind, gilt für alle $h \in \mathbb{R}^N$ mit $\|h\|$ hinreichend klein $I_e(x+h) \subset I(x+h) \subset I(x)$. Also ist sowohl $F(x+h) = F_i(x+h)$ als auch $F(x) = F_i(x)$ für alle $i \in I_e(x+h)$. Damit folgt aus [Satz 9.2](#)

$$|F(x+h) - F(x) - D_N F(x+h)h| = \sum_{i \in I_e(x+h)} t_i |F_i(x+h) - F_i(x) - \nabla F_i(x+h)h| = o(\|h\|),$$

da alle F_i nach Annahme stetig differenzierbar sind. □

Als Anwendung haben wir natürlich die Proximalpunkt-Formulierung von Optimalitätsbedingungen für konvexe Probleme vor Augen.

Beispiel 9.8. Wir betrachten die Minimierung von $F + G$ für $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $G = \|\cdot\|_1$. Analog zur Herleitung des expliziten Splitting-Verfahrens ([7.3](#)) schreiben wir die notwendige Optimalitätsbedingung $0 \in \partial(F+G)(\bar{x})$ äquivalent um als

$$\bar{x} - \text{prox}_{\gamma G}(\bar{x} - \gamma \nabla F(\bar{x})) = 0$$

für $\gamma > 0$ beliebig. Nach [Beispiel 6.14](#) (ii) ist die Proximalpunkt-Abbildung für G komponentenweise gegeben durch

$$[\text{prox}_{\gamma G}(x)]_i = \begin{cases} x_i - \gamma & \text{falls } x_i > \gamma, \\ 0 & \text{falls } x \in [-\gamma, \gamma], \\ x_i + \gamma & \text{falls } x_i < -\gamma, \end{cases}$$

was offensichtlich eine stückweise differenzierbare Funktion ist. Nach [Satz 9.6](#) ist daher (ebenfalls komponentenweise)

$$[\partial_C(\text{prox}_{\gamma G})(x)]_i = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } |x_i| > \gamma, \\ \{0\} & \text{falls } |x_i| < \gamma, \\ [0, 1] & \text{falls } |x_i| = \gamma. \end{cases}$$

Nach [Satz 9.7](#) zusammen mit [Satz 9.4](#) ist daher eine mögliche Newton-Ableitung

$$[D_N \text{prox}_{\gamma G}(x)h]_i = [\chi_{\{|x| \geq \gamma\}}h]_i := \begin{cases} h_i & \text{falls } |x_i| \geq \gamma, \\ 0 & \text{falls } |x_i| < \gamma. \end{cases}$$

(Welchem Fall wir die Gleichheit zuschlagen, ist dabei willkürlich.) Nun sind $D_N \text{prox}_{\gamma G}(x)$ und $D_N(\nabla F)(x) = \nabla^2 F(x)$ (wegen der stetigen Differenzierbarkeit) lokal gleichmäßig

beschränkt, und mit Hilfe der Kettenregel (Satz 9.3) erhalten wir nach etwas Umformen den semiglaten Newton-Schritt

$$\left(\chi_{\mathcal{A}_k} + \gamma \chi_{\mathcal{I}_k} \nabla^2 F(x^k) \right) s^k = -x^k + \text{prox}_{\gamma G}(x^k - \gamma \nabla F(x^k)).$$

wobei wir die *aktive* bzw. *inaktive Menge* definiert haben als

$$\mathcal{A}_k := \{i \in \{1, \dots, n\} : |x_i^k - \gamma [\nabla F(x^k)]_i| < \gamma\}, \quad \mathcal{I}_k := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{A}_k.$$

Partitionieren wir auch s^k sowie die rechte Seite in aktive und inaktive Komponenten, setzen die Fallunterscheidung für $\text{prox}_{\gamma G}$ ein, und sortieren das lineare Gleichungssystem so um, dass aktive und inaktive Komponenten zu Blöcken zusammengefasst sind, so erhält der Newton-Schritt die Form einer *aktiven-Mengen-Strategie*; siehe auch [Ito & Kunisch 2008, Kapitel 8.4].

SUPERPOSITIONSOPERATOREN AUF $L^p(\Omega)$

In unendlichdimensionalen Funktionenräumen gilt der Satz von Rademacher nicht, so dass das Clarke-Subdifferential keinen algorithmisch nutzbaren Kandidaten für eine Newton-Ableitung mehr liefert. Eine Ausnahme bilden Superpositionsoperatoren, die durch Newton-differenzierbare skalare Funktionen definiert sind; für diese kann die Newton-Ableitung punktweise charakterisiert werden.

Wir betrachten wieder für ein offenes und beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine Carathéodory-Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (d. h. f ist meßbar in x und stetig in z) sowie für $1 \leq p, q \leq \infty$ den zugehörigen Superpositionsoperator

$$F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega), \quad [F(u)](x) = f(x, u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Wir möchten nun die Newton-Ableitung $D_N F$ von F ebenfalls als Superpositionsoperator der Newton-Ableitung $D_N f(x, z)$ von $z \mapsto f(x, z)$ darstellen. Dabei ist die Forderung, $D_N f$ sei ebenfalls Carathéodory-Funktion, zu einschränkend, denn wir wollen auch unstetige Ableitungen zulassen. Für unsere Zwecke genügt eine schwächere Eigenschaft: Eine Funktion heißt *Baire–Carathéodory-Funktion*, wenn sie punktwaiser Grenzwert von Carathéodory-Funktionen ist.

Unter bestimmten Wachstumsbedingungen³ an f und $D_N f$ können wir die Newton-Differenzierbarkeit von f auf F übertragen, wobei wir wieder eine zwei-Norm-Diskrepanz berücksichtigen müssen.

Satz 9.9. *Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion. Es gelte weiterhin*

- (i) $z \mapsto f(x, z)$ ist gleichmäßig Lipschitz-stetig für fast alle $x \in \Omega$ und $f(x, 0)$ ist beschränkt;

³die deutlich abgeschwächt werden können; siehe [Schiela 2008, Proposition A.1]

(ii) $z \mapsto f(x, z)$ ist Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung $z \mapsto D_N f(x, z)$ für fast alle $x \in \Omega$;

(iii) $D_N f$ ist eine gleichmäßig beschränkte Baire–Carathéodory-Funktion.

Dann ist für alle $1 \leq q < p < \infty$ der zugehörige Superpositionsoperator $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung

$$D_N F : L^p(\Omega) \rightarrow L(L^p(\Omega), L^q(\Omega)), \quad [D_N F(u)h](x) = D_N f(x, u(x))h(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$ und alle $h \in L^p(\Omega)$.

Beweis. Zunächst folgt aus der gleichmäßigen Lipschitz-Stetigkeit in z zusammen mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f(x, z)| \leq |f(x, 0)| + L|z| \leq C + L|z|^{q/q} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega, z \in \mathbb{R},$$

und damit die Wachstumsbedingung (2.5) für alle $1 \leq q < \infty$. Wegen der stetigen Einbettung $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < p < \infty$ ist also $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ nach Satz 2.8 wohldefiniert und stetig.

Ist nun $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, so ist $x \mapsto D_N f(x, u(x))$ nach Annahme Grenzwert einer Folge von meßbaren Funktionen und damit selber meßbar. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit folgt nun insbesondere die Wachstumsbedingung für $p' = p$ und $q' = p - q > 0$. Analog zum Beweis von Satz 2.9 erhält man daraus, dass der zugehörige Superpositionsoperator $D_N F : L^p(\Omega) \rightarrow L^s(\Omega)$ für $s := \frac{pq}{p-q}$ wohldefiniert und stetig ist, und deshalb für $u \in L^p(\Omega)$ durch $h \mapsto D_N F(u)h$ ein linearer und beschränkter Operator $D_N F(u) : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ definiert wird. (Wir unterscheiden diesmal nicht in der Notation zwischen linearem Operator und der Funktion, die durch punktweise Multiplikation diesen Operator definiert.)

Um zu zeigen, dass $D_N F(u)$ eine Newton-Ableitung von F in $u \in L^p(\Omega)$ ist, betrachten wir das punktweise Residuum

$$r : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad r(x, z) := \begin{cases} \frac{|f(x, z) - f(x, u(x)) - D_N f(x, z)(z - u(x))|}{|z - u(x)|} & \text{falls } z \neq u(x), \\ 0 & \text{falls } z = u(x). \end{cases}$$

Da f Carathéodory- und $D_N f$ Baire–Carathéodory-Funktion ist, ist für beliebiges $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar auch $x \mapsto r(x, \tilde{u}(x)) =: R(\tilde{u})$ meßbar (Summe, Produkt und Quotient von meßbaren Funktionen ist meßbar). Für $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$ folgt aus der gleichmäßigen Lipschitz-Stetigkeit von f und der gleichmäßigen Beschränktheit von $D_N f$

$$(9.3) \quad |[R(\tilde{u})](x)| = \frac{|f(x, \tilde{u}(x)) - f(x, u(x)) - D_N f(x, \tilde{u}(x))(\tilde{u}(x) - u(x))|}{|\tilde{u}(x) - u(x)|} \leq L + C$$

und damit $R(\tilde{u}) \in L^\infty(\Omega)$. Also ist der Superpositionsoperator $R : L^p(\Omega) \rightarrow L^s(\Omega)$ wohldefiniert. Sei nun $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine Folge mit $u_n \rightarrow u \in L^p(\Omega)$. Dann existiert eine

Teilfolge, die wir wieder mit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, mit $u_n(x) \rightarrow u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Da $z \mapsto f(x, z)$ Newton-differenzierbar ist, gilt nach Definition $r(x, u_n(x)) \rightarrow 0$ punktweise fast überall. Zusammen mit der Beschränktheit (9.3) gilt daher nach dem Satz von Lebesgue auch $R(u_n) \rightarrow 0$ in $L^s(\Omega)$ (wegen Eindeutigkeit des Grenzwertes für die gesamte Folge).⁴ Also folgt für beliebige $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$ wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = \frac{1}{q}$ aus der Hölderschen Ungleichung

$$\|F(\tilde{u}) - F(u) - D_N F(\tilde{u})(\tilde{u} - u)\|_{L^q} = \|R(\tilde{u})(\tilde{u} - u)\|_{L^q} \leq \|R(\tilde{u})\|_{L^s} \|\tilde{u} - u\|_{L^p}.$$

Setzen wir nun $\tilde{u} := u + h$ für $h \in L^p(\Omega)$ mit $\|h\|_{L^p} \rightarrow 0$, so ist dies wegen $\|R(u + h)\|_{L^s} \rightarrow 0$ genau die Definition der Newton-Differenzierbarkeit von F in u . \square

Für $p = q \in [1, \infty]$ ist die Aussage dagegen im Allgemeinen falsch, was durch Gegenbeispiele belegt werden kann.

Aufgrund der zwei-Norm-Diskrepanz können wir das semiglatte Newton-Verfahren im Funktionenraum in der Regel nicht direkt auf Proximalpunkt-Formulierungen anwenden, weshalb wir auf die Moreau-Yosida-Regularisierung ausweichen müssen.

Beispiel 9.10. Wir betrachten analog zu [Beispiel 9.8](#) die Minimierung von $F + G$ für $F : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $G = \|\cdot\|_{L^1}$. Die Proximalpunktformulierung der notwendigen Optimalitätsbedingung $0 \in \partial(F + G)(\bar{u})$,

$$\bar{u} - \text{prox}_{\gamma G}(\bar{u} - \gamma \nabla F(\bar{u})) = 0,$$

müssen wir nun als Gleichung in $L^2(\Omega)$ auffassen, aber $\text{prox}_{\gamma G}$ ist *nicht* Newton-differenzierbar von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$. Wir ersetzen daher in der äquivalenten Optimalitätsbedingung

$$\begin{cases} -\bar{p} = \nabla F(\bar{u}), \\ \bar{u} \in \partial G^*(\bar{p}), \end{cases}$$

das Subdifferential von G^* durch die Moreau-Yosida-Regularisierung $H_\gamma := (\partial G^*)_\gamma$, welche nach [Folgerung 6.15](#) und [Beispiel 6.19](#) punktweise gegeben ist durch $[H_\gamma(p)](x) = h_\gamma(p(x))$ für

$$h_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\gamma}(t - 1) & \text{falls } t > 1, \\ 0 & \text{falls } t \in [-1, 1], \\ \frac{1}{\gamma}(t + 1) & \text{falls } t < -1. \end{cases}$$

Diese Funktion ist offensichtlich Lipschitz-stetig und stückweise differenzierbar. Nach [Satz 9.6](#) ist daher

$$\partial_C h_\gamma(t) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{\gamma} \right\} & \text{falls } |t| > 1, \\ \{0\} & \text{falls } |t| < 1, \\ \left[0, \frac{1}{\gamma} \right] & \text{falls } |t| = 1, \end{cases}$$

⁴Dieser Schritt scheitert für $F : L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$, denn punktweise Konvergenz impliziert nicht gleichmäßige Konvergenz fast überall.

und nach [Satz 9.7](#) zusammen mit [Satz 9.4](#) ist eine mögliche Newton-Ableitung

$$D_N h_\gamma(t)h = \frac{1}{\gamma} \chi_{\{|t| \geq 1\}} h = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} h & \text{falls } |t| \geq 1, \\ 0 & \text{falls } |t| < 1. \end{cases}$$

Die Funktion $D_N h_\gamma$ ist nun gleichmäßig beschränkt und kann, wie man leicht zeigt, punktweise durch eine Folge von stetigen Funktionen approximiert werden. Also ist $H_\gamma : L^p(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ Newton-differenzierbar für alle $p > 2$, und eine Newton-Ableitung ist gegeben durch

$$[D_N H_\gamma(p)h](x) = \frac{1}{\gamma} \chi_{\{|p| \geq 1\}}(x)h(x).$$

Angenommen, $\bar{p} = -\nabla F(\bar{u}) \in L^p(\Omega)$ für ein $p > 2$. Dann ist nach [Satz 9.2](#) und der Kettenregel ([Satz 9.3](#)) die regularisierte Optimalitätsbedingung

$$\bar{u} - H_\gamma(-\nabla F(\bar{u})) = 0$$

Newton-differenzierbar, und wir erhalten den semiglatten Newton-Schritt

$$\left(\text{Id} + \frac{1}{\gamma} \chi_{\{|\nabla F(u^k)| \geq 1\}} \nabla^2 F(u^k) \right) s^k = -u^k + H_\gamma(-\nabla F(u^k)).$$

In der Praxis hängt der Konvergenzbereich des Newton-Verfahrens von γ ab. Man löst daher oft eine Folge von Problemen mit abnehmendem γ , wobei man die Lösung des vorhergehenden Problems als Startwert für das folgende nimmt.

LITERATUR

- J. APPELL & P. ZABREIKO (1990), *Nonlinear Superposition Operators*, New York: Cambridge University Press.
- H. H. BAUSCHKE & P. L. COMBETTES (2017), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2. Aufl., CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, New York: Springer, DOI: [10.1007/978-3-319-48311-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-48311-5).
- A. BECK & M. TEOULLE (2009), A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM J. Imaging Sci.* 2(1), 183–202, DOI: [10.1137/080716542](https://doi.org/10.1137/080716542).
- M. BROKATE (2014), *Konvexe Analysis und Evolutionsprobleme*, Vorlesungsskript, Zentrum Mathematik, TU München, URL: http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/cev_ss14.pdf.
- A. CEGIELSKI (2012), *Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces*, Bd. 2057, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Heidelberg, DOI: [10.1007/978-3-642-30901-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-30901-4).
- A. CHAMBOLLE & T. POCK (2011), A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging, *J Math Imaging Vis* 40(1), 120–145, DOI: [10.1007/s10851-010-0251-1](https://doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1).
- X. CHEN, Z. NASHED & L. QI (2000), Smoothing methods and semismooth methods for nondifferentiable operator equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 38(4), 1200–1216, DOI: [10.1137/S0036142999356719](https://doi.org/10.1137/S0036142999356719).
- F. CLARKE (2013), *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, London: Springer, DOI: [10.1007/978-1-4471-4820-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3).
- F. H. CLARKE (1990), *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Bd. 5, Classics Appl. Math. Philadelphia, PA: SIAM, DOI: [10.1137/1.9781611971309](https://doi.org/10.1137/1.9781611971309).
- C. CLASON (2015), *Funktionalanalysis I*, Vorlesungsskript, Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, URL: <https://www.uni-due.de/~adfo4op/skripte/FunktAnSkript15.pdf>.
- E. DI BENEDETTO (2002), *Real analysis*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, DOI: [10.1007/978-1-4612-0117-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0117-5).
- M. DOBROWOLSKI (2010), *Angewandte Funktionalanalysis*, Berlin: Springer-Verlag, DOI: [10.1007/978-3-642-15269-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-15269-6).
- J. ECKSTEIN & D. P. BERTSEKAS (1992), On the Douglas–Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators, *Mathematical Programming* 55(1-3), 293–318, DOI: [10.1007/bf01581204](https://doi.org/10.1007/bf01581204).

- I. EKELAND & R. TÉMAM (1999), *Convex Analysis and Variational Problems*, Bd. 28, Classics Appl. Math. Philadelphia, PA: SIAM, DOI: [10.1137/1.9781611971088](https://doi.org/10.1137/1.9781611971088).
- B. HE & X. YUAN (2012), Convergence analysis of primal-dual algorithms for a saddle-point problem: from contraction perspective, *SIAM J. Imag. Sci.* 5(1), 119–149, DOI: [10.1137/100814494](https://doi.org/10.1137/100814494).
- J. HEINONEN (2005), *Lectures on Lipschitz analysis*, Bd. 100, Rep. Univ. Jyväskylä Dept. Math. Stat. University of Jyväskylä, URL: <http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep100.pdf>.
- K. ITO & K. KUNISCH (2008), *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*, Bd. 15, Advances in Design and Control, Philadelphia, PA: SIAM, DOI: [10.1137/1.9780898718614](https://doi.org/10.1137/1.9780898718614).
- B. KUMMER (1988), Newton's method for non-differentiable functions, *Mathematical Research* 45, 114–125.
- R. MIFFLIN (1977), Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization, *SIAM J. Control Optimization* 15(6), 959–972, DOI: [10.1137/0315061](https://doi.org/10.1137/0315061).
- Y. E. NESTEROV (1983), A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$, *Soviet Math. Doklad.* 27(2), 372–376.
- Y. NESTEROV (2004), *Introductory Lectures on Convex Optimization*, Bd. 87, Applied Optimization, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, DOI: [10.1007/978-1-4419-8853-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8853-9).
- N. PARIKH & S. BOYD (2014), Proximal algorithms, *Foundations and Trends in Optimization* 1(3), 123–231, DOI: [10.1561/2400000003](https://doi.org/10.1561/2400000003).
- M. RŮŽIČKA (2004), *Nichtlineare Funktionalanalysis*, Berlin: Springer, DOI: [10.1007/3-540-35022-5](https://doi.org/10.1007/3-540-35022-5).
- A. SCHIELA (2008), A simplified approach to semismooth Newton methods in function space, *SIAM J. Opt.* 19(3), 1417–1432, DOI: [10.1137/060674375](https://doi.org/10.1137/060674375).
- W. SCHIROTZEK (2007), *Nonsmooth Analysis*, Universitext, Berlin: Springer, DOI: [10.1007/978-3-540-71333-3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71333-3).
- S. SCHOLTES (2012), *Introduction to piecewise differentiable equations*, Springer Briefs in Optimization, Springer, New York, DOI: [10.1007/978-1-4614-4340-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4340-7).
- M. ULBRICH (2011), *Semismooth Newton Methods for Variational Inequalities and Constrained Optimization Problems in Function Spaces*, Bd. 11, MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia, PA: SIAM, DOI: [10.1137/1.9781611970692](https://doi.org/10.1137/1.9781611970692).
- D. WERNER (2011), *Funktionalanalysis*, 7. Aufl., Berlin: Springer-Verlag, DOI: [10.1007/978-3-642-21017-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-21017-4).