

NICHTGLATTE ANALYSIS UND OPTIMIERUNG

VORLESUNGSSKRIPT, SOMMERSEMESTER 2016

Christian Clason

Stand vom 20. Juli 2016

Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen

INHALTSVERZEICHNIS

I GRUNDLAGEN

- 1 GRUNDLAGEN DER FUNKTIONALANALYSIS 4
 - 1.1 Normierte Räume 4
 - 1.2 Starke und schwache Konvergenz 6
 - 1.3 Hilberträume 11
- 2 GRUNDLAGEN DER VARIATIONSRECHNUNG 13
 - 2.1 Direkte Methode der Variationsrechnung 13
 - 2.2 Differenzierbarkeit in Banachräumen 17
 - 2.3 Superpositionsoperatoren 20

II KONVEXE ANALYSIS

- 3 KONVEXE FUNKTIONEN 24
- 4 DAS KONVEXE SUBDIFFERENTIAL 30
- 5 FENCHEL-DUALITÄT 39
- 6 MONOTONE OPERATOREN UND PROXIMALPUNKTE 46
 - 6.1 Monotone Operatoren 46
 - 6.2 Resolventen und Proximalpunkte 49
 - 6.3 Moreau–Yosida-Regularisierung 55
- 7 PROXIMALPUNKT- UND SPLITTING-VERFAHREN 59
 - 7.1 Proximalpunkt-Verfahren 59
 - 7.2 Explizites Splitting 61
 - 7.3 Implizites Splitting 65
 - 7.4 Primal-duale Verfahren 66

III LIPSCHITZ-ANALYSIS

8 DAS CLARKE-SUBDIFFERENTIAL 71

9 SEMIGLATTE NEWTON-VERFAHREN 83

ÜBERBLICK

Die Optimierung beschäftigt sich mit der Charakterisierung und Berechnung von Lösungen von Minimierungsproblemen der Form

$$\min_{u \in U} F(u)$$

für eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Konkret fragt man sich:

1. Hat dieses Problem eine Lösung, d. h. existiert ein $\bar{x} \in U$ mit

$$F(\bar{x}) \leq F(x) \quad \text{für alle } x \in U?$$

2. Gibt es eine intrinsische Charakterisierung von \bar{x} , d. h. ohne Vergleich mit allen anderen $x \in U$?
3. Wie kann dieses \bar{x} (effizient) berechnet werden?

Für $U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich das Vorgehen wie folgt skizzieren:

1. Ist U kompakt und ist F stetig, so nimmt die Funktion F nach dem Satz von Weierstraß ihr Minimum in $\bar{x} \in U$ an.
2. Sind F und G differenzierbar, so gilt das *Fermat-Prinzip*

$$0 = F'(\bar{x}).$$

3. Ist F stetig differenzierbar und U offen, so kann man Gradientenverfahren verwenden: Wähle x^0 und setze für $k = 1, \dots$

$$x^{k+1} = x^k - t_k F'(x^k)$$

mit geeigneter Schrittweite t_k , dann gilt $x^k \rightarrow \bar{x}$ für $k \rightarrow \infty$.

Ist F sogar zweimal stetig differenzierbar, kann man das Newton-Verfahren für die Nullstelle von F' anwenden: Wähle x^0 geeignet und setze für $k = 1, \dots$

$$x^{k+1} = x^k - F''(x^k)^{-1} F'(x^k).$$

Nun gibt es zahlreiche praktisch relevante Funktionen, die *nicht* differenzierbar sind, wie etwa die Betrags- oder die Maximumsfunktion. In der nichtglatten Analysis sucht man daher nach verallgemeinerten Ableitungsbegriffen, die auch für solche Funktionen das obige Vorgehen erlauben, und gleichzeitig genug Rechenregeln zulassen, um für eine große Klasse von Funktionen explizit angegeben werden können. In dieser Vorlesung konzentrieren wir uns auf die beiden Klassen

- i) der konvexen Funktionen, und
- ii) der lokal Lipschitz-stetigen Funktionen,

die zusammen ein breites Spektrum an Anwendungen abdecken. Insbesondere bieten erstere eine Grundlage für verallgemeinerte Gradientenverfahren, letztere für verallgemeinerte Newton-Verfahren.

Als weiterer Schwerpunkt wird die Optimierung hier in *unendlichdimensionalen* Funktionenräumen betrachtet; die gesuchten Minimierer sind also Funktionen. Dadurch können die gewonnenen Resultate auf Probleme aus der Optimalsteuerung von Differentialgleichungen und der mathematischen Bildverarbeitung angewendet werden; insbesondere sind die vorgestellten Verfahren *diskretisierungsunabhängig*, können also auf jede (vernünftige) endlichdimensionale Approximation angewendet werden, ohne dass die Feinheit der Diskretisierung eine Rolle spielt.

Dieses Skriptum basiert vor allem auf den folgenden Werken:

- [1] H. H. Bauschke und P. L. Combettes (2011). *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York. DOI: [10.1007/978-1-4419-9467-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9467-7)
- [2] M. Brokate (2014). „Konvexe Analysis und Evolutionsprobleme“. Vorlesungsskript, Zentrum Mathematik, TU München. URL: http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/cev_ss14.pdf
- [3] F. Clarke (2013). *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer, London. DOI: [10.1007/978-1-4471-4820-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3)
- [4] A. Schiela (2008). *A simplified approach to semismooth Newton methods in function space*. SIAM J. Opt. 19.3, S. 1417–1432. DOI: [10.1137/060674375](https://doi.org/10.1137/060674375)
- [5] W. Schirotzek (2007). *Nonsmooth Analysis*. Universitext. Springer, Berlin. DOI: [10.1007/978-3-540-71333-3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71333-3)
- [6] M. Ulbrich (2011). *Semismooth Newton Methods for Variational Inequalities and Constrained Optimization Problems in Function Spaces*. Bd. 11. MOS-SIAM Series on Optimization. SIAM, Philadelphia, PA. DOI: [10.1137/1.9781611970692](https://doi.org/10.1137/1.9781611970692)

Teil I

GRUNDLAGEN

GRUNDLAGEN DER FUNKTIONALANALYSIS

In diesem Kapitel stellen wir die für diese Vorlesung wesentlichen Begriffe, Notationen und Resultate zusammen. Für Beweise wird auf die Standardliteratur verwiesen, z. B. auf [Werner 2011], sowie auf [Clason 2015].



1.1 NORMIERTE RÄUME

Im Folgenden bezeichne X ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} , wobei wir uns hier stets auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ heißt *Norm* (auf X), falls für alle $x \in X$ gilt

- (i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$,
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $y \in X$,
- (iii) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0 \in X$.

Beispiel 1.1. (i) Auf $X = \mathbb{R}^N$ werden Normen definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |x_i|.$$

(ii) Auf $X = \ell^p$ (dem Raum der reellen Folgen, auf dem folgende Ausdrücke endlich sind) sind Normen definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, \infty} |x_i|.$$

(iii) Auf $X = L^p(\Omega)$ (dem Raum der messbaren reellen Funktionen auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, auf dem folgende Ausdrücke endlich sind) sind Normen definiert durch

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

(iv) Auf $X = C(\overline{\Omega})$ (dem Raum der stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$) ist eine Norm definiert durch

$$\|u\|_C = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Eine analoge Norm ist auf $X = C_0(\Omega)$ (dem Raum der stetigen Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger) definiert, wenn das Supremum nur über $x \in \Omega$ genommen wird.

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X , so bezeichnet man das Paar $(X, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum*, und schreibt in diesem Fall oft $\|\cdot\|_X$. Ist die Norm kanonisch (etwa in Beispiel 1.1 (ii)–(iv)), so wird sie oft weggelassen.

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen *äquivalent* auf X , falls $c_1, c_2 > 0$ existieren mit

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Ist X endlichdimensional, so sind alle Normen auf X äquivalent. Die Konstanten c_1, c_2 hängen dann jedoch von der Dimension N von X ab; die Vermeidung solcher dimensionsabhängiger Konstanten ist einer der Gründe, warum wir Optimierung in unendlichdimensionalen Funktionenräumen betreiben wollen.

Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume mit $X \subset Y$, so heißt X *stetig eingebettet* in Y , geschrieben $X \hookrightarrow Y$, falls ein $C > 0$ existiert mit

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Wir betrachten nun Abbildungen zwischen normierten Räumen. Seien im Folgenden stets $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $U \subset X$, und $F : U \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir bezeichnen mit

- $\operatorname{dom} F := U$ den *Definitionsbereich* (englisch „domain“) von F ;
- $\operatorname{ker} F := \{x \in U : F(x) = 0\}$ den *Kern* (englisch „kernel“ oder „null space“) von F ;
- $\operatorname{ran} F := \{F(x) \in Y : x \in U\}$ das *Bild* (englisch „range“) von F .
- $\operatorname{graph} F := \{(x, y) \in X \times Y : y = F(x)\}$ den *Graph* von F .

Wir sagen, F ist

- *stetig* in $x \in U$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|F(x) - F(z)\|_Y \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in U \text{ mit } \|x - z\|_X \leq \delta;$$

- *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L > 0$ (genannt *Lipschitz-Konstante*) existiert mit

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y \leq L\|x_1 - x_2\|_X \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in U.$$

- *lokal Lipschitz-stetig* in $x \in U$, wenn ein $\delta > 0$ und ein $L = L(x, \delta) > 0$ existiert mit

$$\|F(x) - F(z)\|_Y \leq L\|x - z\|_X \quad \text{für alle } z \in U \text{ mit } \|x - z\|_X \leq \delta.$$

Ist $T : X \rightarrow Y$ linear, so ist die Stetigkeit äquivalent zu der Bedingung, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Stetige lineare Abbildungen nennt man daher auch *beschränkt*; man spricht auch von einem beschränkten linearen *Operator*. Der Raum $L(X, Y)$ der beschränkten linearen Operatoren ist ein normierter Raum versehen mit der *Operatornorm*

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$$

(die gleich der kleinstmöglichen Konstante C in der Definition der Stetigkeit ist). Ist $T \in L(X, Y)$ bijektiv, dann ist die Inverse $T^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig genau dann, wenn ein $c > 0$ existiert mit

$$c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \quad \text{für alle } x \in X,$$

in diesem Fall ist $\|T^{-1}\|_{L(Y,X)} = c^{-1}$ für die größtmögliche Wahl von c .

1.2 STARKE UND SCHWACHE KONVERGENZ

Eine Norm vermittelt auf direkte Weise einen Konvergenzbegriff, die sogenannte *starke Konvergenz*: Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ konvergiert (stark in X) gegen ein $x \in X$, geschrieben $x_n \rightarrow x$, wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0.$$

Eine Teilmenge $U \subset X$ nennen wir

- *abgeschlossen*, falls für jede konvergente Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ auch der Grenzwert $x \in U$ liegt;
- *kompakt*, falls jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt, deren Grenzwert $x \in U$ liegt.

Eine Abbildung $F : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn aus $x_n \rightarrow x$ auch $F(x_n) \rightarrow F(x)$ folgt, und *abgeschlossen*, wenn für $x_n \rightarrow x$ und $F(x_n) \rightarrow y$ folgt, dass $F(x) = y$ ist.

Weiterhin definieren wir für späteren Gebrauch für $x \in X$ und $r > 0$

- die *offene Kugel* $O_r(x) := \{z \in X : \|x - z\|_X < r\}$ und
- die *abgeschlossene Kugel* $K_r(x) := \{z \in X : \|x - z\|_X \leq r\}$.

Die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius 1 bezeichnet man auch als *Einheitskugel* B_X (englisch „unit ball“). Eine Menge $U \subset X$ heißt

- *offen*, falls für alle $x \in U$ ein $r > 0$ existiert mit $O_r(x) \subset U$ (d. h. alle $x \in U$ *innere Punkte* von U sind, deren Menge wir als *Inneres* U° bezeichnen);
- *beschränkt*, falls sie in einer abgeschlossenen Kugel $K_r(0)$ für ein $r > 0$ enthalten ist;
- *konvex*, falls für $u, v \in U$ auch $\lambda u + (1 - \lambda)v \in U$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt.

In normierten Räumen gilt, dass das Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist und umgekehrt (d. h. die abgeschlossenen Mengen im Sinne der Topologie sind genau die (Folgen-)abgeschlossenen Mengen im Sinne unserer Definition). Sowohl offene als auch abgeschlossene Kugeln sind wegen der Norm-Axiome konvex.

Ein normierter Raum X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert; man nennt X dann auch *Banachraum*. Alle Räume in Beispiel 1.1 sind Banachräume. Ebenso ist $L(X, Y)$, versehen mit der Operatornorm, ein Banachraum, wenn Y ein Banachraum ist. Von wesentlicher Bedeutung wird für uns der Spezialfall $Y = \mathbb{R}$ sein, das heißt der Raum $L(X, \mathbb{R})$ der *linearen stetigen Funktionale* auf X . In diesem Fall bezeichnet man $X^* := L(X, \mathbb{R})$ als *Dualraum* von X . Ist $x^* \in X^*$, so schreibt man auch

$$\langle x^*, x \rangle_X := x^*(x) \in \mathbb{R}.$$

Diese *duale Paarung* soll andeuten, dass man auch x auf x^* wirkend auffassen kann, was später wichtig wird. Aus der Definition der Operatornorm folgt sofort, dass

$$(1.1) \quad \langle x^*, x \rangle_X \leq \|x^*\|_{X^*} \|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X, x^* \in X^*.$$

In vielen Fällen kann der Dualraum eines Banachraums mit einem bekannten Banachraum identifiziert werden.

Beispiel 1.2. (i) $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)^* \cong (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_q)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, wobei $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$ gesetzt wird. Die duale Paarung ist gegeben durch

$$\langle x^*, x \rangle_p = \sum_{i=1}^N x_i^* x_i.$$

(ii) $(\ell^p)^* \cong (\ell^q)$ für $1 < p < \infty$. Die duale Paarung ist gegeben durch

$$\langle x^*, x \rangle_p = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* x_i.$$

Darüber hinaus ist $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, aber $(\ell^\infty)^*$ ist selber kein Folgenraum.

(iii) Ebenso ist $L^p(\Omega)^* \cong L^q(\Omega)$ für $1 < p < \infty$. Die duale Paarung ist gegeben durch

$$\langle u^*, u \rangle_p = \int_{\Omega} u^*(x) u(x) dx.$$

Es gilt auch $L^1(\Omega)^* \cong L^\infty(\Omega)$, aber $L^\infty(\Omega)^*$ ist selber kein Funktionenraum.

(iv) $C_0(\Omega)^* \cong \mathcal{M}(\Omega)$, dem Raum der *Radon-Maße*; er enthält unter anderem das Lebesgue-Maß, aber auch Dirac-Maße δ_x für $x \in \Omega$, definiert durch $\delta_x(u) = u(x)$ für $u \in C_0(\Omega)$. Die duale Paarung ist gegeben durch

$$\langle u^*, u \rangle_C = \int_{\Omega} u(x) du^*.$$

Ein zentrales Resultat über Dualräume ist der Satz von Hahn–Banach, auf dem viele der folgenden Aussagen beruhen. Es gibt von ihm eine algebraische und eine geometrische Version.

Satz 1.3 (Hahn–Banach, algebraisch). *Sei X ein normierter Raum. Zu jedem $x \in X$ existiert ein $x^* \in X^*$ mit*

$$\|x^*\|_{X^*} = 1 \quad \text{und} \quad \langle x^*, x \rangle_X = \|x\|_X.$$

Satz 1.4 (Hahn–Banach, geometrisch). *Seien X ein normierter Raum und $A, B \subset X$ konvex, nichtleer und disjunkt.*

(i) *Ist A offen, dann existiert ein $x^* \in X^*$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\langle x^*, x_1 \rangle_X < \lambda \leq \langle x^*, x_2 \rangle_X \quad \text{für alle } x_1 \in A, x_2 \in B.$$

(ii) *Ist A abgeschlossen und B kompakt, dann existiert ein $x^* \in X^*$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\langle x^*, x_1 \rangle_X \leq \lambda < \langle x^*, x_2 \rangle_X \quad \text{für alle } x_1 \in A, x_2 \in B.$$

Insbesondere die geometrische Version – auch als *Trennungssätze* bekannt – ist von zentraler Bedeutung für die konvexe Analysis; wir benötigen sie auch in der folgenden Variante, die als *Satz von Eidelheit* bekannt ist.

Folgerung 1.5. *Seien X ein normierter Raum und $A, B \subset X$ konvex und nichtleer. Ist die Menge A° der inneren Punkte von A nichtleer und disjunkt zu B , dann existiert ein $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$\langle x^*, x_1 \rangle_X \leq \lambda \leq \langle x^*, x_2 \rangle_X \quad \text{für alle } x_1 \in A, x_2 \in B.$$

Beweis. Satz 1.4 (i) liefert die Existenz von x^* und λ , so dass die Aussage gilt für alle $x_1 \in A^\circ$ (sogar mit strikter Ungleichung, woraus auch $x^* \neq 0$ folgt). Es bleibt also zu zeigen, dass $\langle x^*, x \rangle_X \leq \lambda$ auch für $x \in A \setminus A^\circ$ gilt. Da A° nichtleer ist, existiert ein $x_0 \in A^\circ$, d. h. es existiert $r > 0$ mit $O_r(x_0) \subset A$. Aus der Konvexität von A folgt dann, dass für alle $t \in [0, 1]$ und $\tilde{x} \in O_r(x_0)$ auch $t\tilde{x} + (1-t)x \in A$ ist. Damit ist

$$tO_r(x_0) + (1-t)x = O_{tr}(tx_0 + (1-t)x) \subset A,$$

und insbesondere gilt $x(t) := tx_0 + (1-t)x \in A^\circ$ für alle $t \in (0, 1)$.

Wir finden also eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A^\circ$ (zum Beispiel $x_n = x(n^{-1})$) mit $x_n \rightarrow x$. Aus der Stetigkeit von $x^* \in X = L(X, \mathbb{R})$ folgt mit Grenzübergang dann

$$\langle x^*, x \rangle_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^*, x_n \rangle_X \leq \lambda. \quad \square$$

Ein normierter Raum wird also in gewisser Weise durch seinen Dualraum charakterisiert. Als direkte Folgerung von Satz 1.3 erhalten wir, dass die Norm in einem Banachraum als Operatornorm dargestellt werden kann.

Folgerung 1.6. *Sei X ein Banachraum. Dann gilt für alle $x \in X$*

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |\langle x^*, x \rangle_X|,$$

und das Supremum wird angenommen.

Ein $x \in X$ können wir also auch als lineares Funktional auf X^* auffassen, also als Element im *Bidualraum* $X^{**} := (X^*)^*$. Die Einbettung $X \subset X^{**}$ wird dabei vermittelt durch die *kanonische Injektion*

$$J : X \rightarrow X^{**}, \quad \langle Jx, x^* \rangle_{X^*} := \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x^* \in X^*.$$

Offensichtlich ist J linear; aus Satz 1.3 folgt weiterhin $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. Ist die kanonische Injektion surjektiv – können wir also X^{**} mit X identifizieren – so nennt man X *reflexiv*. Endlichdimensionale Räume sind reflexiv, sowie Beispiele 1.1 (ii) und (iii) für $1 < p < \infty$, nicht aber ℓ^1 und $L^1(\Omega)$ sowie $C(\overline{\Omega})$.

Durch die duale Paarung werden weitere Konvergenzbegriffe erzeugt: die *schwache* Konvergenz auf X sowie die *schwach-** Konvergenz auf X^* .

- (i) Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ konvergiert schwach (in X) gegen $x \in X$, geschrieben $x_n \rightharpoonup x$, falls

$$\langle x^*, x_n \rangle_X \rightarrow \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x^* \in X^*.$$

- (ii) Eine Folge $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ konvergiert schwach-* (in X^*) gegen $x^* \in X^*$, geschrieben $x_n^* \rightharpoonup^* x^*$, falls

$$\langle x_n^*, x \rangle_X \rightarrow \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die schwache Konvergenz verallgemeinert den Begriff der komponentenweisen Konvergenz in \mathbb{R}^n , der – wie aus dem Beweis des Satzes von Heine–Borel ersichtlich ist – im Kontext der Kompaktheit der wesentliche ist. Aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz; ebenso folgt aus Konvergenz in der Operatornorm (auch *punktweise Konvergenz* genannt) die schwach-* Konvergenz. Ist X reflexiv, so stimmen schwache und schwach-* Konvergenz (beide in $X = X^{**}$!) überein. In endlichdimensionalen Räumen stimmen alle Konvergenzbegriffe überein.

Konvergiert $x_n \rightarrow x$ und $x_n^* \rightharpoonup^* x^*$ oder $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n^* \rightarrow x^*$, so gilt $\langle x_n^*, x_n \rangle_X \rightarrow \langle x^*, x \rangle_X$. Das duale Produkt aus schwach(-*) konvergenten Folgen konvergiert in der Regel nicht!

Analog zur starken Konvergenz definiert man nun schwache(-*) Stetigkeit und Abgeschlossenheit von Abbildungen sowie schwache(-*) Abgeschlossenheit und Kompaktheit von Mengen. Letztere Eigenschaft wird für uns wesentlich sein; ihre Charakterisierung ist daher ein zentrales Resultat dieses Kapitels.

Satz 1.7 (Eberlein–Šmuljan). *Sei X ein normierter Raum. Dann ist B_X schwach kompakt genau dann, wenn X reflexiv ist.*

In einem reflexiven Raum sind also insbesondere alle beschränkten und schwach abgeschlossenen Mengen schwach kompakt. Beachten Sie, dass schwache Abgeschlossenheit eine *stärkere* Forderung ist als Abgeschlossenheit. Für konvexe Mengen stimmen die Begriffe aber überein.

Lemma 1.8. *Eine konvexe Menge $U \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist.*

Beweis. Da eine konvergente Folge stets auch schwach konvergiert, ist jede schwach abgeschlossene Menge auch abgeschlossen. Sei daher $U \subset X$ konvex, abgeschlossen, und nichtleer (sonst ist nichts zu zeigen), und betrachte eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $x_n \rightharpoonup x \in X$. Angenommen, $x \in X \setminus U$. Dann erfüllen die Mengen U und $\{x\}$ die Bedingungen von Satz 1.4 (ii); wir finden daher ein $x^* \in X^*$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle x^*, x_n \rangle_X \leq \lambda < \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in der ersten Ungleichung ergibt dann aber den Widerspruch

$$\langle x^*, x \rangle_X < \langle x^*, x \rangle_X. \quad \square$$

Ist X nicht reflexiv (wie z. B. $L^\infty(\Omega)$), so müssen wir auf die schwach-* Konvergenz ausweichen.

Satz 1.9 (Banach–Alaoglu). *Ist der normierte Raum X separabel (d. h. es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge), so ist B_{X^*} schwach-* kompakt.*

Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz sind $C(\overline{\Omega})$ und $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ separabel; auch ℓ^p ist separabel für $1 \leq p < \infty$. Also sind beschränkte und schwach-* abgeschlossene Kugeln in ℓ^∞ , $L^\infty(\Omega)$ und $\mathcal{M}(\Omega)$ schwach-* kompakt; diese Räume sind aber selber nicht separabel. Allerdings sind abgeschlossene konvexe Mengen in nichtreflexiven Räumen nicht unbedingt schwach-* abgeschlossen.

Da ein Dualraum den ursprünglichen Raum charakterisiert, ist dies auch der Fall für lineare Operatoren auf diesem Raum. Für $T \in L(X, Y)$ ist durch $T^* : Y^* \rightarrow X^*$,

$$\langle T^*y^*, x \rangle_X = \langle y^*, Tx \rangle_Y \quad \text{für alle } x \in X, y^* \in Y^*$$

der *adjungierte Operator* $T^* \in L(Y^*, X^*)$ definiert. Es gilt stets $\|T^*\|_{L(Y^*, X^*)} = \|T\|_{L(X, Y)}$. Ausserdem folgt aus der Stetigkeit von T , dass T^* schwach-* stetig (und T natürlich schwach stetig) ist.

1.3 HILBERTRÄUME

Besonders weitgehende Dualitäts-Aussagen gelten in Hilberträumen. Eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Vektorraum X über \mathbb{R} heißt *Skalarprodukt*, falls gilt

- (i) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (ii) $(x, y) = (y, x)$ für alle $x, y \in X$;
- (iii) $(x, x) \geq 0$ für alle $x \in X$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$.

Ein Banachraum mit Skalarprodukt $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ wird *Hilbertraum* genannt; ist das Skalarprodukt kanonisch, lässt man es weg. Durch das Skalarprodukt wird eine Norm

$$\|x\|_X := \sqrt{(x, x)_X}$$

induziert, die der *Cauchy–Schwarz–Ungleichung* gehorcht:

$$(x, y)_X \leq \|x\|_X \|y\|_X.$$

Die Beispiele 1.2 (i–iii) für $p = 2$ ($= q$) sind Hilberträume, wobei das Skalarprodukt der dualen Paarung entspricht und die kanonischen Normen induziert.

Der für uns wesentliche Punkt ist, dass der Dualraum eines Hilbertraums X mit X identifiziert werden kann.

Satz 1.10 (Fréchet–Riesz). *Sei X ein Hilbertraum. Dann existiert zu jedem $x^* \in X^*$ genau ein $z_{x^*} \in X$ mit $\|x^*\|_{X^*} = \|z_{x^*}\|_X$ und*

$$\langle x^*, x \rangle_X = (x, z_{x^*})_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Man bezeichnet z_{x^*} als *Riesz-Repräsentant* von x^* . Die (lineare) Abbildung $J_X : X^* \rightarrow X$, $x^* \mapsto z_{x^*}$ wird *Riesz-Isomorphismus* genannt. Mit ihrer Hilfe zeigt man zum Beispiel, dass jeder Hilbertraum reflexiv ist.

Satz 1.10 erlaubt, anstelle der dualen Paarung das Skalarprodukt zu verwenden. So konvergiert $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen x genau dann, wenn gilt

$$(x_n, z)_X \rightarrow (x, z)_X \quad \text{für alle } z \in X.$$

Ähnliches gilt für lineare Operatoren auf Hilberträumen. Für Hilberträume X, Y wird zu $T \in L(X, Y)$ der *Hilbertraum-adjungierte Operator* $T^* \in L(Y, X)$ definiert durch

$$(T^*y, x)_X = (Tx, y)_Y \quad \text{für alle } x \in X, y \in Y.$$

Ist $T^* = T$, so nennt man T *selbstadjungiert*. Zwischen den beiden Definitionen einer Adjungierten besteht die Beziehung $T^* = J_X T^* J_Y^{-1}$. Ist der Kontext klar, werden wir nicht in der Notation unterscheiden.

GRUNDLAGEN DER VARIATIONSRECHNUNG

2

Wir betrachten zuerst die Frage nach der Existenz von Minimierern eines (nichtlinearen) Funktionals $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ für eine Teilmenge U eines Banachraums X . Mit solchen Problemen beschäftigt sich die *Variationsrechnung*.

2.1 DIREKTE METHODE DER VARIATIONSRECHNUNG

Es ist hilfreich, die Beschränkung $\bar{x} \in U$ in das Funktional aufzunehmen, indem wir F auf X erweitern, dafür aber den Wert ∞ zulassen. Wir betrachten also

$$\tilde{F} : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & x \in U, \\ \infty & x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Dabei wird $\bar{\mathbb{R}}$ mit der üblichen Arithmetik versehen, d. h. $t < \infty$ und $t + \infty = \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Existiert überhaupt ein $x \in U$, so kann ein Minimierer \bar{x} also nur in U liegen. (Beachten Sie, dass Subtraktion und Multiplikation von negativen Zahlen mit ∞ und damit $F(x) = -\infty$ nicht zugelassen sind.)

Wir betrachten also in Folge Funktionen $F : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Die Menge, auf der F endlich ist, bezeichnet man als (*effektiven*) *Definitionsbereich*

$$\text{dom } F := \{x \in X : F(x) < \infty\}.$$

Ist $\text{dom } F \neq \emptyset$, so nennt man F *eigentlich* (englisch: „proper“).

Wir wollen nun den Satz von Weierstraß (jede reellwertige stetige Funktion auf kompakten Mengen nimmt ihr Minimum und Maximum an) auf Banachräume und insbesondere auf Funktionen der Form \tilde{F} erweitern. Da wir nur an Minima interessiert sind, reicht dafür eine „einseitige“ Stetigkeit: Man nennt F *unterhalbstetig* in $x \in X$ (englisch: „lower semicontinuous“), falls für alle konvergenten Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $x_n \rightarrow x$ gilt

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n).$$

Analog definiert man *schwach(-*) unterhalbstetige* (bzw. *oberhalbstetige*) Funktionen über schwach(-*) konvergente Folgen. Gilt schließlich für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\|_X \rightarrow \infty$ auch $F(x_n) \rightarrow \infty$, so heißt F *koerziv*.

Damit haben wir alle Begriffe zur Hand, um das zentrale Resultat der Variationsrechnung zu beweisen.¹

Satz 2.1. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, koerziv und schwach unterhalbstetig. Dann hat das Minimierungsproblem*

$$\min_{x \in X} F(x)$$

eine Lösung $\tilde{x} \in \text{dom } F$.

Beweis. Der Beweis kann in vier Schritte aufgeteilt werden.

(i) *Zeige, dass F nach unten beschränkt ist.*

Angenommen, F ist nicht nach unten beschränkt. Dann existiert eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $F(x_n) \rightarrow -\infty$. Aus der Koerzivität von F folgt dann, dass diese Folge beschränkt ist (sonst müsste ja $F(x_n) \rightarrow \infty$ gelten), d. h. es gibt ein $M > 0$ mit $\|x_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K_M(0)$. Aus dem Satz von [Eberlein–Šmuljan](#) folgt dann die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, für deren Grenzwert $\tilde{x} \in X$ wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit gilt

$$F(\tilde{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = -\infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $\text{ran } F \subset (-\infty, \infty]$.

(ii) *Zeige, dass eine Minimalfolge existiert.*

Da F eigentlich und nach unten beschränkt ist, muss ein $M := \inf_{x \in X} F(x) \in \mathbb{R}$ existieren. Aus der Definition des Infimums folgt dann, dass eine Folge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{ran } F \subset \mathbb{R}$ existiert mit $y_n \rightarrow M$, d. h. es existiert eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit

$$F(x_n) \rightarrow M = \inf_{x \in X} F(x).$$

Eine solche Folge wird *Minimalfolge* genannt. Beachten Sie, dass wir aus der Konvergenz von $\{F(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ noch nicht auf die Konvergenz von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ schließen können.

¹Diese Beweis-Strategie, bekannt unter dem Namen *direkte Methode der Variationsrechnung*, wird so häufig angewendet, dass in Forschungsarbeiten üblicherweise nur geschrieben wird: „Die Existenz eines Minimierers folgt aus Standard-Argumenten.“ Das Grundprinzip geht auf Hilbert zurück; die hier verwendete Formulierung für unterhalbstetige Funktionen stammt von [Leonida Tonelli](#) (1885–1946), der damit die moderne Variationsrechnung nachhaltig geprägt hat.

(iii) *Zeige, dass die Minimalfolge eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Aus der Koerzivität von F folgt wieder, dass die Minimalfolge beschränkt ist und daher nach dem Satz von [Eberlein–Smulyan](#) eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\bar{x} \in X$ besitzt. Dieser Grenzwert ist Kandidat für einen Minimierer.

(iv) *Zeige, dass dieser Grenzwert ein Minimierer ist.*

Aus der Definition der Minimalfolge folgt, dass auch für die Teilfolge $F(x_{n_k}) \rightarrow M$ gilt. Mit der schwachen Unterhalbstetigkeit von F und der Definition des Infimums erhalten wir daher

$$\inf_{x \in X} F(x) \leq F(\bar{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = M = \inf_{x \in X} F(x) < \infty.$$

Das Infimum wird also in $\bar{x} \in \text{dom } F$ angenommen, d. h. \bar{x} ist der gesuchte Minimierer. \square

Ist X nicht reflexiv, aber Dualraum eines separablen Banachraums, so zeigt man analog die Existenz von Minimierern mit dem Satz von [Banach–Alaoglu](#).

Beachten Sie, wie im Beweis die zu verwendende Topologie auf X durch Schritt (iii) und (iv) eingeschränkt wird: Schritt (iii) profitiert von einer groben Topologie (in der mehr Folgen konvergieren), Schritt (iv) von einer feinen (je weniger Folgen konvergieren, desto einfacher ist die \liminf -Bedingung zu erfüllen). Da wir in unseren Fällen nicht mehr als die Beschränktheit einer Minimalfolge erwarten können, können wir keine feinere als die schwache Topologie verwenden. Es bleibt daher die Frage, ob genügend (interessante) Funktionale schwach unterhalbstetig sind.

Ein erstes Beispiel sind beschränkte lineare Funktionale: Ist $x^* \in X^*$, so ist

$$F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \langle x^*, x \rangle_X,$$

schwach stetig (nach Definition der schwachen Konvergenz) und damit insbesondere schwach unterhalbstetig. Ein weiterer Vorzug der (schwachen) Unterhalbstetigkeit ist, dass sie unter bestimmten Operationen erhalten bleibt.

Lemma 2.2. *Seien X, Y Banachräume und sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ schwach unterhalbstetig. Dann sind schwach unterhalbstetig*

- (i) αF für alle $\alpha \geq 0$;
- (ii) $F + G$ für $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ schwach unterhalbstetig;
- (iii) $\varphi \circ F$ für $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ unterhalbstetig und monoton steigend;
- (iv) $F \circ \Phi$ für $\Phi : Y \rightarrow X$ schwach stetig, d. h. $y_n \rightharpoonup y$ impliziert $\Phi(y_n) \rightharpoonup \Phi(y)$;
- (v) $x \mapsto \sup_{i \in I} F_i(x)$ für eine Indexmenge I und $F_i : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ schwach unterhalbstetig.

Beachte, dass Aussage (v) für stetige Funktionen *nicht* gilt!

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen direkt aus den Eigenschaften des \liminf .

Aussage (iii) folgt aus der Monotonie und schwachen Unterhalbstetigkeit von φ , denn für $x_n \rightharpoonup x$ gilt

$$\varphi(F(x)) \leq \varphi(\liminf_{n \in \mathbb{N}} F(x_n)) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \varphi(F(x_n)).$$

Aussage (iv) folgt direkt aus der schwachen Stetigkeit von Φ : Gilt $y_n \rightharpoonup y$, so gilt $x_n := \Phi(y_n) \rightharpoonup \Phi(y) =: x$, und aus der Unterhalbstetigkeit von F folgt

$$F(\Phi(y_n)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(\Phi(y)).$$

Sei schließlich $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert $x \in X$. Dann gilt nach Definition des Supremums für alle $j \in I$, dass

$$F_j(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_j(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} F_i(x_n).$$

Nehmen wir auf beiden Seiten das Supremum über alle $j \in I$, so folgt die Aussage (v). \square

Folgerung 2.3. Sei X ein Banachraum. Dann ist $\|\cdot\|_X$ eigentlich, koerziv und schwach unterhalbstetig.

Beweis. Koerzivität und $\text{dom } \|\cdot\|_X = X$ folgt direkt aus der Definition; schwache Unterhalbstetigkeit folgt aus Lemma 2.2 (v) und Folgerung 1.6, denn

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |\langle x^*, x \rangle_X|. \quad \square$$

Ein weiteres häufig auftretendes Funktional ist die *Indikator-Funktion*² einer Menge $U \subset X$, definiert als

$$\delta_U(x) = \begin{cases} 0 & x \in U, \\ \infty & x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Lemma 2.4. Sei $U \subset X$. Dann ist δ_U

- (i) eigentlich, wenn U nichtleer ist;
- (ii) schwach unterhalbstetig, wenn U konvex und abgeschlossen ist;
- (iii) koerziv, wenn U beschränkt ist.

²nicht zu verwechseln mit der charakteristischen Funktion χ_U mit $\chi_U(x) = 1$ für $x \in U$ und 0 sonst!

Beweis. Aussage (i) ist klar. Für (ii) betrachte eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert $x \in X$. Ist $x \in U$, dann ist wegen $\delta_U \geq 0$ natürlich

$$\delta_U(x) = 0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_U(x_n).$$

Sei nun $x \notin U$. Da U konvex und abgeschlossen und daher nach Lemma 1.8 auch schwach abgeschlossen ist, muss ein $N \in \mathbb{N}$ existieren mit $x_n \notin U$ für alle $n \geq N$. Also gilt $\delta_U(x_n) = \infty$ für alle $n \geq N$ und damit

$$\delta_U(x) = \infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_U(x_n).$$

Für (iii) sei U beschränkt, d. h. es gebe ein $M > 0$ mit $U \subset K_M(0)$. Gilt $\|x_n\|_X \rightarrow \infty$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n\|_X > M$ für alle $n \geq N$, d. h. $x_n \notin K_M(0) \supset U$ für alle $n \geq N$. Also gilt auch $\delta_U(x_n) \rightarrow \infty$. \square

2.2 DIFFERENZIERBARKEIT IN BANACHRÄUMEN

Auch im Banachraum möchte man Minimierer intrinsisch mit Hilfe des Fermatschen Prinzip charakterisieren. Dafür übertragen wir den klassischen Ableitungsbegriff in den Banachraum. Dies geschieht in mehreren Schritten.

Seien X, Y Banachräume, $F : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $x, h \in X$.

- Existiert der einseitige Grenzwert

$$F'(x; h) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} \in Y,$$

so nennen wir diesen *Richtungsableitung* in x in Richtung h .

- Falls $F'(x; h)$ für alle $h \in X$ existiert und durch

$$DF(x) : X \rightarrow Y, h \mapsto F'(x; h)$$

ein linearer beschränkter Operator definiert wird, so heißt F *Gâteaux-differenzierbar* (in x) und $DF \in L(X, Y)$ *Gâteaux-Ableitung*.

- Gilt zusätzlich

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x + h) - F(x) - DF(x)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

so heißt F *Fréchet-differenzierbar* (in x) und $F'(x) := DF(x) \in L(X, Y)$ *Fréchet-Ableitung*.

- Ist die Abbildung $x \mapsto F'(x)$ stetig, so heißt F *stetig differenzierbar*.

Der Unterschied zwischen Gâteaux- und Fréchet-Differenzierbarkeit liegt also im Approximationsfehler von F in der Nähe von x durch $F(x) + DF(x)h$: Während für Gâteaux-differenzierbare Funktionen dieser nur beschränkt durch $\|h\|_X$ – also linear in $\|h\|_X$ – sein muss, ist er für Fréchet-differenzierbare Funktionen sogar superlinear in $\|h\|_X$. (Für eine feste Richtung h ist dies natürlich auch für Gâteaux-differenzierbare Funktionen der Fall; für Fréchet-differenzierbare Funktionen ist zusätzlich also Gleichmässigkeit in h gefordert.)

Ist F Gâteaux-differenzierbar, kann man die Gâteaux-Ableitung berechnen via

$$DF(x)h = \left(\frac{d}{dt} F(x + th) \right) \Big|_{t=0}.$$

Offensichtlich sind lineare beschränkte Operatoren $F \in L(X, Y)$ überall Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $F'(x) = F \in L(X, Y)$ für alle $x \in X$. Weitere Ableitungen erhält man durch die üblichen Rechenregeln, die genau wie in \mathbb{R}^n gezeigt werden. Beispielhaft beweisen wir eine Kettenregel.

Satz 2.5. *Seien X, Y, Z Banachräume und $F : X \rightarrow Y$ Fréchet-differenzierbar in $x \in X$ und $G : Y \rightarrow Z$ Fréchet-differenzierbar in $y := F(x) \in Y$. Dann ist $G \circ F$ Fréchet-differenzierbar in x und*

$$(G \circ F)'(x) = G'(F(x)) \circ F'(x).$$

Beweis. Für $h \in X$ mit $x + h \in \text{dom } F$ gilt

$$(G \circ F)(x + h) - (G \circ F)(x) = G(F(x + h)) - G(F(x)) = G(y + g) - G(y)$$

für $g := F(x + h) - F(x)$. Aus der Fréchet-Differenzierbarkeit von G folgt daher, dass

$$\|(G \circ F)(x + h) - (G \circ F)(x) - G'(y)g\|_Z = r_1(\|g\|_Y)$$

gilt mit $r_1(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Aus der Fréchet-Differenzierbarkeit von F folgt aber, dass

$$\|g - F'(x)h\|_Y = r_2(\|h\|_X)$$

gilt mit $r_2(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Insbesondere ist

$$(2.1) \quad \|g\|_Y \leq \|F'(x)h\|_Y + r_2(\|h\|_X).$$

Also gilt mit $c := \|G'(F(x))\|_{L(Y, Z)}$

$$\|(G \circ F)(x + h) - (G \circ F)(x) - G'(F(x))F'(x)h\|_Z \leq r_1(\|g\|_Y) + c r_2(\|h\|_X).$$

Für $\|h\| \rightarrow 0$ folgt aus (2.1) und $F'(x) \in L(X, Y)$ auch $\|g\|_Y \rightarrow 0$ und damit die gewünschte Aussage. \square

Eine analoge Regel für Gâteaux-Ableitungen gilt dagegen nicht!

Wir brauchen noch die folgende Variante des Mittelwertsatzes. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f : [a, b] \rightarrow X$ stetig. Dann ist das *Bochner-Integral* $\int_a^b f(t) dt \in X$ wohldefiniert und erfüllt nach Definition

$$(2.2) \quad \left\langle x^*, \int_a^b f(t) dt \right\rangle_X = \int_a^b \langle x^*, f(t) \rangle_X dt \quad \text{für alle } x^* \in X^*,$$

sowie

$$(2.3) \quad \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|_X \leq \int_a^b \|f(t)\|_X dt,$$

siehe z. B. [Růžička 2004, Folgerung 1.14].

Satz 2.6. Sei $F : U \rightarrow X$ Fréchet-differenzierbar, und seien $x \in U$ und $h \in X$ so dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt. Dann ist

$$F(x + h) - F(x) = \int_0^1 F'(x + th)h dt.$$

Beweis. Betrachte für beliebiges $x^* \in X^*$ die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle x^*, F(x + th) \rangle_X.$$

Nach der Satz 2.5 ist f (als Verkettung von Abbildungen im Banachraum) differenzierbar mit

$$f'(t) = \langle x^*, F'(x + th)h \rangle_X,$$

und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in \mathbb{R} ergibt

$$\langle x^*, F(x + h) - F(x) \rangle_X = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = \left\langle x^*, \int_0^1 F'(x + th)h dt \right\rangle_X,$$

wobei die letzte Gleichung aus (2.2) folgt. Da $x^* \in X^*$ beliebig war, folgt daraus die gewünschte Gleichung. \square

Wir betrachten nun die Charakterisierung von Minimierern eines differenzierbaren Funktionals $F : X \rightarrow \mathbb{R}$.³

Satz 2.7 (Fermat-Prinzip). Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar und $\bar{x} \in X$ ein Minimierer von F . Dann gilt $DF(\bar{x}) = 0$, d. h.

$$DF(\bar{x})h = F'(x; h) = 0 \quad \text{für alle } h \in X.$$

³In der *indirekten Methode* der Variationsrechnung zeigt man darüber auch die Existenz von Minimierern, etwa als Lösung einer partiellen Differentialgleichung.

Beweis. Wenn \bar{x} ein Minimierer von F ist, so muss insbesondere für alle $h \in X$ und $\varepsilon > 0$ klein genug die Funktion $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto F(\bar{x} + th)$, ein Minimum in $t = 0$ haben. Da F Gâteaux-differenzierbar ist, existiert die Ableitung $f'(t)$ in $t = 0$ und damit muss gelten

$$0 = f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = F'(\bar{x}; h). \quad \square$$

Beachten Sie, dass Gâteaux-Ableitungen eines Funktionals $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ Elemente des Dualraums $X^* = L(X, \mathbb{R})$ sind und daher nicht zu Vektoren in X addiert werden können. In Hilberträumen (und insbesondere \mathbb{R}^n) kann man aber $DF(x) \in X^*$ mit Hilfe des Satz von Fréchet–Riesz kanonisch mit einem Element $\nabla F(x) \in X$, genannt *Gradient* von F , identifizieren über

$$DF(x)h = (\nabla F(x), h)_X \quad \text{für alle } h \in X.$$

Als Beispiel betrachten wir für die durch das Skalarprodukt induzierte Norm in einem Hilbertraum das Funktional $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2$. Dann gilt für alle $x, h \in X$

$$F'(x; h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}(x + th, x + th)_X - \frac{1}{2}(x, x)_X}{t} = (x, h)_X = DF(x)h,$$

da das Skalarprodukt für festes x linear in h ist. Die quadrierte Norm ist also Gâteaux-differenzierbar in x mit Ableitung $DF(x) = (x, \cdot)_X \in X^*$ und Gradient $\nabla F(x) = x \in X$; wegen

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{|\frac{1}{2}\|x+h\|_X^2 - \frac{1}{2}\|x\|_X^2 - (x, h)_X|}{\|h\|_X} = \lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{1}{2}\|h\|_X = 0$$

ist sie sogar Fréchet-differenzierbar. Fasst man nun dieselbe Abbildungsvorschrift auf als definiert auf einem kleineren Hilbertraum $X' \hookrightarrow X$ (zum Beispiel $X = L^2(\Omega), X' = H^1(\Omega)$), so ist $DF(x) \in (X')^*$ immer noch gegeben durch $DF(x)h = (x, h)_X$ (nur noch für alle $h \in X'$), aber $\nabla F \in X'$ ist nun charakterisiert durch

$$DF(x)h = (\nabla F(x), h)_{X'}, \quad \text{für alle } h \in X'.$$

Unterschiedliche Skalarprodukte führen daher zu unterschiedlichen Gradienten.

2.3 SUPERPOSITIONSOPERATOREN

Eine besondere Klasse von Operatoren auf Funktionenräumen sind solche, die durch punktweise Anwendung einer reellen Funktion definiert sind, etwa $\sin(u(x))$. Wir betrachten daher für $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $1 \leq p, q \leq \infty$ den zugehörigen *Superpositions- oder Nemytskii-Operator*

$$(2.4) \quad F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega), \quad [F(u)](x) = f(x, u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Damit dieser Operator wohldefiniert ist, muss f bestimmte Anforderungen erfüllen. Wir nennen f *Carathéodory-Funktion*, falls

- (i) für alle $z \in \mathbb{R}$ die Abbildung $x \mapsto f(x, z)$ messbar ist, und
- (ii) für fast alle $x \in \Omega$ die Abbildung $z \mapsto f(x, z)$ stetig ist.

Wir fordern zusätzlich die folgende Wachstumsbedingung: Für gegebenes $1 \leq p, q < \infty$ existieren $a \in L^q(\Omega)$ und $b \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$|f(x, z)| \leq a(x) + b(x)|z|^{p/q}.$$

Unter diesen Bedingungen ist F sogar stetig.

Satz 2.8. *Erfüllt $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Wachstumsbedingung für $1 \leq p, q < \infty$, so ist der durch (2.4) definierte Superpositionsoperator $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ stetig.*

Beweis. Wir skizzieren die wesentlichen Schritte; einen ausführlichen Beweis findet man in [Růžička 2004, Lemma 1.19]. Zunächst zeigt man für gegebenes $u \in L^p(\Omega)$ mit Hilfe der Carathéodory-Eigenschaften die Messbarkeit von $F(u)$. Aus der Wachstumsbedingung und der Dreiecksungleichung folgt daher

$$\|F(u)\|_{L^q} \leq \|a\|_{L^q} + \|b\|_{L^\infty} \|u\|_{L^p}^{p/q} = \|a\|_{L^q} + \|b\|_{L^\infty} \|u\|_{L^p}^{p/q} < \infty,$$

d. h. $F(u) \in L^q(\Omega)$.

Für die Stetigkeit betrachten wir eine Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ mit $u_n \rightarrow u \in L^p(\Omega)$. Dann existiert eine Teilfolge, die wir wieder mit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, die punktweise fast überall in Ω konvergiert, sowie ein $v \in L^p(\Omega)$ mit $|u_n| \leq |v| + |u_1| =: g \in L^p(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe z. B. [Dobrowolski 2010, Satz 4.25 sowie den Beweis von Satz 4.17]). Aus der Stetigkeit von $z \mapsto f(x, z)$ folgt dann $F(u_n) \rightarrow F(u)$ punktweise fast überall sowie

$$|[F(u_n)](x)| \leq a(x) + b(x)|u_n(x)|^{p/q} \leq a(x) + b(x)|g(x)|^{p/q} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Da die rechte Seite in $L^q(\Omega)$ liegt, können wir den Satz von Lebesgue anwenden, und erhalten $F(u_n) \rightarrow F(u)$ in $L^q(\Omega)$. Da wir dieses Argument auf jede beliebige Teilfolge anwenden können, muss die gesamte Folge gegen $F(u)$ konvergieren, woraus die Stetigkeit folgt. \square

Tatsächlich ist die Wachstumsbedingung sogar notwendig für die Stetigkeit, siehe [Appell und Zabreiko 1990, Satz 3.2]. Außerdem zeigt man recht leicht, dass für $p = q = \infty$ aus der Wachstumsbedingung (in diesem Fall mit $p/q := 0$) folgt, dass F sogar lokal Lipschitz-stetig ist.

Nun hätte man gerne, dass für differenzierbare f auch F differenzierbar ist, am besten mit punktwiser Ableitung $[F'(u)h](x) = f'(u(x))h(x)$. Dies ist aber nicht unbedingt der Fall; z. B. ist der durch $f(x, z) = \sin(z)$ definierte Superpositionsoperator für $1 \leq p = q < \infty$ in $u = 0$ nicht differenzierbar. Dies liegt daran, dass für einen Fréchet-differenzierbaren Superpositionsoperator $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ und eine Richtung $h \in L^p(\Omega)$ das punktweise(!) Produkt $F'(u)h \in L^q(\Omega)$ erfüllen muss. Dies stellt zusätzliche Anforderungen an den durch f' definierten Superpositionsoperator F' , und ist als *zwei-Norm-Diskrepanz* bekannt.

Satz 2.9. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion, die die Wachstumsbedingung für $1 \leq q < p < \infty$ erfüllt. Ist die partielle Ableitung f'_z ebenfalls eine Carathéodory-Funktion und erfüllt die Wachstumsbedingung für $p' = p - q$, so ist der Superpositionsoperator $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ stetig Fréchet-differenzierbar, und die Ableitung in $u \in L^p(\Omega)$ in Richtung $h \in L^p(\Omega)$ ist gegeben durch

$$[F'(u)h](x) = f'_z(x, u(x))h(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Beweis. Nach Satz 2.8 ist für $r := \frac{pq}{p-q}$ (d. h. $\frac{r}{p} = \frac{p'}{q}$) der durch

$$G : L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega), \quad [G(u)](x) = f'_z(x, u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega,$$

Superpositionsoperator wohldefiniert und stetig. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt weiter für beliebige $u \in L^p(\Omega)$

$$(2.5) \quad \|G(u)h\|_{L^q} \leq \|G(u)\|_{L^r} \|h\|_{L^p} \quad \text{für alle } h \in L^p(\Omega),$$

d. h. durch $h \mapsto G(u)h$ wird ein linearer beschränkter Operator $DF(u) : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ definiert.

Sei nun $h \in L^p(\Omega)$ beliebig. Da $z \mapsto f(x, z)$ nach Annahme stetig differenzierbar ist, folgt aus dem klassischen Mittelwertsatz zusammen mit (2.3) und (2.5) nun

$$\begin{aligned} & \|F(u+h) - F(u) - DF(u)h\|_{L^q} \\ &= \left(\int_{\Omega} |f(x, u(x)+h(x)) - f(x, u(x)) - f'_z(x, u(x))h(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\Omega} \left| \int_0^1 f'_z(x, u(x)+th(x))h(x) dt - f'_z(x, u(x))h(x) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\| \int_0^1 G(u+th)h dt - G(u)h \right\|_{L^q} \\ &\leq \int_0^1 \| (G(u+th) - G(u))h \|_{L^q} dt \\ &\leq \int_0^1 \| G(u+th) - G(u) \|_{L^r} dt \|h\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $G : L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega)$ geht das Integral für $\|h\|_{L^p} \rightarrow 0$ gegen Null, und damit ist F nach Definition Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $F'(u) = DF(u)$ (die wie bereits gezeigt stetig ist). □

Teil II

KONVEXE ANALYSIS

KONVEXE FUNKTIONEN

3

Die klassischen Ableitungsbegriffe des letzten Kapitels sind für unsere Zwecke nicht ausreichend, denn viele interessante Funktionale sind in diesem Sinne nicht differenzierbar; auch Funktionale mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ können damit nicht behandelt werden. Wir brauchen einen Ableitungsbegriff, der allgemeiner als Gâteaux- und Fréchet-Ableitungen ist, aber immer noch ein Fermatsches Prinzip und praktische Rechenregeln erlaubt.

Wir betrachten zuerst die Klasse der Funktionale, die solch eine verallgemeinerte Ableitung zulassen. Ein eigentliches Funktional $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y)$$

(dabei ist der Funktionswert ∞ auf beiden Seiten zugelassen). Gilt für $x \neq y$ und $\lambda \in (0, 1)$ sogar

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y),$$

so heißt F *strikt konvex*.

Eine alternative Charakterisierung der Konvexität eines Funktionals $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ basiert auf ihrem *Epigraph*

$$\text{epi } F := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \leq t\}.$$

Lemma 3.1. Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist $\text{epi } F$

- (i) nichtleer genau dann, wenn F eigentlich ist;
- (ii) konvex genau dann, wenn F konvex ist;
- (iii) (schwach) abgeschlossen genau dann, wenn F (schwach) unterhalbstetig ist.

Beweis. Aussagen (i) und (ii) folgen direkt aus der Definition. Sei nun F unterhalbstetig und $\{(x_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{epi } F$ eine beliebige Folge mit $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t) \in X \times \mathbb{R}$. Dann gilt

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} t_n = t,$$

d. h. $(x, t) \in \text{epi } F$. Sei umgekehrt $\text{epi } F$ abgeschlossen und angenommen, dass F nicht unterhalbstetig ist. Dann existiert eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x \in X$ und

$$F(x) > \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) =: M \in [-\infty, \infty).$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

- a) $x \in \text{dom } F$: Dann können wir eine Teilfolge auswählen, die wir wieder mit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, so dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $F(x_n) \leq F(x) - \varepsilon$ und damit $(x_n, F(x) - \varepsilon) \in \text{epi } F$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $x_n \rightarrow x$ folgt aus Abgeschlossenheit von $\text{epi } F$ auch $(x, F(x) - \varepsilon) \in \text{epi } F$ und damit $F(x) \leq F(x) - \varepsilon$, im Widerspruch zu $\varepsilon > 0$.
- b) $x \notin \text{dom } F$: Gilt $M > -\infty$, so argumentiert man analog mit $F(x_n) \leq M + \varepsilon$ für $M > -\infty$ bzw. $F(x_n) \leq \varepsilon$ für $M = -\infty$, um einen Widerspruch zu $F(x) = \infty$ zu erhalten.

Genauso folgt die Äquivalenz von schwacher Unterhalbstetigkeit und schwacher Abgeschlossenheit. \square

Aus Lemma 1.8 folgt dann sofort

Folgerung 3.2. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Dann ist F schwach unterhalbstetig genau dann, wenn F unterhalbstetig ist.

Direkt aus der Definition folgt die Konvexität

- affiner Funktionale, d. h. der Form $\langle x^*, \cdot \rangle_X - \alpha$ für $x^* \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$;
- der Norm $\| \cdot \|_X$ in einem normierten Raum X ;
- der Indikatorfunktion δ_C für eine konvexe Menge C .

Ist X ein Hilbertraum, so ist $F(x) = \|x\|_X^2$ sogar strikt konvex: Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $t \in (0, 1)$ beliebig gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_X^2 &= (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda x + (1 - \lambda)y)_X \\ &= \lambda^2 (x, x)_X + 2\lambda(1 - \lambda) (x, y)_X + (1 - \lambda)^2 (y, y)_X \\ &= \lambda \left(\lambda (x, x)_X + (1 - \lambda) (x - y, y)_X + (1 - \lambda) (y, y)_X \right) \\ &\quad + (1 - \lambda) \left(\lambda (x, x)_X + \lambda (x - y, y)_X + (1 - \lambda) (y, y)_X \right) \\ &= (\lambda + (1 - \lambda)) \left(\lambda (x, x)_X + (1 - \lambda) (y, y)_X \right) - \lambda(1 - \lambda) (x - y, x - y)_X \\ &= \lambda \|x\|_X^2 + (1 - \lambda) \|y\|_X^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|_X^2 \\ &< \lambda \|x\|_X^2 + (1 - \lambda) \|y\|_X^2. \end{aligned}$$

Eine in der Variationsrechnung besonders nützliche Klasse von konvexen Funktionen entsteht durch Integralfunktionale mit konvexen Integranden, die durch Superpositionsoperatoren definiert sind.

Lemma 3.3. *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $1 \leq p \leq \infty$, dann gilt dies auch für*

$$F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad u \mapsto \begin{cases} \int_{\Omega} f(u(x)) \, dx & f \circ u \in L^1(\Omega), \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Da f eigentlich ist, existiert ein $t_0 \in \text{dom } f$. Also ist die konstante Funktion $u \equiv t_0 \in \text{dom } F$, da $f(u) \equiv f(t_0) \in L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Für $u, v \in \text{dom } F$ (sonst ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt) und $\lambda \in (0, 1)$ folgt für fast alle $x \in \Omega$ aus der Konvexität von f , dass

$$f(\lambda u(x) + (1 - \lambda)v(x)) \leq \lambda f(u(x)) + (1 - \lambda)f(v(x)).$$

Da für $f, g \in L^1(\Omega)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch $\alpha f + \beta g \in L^1(\Omega)$ gilt, ist also $\lambda u + (1 - \lambda)v \in \text{dom } F$, und durch Integration der Ungleichung über Ω folgt die Konvexität von F .

Sei nun $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$. Dann existiert eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ fast überall. Wegen der Unterhalbstetigkeit von f folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{\Omega} f(u(x)) \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} f(u_{n_k}(x)) \, dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u_{n_k}(x)) \, dx = \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_{n_k}). \end{aligned}$$

Da dieses Argument auf jede weitere Teilfolge angewandt werden kann, muss die Aussage auch für die gesamte Folge gelten. □

Weitere Beispiele lassen sich durch folgende Operationen erzeugen.

Lemma 3.4. *Seien X, Y normierte Räume und sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Dann sind konvex*

- (i) αF für alle $\alpha \geq 0$;
- (ii) $F + G$ für $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex (ist F oder G strikt konvex, so auch $F + G$);
- (iii) $\varphi \circ F$ für $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und monoton steigend;
- (iv) $F \circ A$ für $A \in L(Y, X)$;
- (v) $x \mapsto \sup_{i \in I} F_i(x)$ für eine beliebige Indexmenge I und F_i konvex für alle $i \in I$.

Nach Lemma 3.4 (v) ist also das punktweise Supremum von affinen Funktionalen stets konvex. Tatsächlich lässt sich sogar jedes konvexe Funktional so darstellen. Dafür definieren wir für ein eigentliches Funktional $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die *konvexe Hülle*

$$F^\Gamma : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sup\{a(x) : a \in X^* \text{ affin mit } a \leq F\}.$$

Lemma 3.5. *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich. Dann ist F genau dann konvex und unterhalbstetig, wenn gilt $F = F^\Gamma$.*

Beweis. Da affine Funktionale konvex und stetig sind, ist F^Γ nach Lemma 3.4 (v) und Lemma 2.2 (v) immer konvex und unterhalbstetig, woraus die eine Richtung folgt.

Für die andere Richtung sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Aus der Definition von F^Γ ist offensichtlich, dass stets $F^\Gamma \leq F$ gilt. Angenommen, $F^\Gamma < F$. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in X$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$F^\Gamma(x_0) < \lambda < F(x_0).$$

Wir konstruieren nun mit Hilfe des Hahn–Banach-Trennungssatzes ein affines Funktional $a \in X^*$ mit $a \leq F$ aber $a(x_0) > \lambda$, was zusammen mit der Definition von F^Γ zum Widerspruch führt. Da F eigentlich, konvex und unterhalbstetig ist, ist $\text{epi } F$ nach Lemma 3.1 nichtleer, konvex und abgeschlossen. Weiter ist $\{(x_0, \lambda)\}$ kompakt und wegen $\lambda < F(x_0)$ disjunkt zu $\text{epi } F$. Satz 1.4 (ii) liefert also die Existenz eines $z^* \in (X \times \mathbb{R})^*$ und eines $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle z^*, (x, t) \rangle_{X \times \mathbb{R}} \leq \alpha < \langle z^*, (x_0, \lambda) \rangle_{X \times \mathbb{R}} \quad \text{für alle } (x, t) \in \text{epi } F.$$

Wir definieren nun ein $x^* \in X^*$ durch $\langle x^*, x \rangle_X = \langle z^*, (x, 0) \rangle_{X \times \mathbb{R}}$ für alle $x \in X$ und setzen $s := \langle z^*, (0, 1) \rangle_{X \times \mathbb{R}} \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\langle z^*, (x, t) \rangle_{X \times \mathbb{R}} = \langle x^*, x \rangle_X + st$ und damit

$$(3.1) \quad \langle x^*, x \rangle_X + st \leq \alpha < \langle x^*, x_0 \rangle_X + s\lambda \quad \text{für alle } (x, t) \in \text{epi } F.$$

Nun ist für $(x, t) \in \text{epi } F$ auch $(x, t') \in \text{epi } F$ für alle $t' > t$, und aus (3.1) folgt

$$s \leq \frac{\alpha - \langle x^*, x \rangle_X}{t} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Also ist $s \leq 0$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung.

(i) $s < 0$: Wir setzen

$$a : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\alpha - \langle x^*, x \rangle_X}{s}.$$

Dann ist a affin und stetig. Für $x \in \text{dom } F$ ist dann $(x, F(x)) \in \text{epi } F$, und aus der produktiven Null und der ersten Ungleichung von (3.1) folgt (beachte $s < 0$!)

$$a(x) = \frac{1}{s} (\alpha - \langle x^*, x \rangle_X - sF(x)) + F(x) \leq F(x).$$

(Für $x \notin \text{dom } F$ ist die Aussage klar.) Aus der zweiten Ungleichung von (3.1) folgt aber

$$a(x_0) = \frac{1}{s} (\alpha - \langle x^*, x_0 \rangle_X) > \lambda.$$

(ii) $s = 0$: Dann folgt $\langle x^*, x \rangle_X \leq \alpha < \langle x^*, x_0 \rangle_X$ für alle $x \in \text{dom } F$, weshalb $x_0 \notin \text{dom } F$ gelten muss. Allerdings ist F eigentlich, so dass ein $y_0 \in \text{dom } F$ existiert, für das wir analog zu Fall (i) ein stetiges affines Funktional $\alpha_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha_0 \leq F$ konstruieren können. Wir setzen nun für $\rho > 0$

$$\alpha_\rho : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha_0(x) + \rho (\langle x^*, x \rangle_X - \alpha).$$

Dann ist auch α_ρ affin und stetig, und wegen $\langle x^*, x \rangle_X \leq \alpha$ gilt $\alpha_\rho(x) \leq \alpha_0(x) \leq F(x)$ für alle $x \in \text{dom } F$ und $\rho > 0$ beliebig. Wegen $\langle x^*, x_0 \rangle_X > \alpha$ existiert aber ein $\rho > 0$ mit $\alpha_\rho(x_0) > \lambda$.

In beiden Fällen muss nach Definition von F^Γ also auch $F^\Gamma(x_0) > \lambda$ gelten, im Widerspruch zur Annahme $F^\Gamma(x_0) < \lambda$. \square

Nach all der Vorarbeit können wir nun schnell das Hauptresultat über die Existenz von Lösungen konvexer Minimierungsaufgaben beweisen.

Satz 3.6. Sei X ein reflexiver Banachraum und seien

- (i) $U \subset X$ nichtleer, abgeschlossen, konvex,
- (ii) $F : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex, unterhalbstetig mit $\text{dom } F \cap U \neq \emptyset$,
- (iii) U beschränkt oder F koerziv.

Dann hat das Problem

$$\min_{x \in U} F(x)$$

eine Lösung $\bar{x} \in U \cap \text{dom } F$. Ist F strikt konvex, so ist die Lösung eindeutig.

Beweis. Wir betrachten das Funktional $\tilde{F} = F + \delta_U$. Aus Voraussetzung (i) folgt mit Lemma 2.2, dass δ_U eigentlich, konvex und schwach unterhalbstetig ist. Wegen (ii) existiert ein Punkt $x_0 \in U$ mit $\tilde{F}(x_0) < \infty$, daher ist auch \tilde{F} eigentlich, konvex und damit sogar unterhalbstetig. Aus (iii) folgt schließlich die Koerzivität von \tilde{F} (da die Summe koerziv ist, sobald es einer dieser Summanden ist). Da X reflexiv ist, können wir nun Theorem 2.1 anwenden und erhalten die Existenz eines Minimierers $\bar{x} \in \text{dom } \tilde{F} = U \cap \text{dom } F$ von \tilde{F} mit

$$F(\bar{x}) = \tilde{F}(\bar{x}) \leq \tilde{F}(x) = F(x) \quad \text{für alle } x \in U,$$

d. h. \bar{x} die gesuchte Lösung.

Sei nun F strikt konvex, und seien $\bar{x}, \bar{x}' \in U$ zwei verschiedene Minimierer, d. h. $F(\bar{x}) = F(\bar{x}') = \min_{x \in U} F(x)$. Dann ist für alle $\lambda \in (0, 1)$ wegen der Konvexität von U auch

$$x_\lambda := \lambda \bar{x} + (1 - \lambda) \bar{x}' \in U,$$

aber wegen der strikten Konvexität von F gilt

$$F(x_\lambda) < \lambda F(\bar{x}) + (1 - \lambda)F(\bar{x}') = F(\bar{x}),$$

im Widerspruch zu $F(\bar{x}) \leq F(x)$ für alle $x \in U$. □

DAS KONVEXE SUBDIFFERENTIAL

4

Wir wenden uns nun der Charakterisierung von Minimierern konvexer Funktionen durch ein Fermatsches Prinzip zu. Ein erster Kandidat für den nötigen Ableitungsbegriff ist die Richtungsableitung, denn diese existiert (zumindest in den erweiterten reellen Zahlen) für jede konvexe Funktion.

Lemma 4.1. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und $x \in \text{dom } F$. Dann existiert $F'(x; h) \in [-\infty, \infty]$ für jedes $h \in X$, und es gilt

$$(4.1) \quad F'(x; h) \leq F(x + h) - F(x).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass für $x \in \text{dom } F$ und $h \in X$ die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{F(x + th) - F(x)}{t},$$

monoton steigend ist. Durch Einsetzen und Umformen sieht man, dass für alle $0 < s < t$ die Bedingung $\varphi(s) \leq \varphi(t)$ äquivalent ist zu

$$F(x + sh) \leq \frac{s}{t}F(x + th) + \left(1 - \frac{s}{t}\right)F(x).$$

Dies folgt aber wegen $x + sh = (1 - \frac{s}{t})x + \frac{s}{t}(x + th)$ aus der Konvexität von F . Daher gilt

$$F'(x; h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \inf_{t > 0} \varphi(t) \leq \varphi(1) = F(x + h) - F(x). \quad \square$$

Leider liefert dieser Begriff noch nicht das Gewünschte, denn die konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = |t|$ hat ein Minimum in $t = 0$, dort aber nur die Richtungsableitung $f'(0; h) = |h| > 0$ für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt also nicht $f'(0; h) = 0$ für irgendein $h \neq 0$, aber es gilt zumindest $0 \leq f'(0; h)$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Diese Bedingung wollen wir auf allgemeine normierte Räume verallgemeinern. Dafür betrachten wir für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und $x \in \text{dom } F$ die Menge

$$(4.2) \quad \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq F'(x; h) \text{ für alle } h \in X\}.$$

Diese Menge (die auch leer sein kann!) ist mit Hilfe von Lemma 4.1 auch ohne Richtungsableitung charakterisierbar.

Lemma 4.2. Seien $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und $x \in \text{dom } F$. Dann sind für $x^* \in X^*$ äquivalent

- (i) $\langle x^*, h \rangle_X \leq F'(x; h)$ für alle $h \in X$;
- (ii) $\langle x^*, h \rangle_X \leq F(x + h) - F(x)$ für alle $h \in X$.

Beweis. Gilt (i), so folgt direkt aus (4.1), dass für alle $h \in X$ gilt

$$\langle x^*, h \rangle_X \leq F'(x; h) \leq F(x + h) - F(x).$$

Gilt (ii) für alle $h \in X$, so auch für th für alle $h \in X$ und $t > 0$. Division durch t und Grenzübergang liefert dann

$$\langle x^*, h \rangle_X \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} = F'(x; h). \quad \square$$

Führen wir $\tilde{x} = x + h \in X$ ein, so führt die zweite Bedingung auf die folgende Definition. Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und $x \in \text{dom } F$ definieren wir das (*konvexe*) *Subdifferential* als

$$(4.3) \quad \partial F(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X \leq F(\tilde{x}) - F(x) \text{ für alle } \tilde{x} \in X\}.$$

(Beachten Sie, dass $\tilde{x} \notin \text{dom } F$ zugelassen ist, da dann die Ungleichung trivialerweise erfüllt ist.) Direkt aus der Definition folgt, dass $\partial F(x)$ konvex und schwach-* abgeschlossen ist. Ein Element $\xi \in \partial F(x)$ heißt *Subgradient*.

Diese Definition liefert nun das Gewünschte.

Satz 4.3. Seien $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\bar{x} \in \text{dom } F$. Dann sind äquivalent:

- (i) $0 \in \partial F(\bar{x})$.
- (ii) $F(\bar{x}) = \min_{x \in X} F(x)$;

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen: Es ist $0 \in \partial F(\bar{x})$ genau dann, wenn gilt

$$0 = \langle 0, x - \bar{x} \rangle_X \leq F(x) - F(\bar{x}) \quad \text{für alle } x \in X,$$

d. h. $F(\bar{x}) \leq F(x)$ für alle $x \in X$. □

Dies entspricht auch der geometrischen Anschauung: Für $X = \mathbb{R} = X^*$ beschreibt $\tilde{y} := f(\tilde{x}) = f(x) + \xi(\tilde{x} - x)$ eine Tangente an $y = f(x)$ mit Steigung ξ ; die Bedingung $\xi = 0 \in \partial f(\tilde{x})$ bedeutet also, dass f in \tilde{x} eine waagerechte Tangente hat.

Wir betrachten einige Beispiele. Zunächst ist aus der Konstruktion ersichtlich, dass das Subdifferential die Gâteaux-Ableitung verallgemeinert.

Satz 4.4. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und Gâteaux-differenzierbar in x . Dann ist $\partial F(x) = \{DF(x)\}$.

Beweis. Nach Definition der Gâteaux-Ableitung gilt

$$\langle DF(x), h \rangle_X = DF(x)h = F'(x; h) \quad \text{für alle } h \in X.$$

Aus Lemma 4.2 folgt nun mit $\tilde{x} := x + h$ sofort $DF(x) \in \partial F(x)$.

Umgekehrt folgt aus $\xi \in \partial F(x)$ mit $h := \tilde{x} - x \in X$, dass

$$\langle \xi, h \rangle_X \leq F'(x; h) = \langle DF(x), h \rangle_X.$$

Da $\tilde{x} \in X$ beliebig war, gilt dies für alle $h \in X$. Supremum über alle h mit $\|h\|_X \leq 1$ liefert dann $\|\xi - DF(x)\|_{X^*} \leq 0$, d. h. $\xi = DF(x)$. \square

Natürlich möchten wir auch Subdifferentialen von Funktionen haben, die nicht differenzierbar sind. Das kanonische Beispiel ist die Norm $\|x\|_X$ in einem normierten Raum, die ja in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Satz 4.5. Für $x \in X$ ist

$$\partial(\|\cdot\|_X)(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle_X = \|x\|_X \text{ und } \|x^*\|_{X^*} = 1\} & \text{falls } x \neq 0, \\ B_{X^*} & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Beweis. Für $x = 0$ ist nach Definition $\xi \in \partial(\|\cdot\|_X)(x)$ genau dann, wenn gilt

$$\langle \xi, \tilde{x} \rangle_X \leq \|\tilde{x}\|_X \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X.$$

Dies ist aber wegen der Definition der Operatornorm äquivalent mit $\|\xi\|_{X^*} \leq 1$.

Sei nun $x \neq 0$ und betrachte $\xi \in \partial(\|\cdot\|_X)(x)$. Indem wir nacheinander $\tilde{x} = 0$ und $\tilde{x} = 2x$ in die Definition (4.3) einsetzen, erhalten wir

$$\|x\|_X \leq \langle \xi, x \rangle_X = \langle \xi, 2x - x \rangle_X \leq \|2x\|_X - \|x\|_X = \|x\|_X,$$

d. h. $\langle \xi, x \rangle_X = \|x\|_X$. Analog haben wir für alle $\tilde{x} \in X$, dass

$$\langle \xi, \tilde{x} \rangle_X = \langle \xi, (\tilde{x} + x) - x \rangle_X \leq \|\tilde{x} + x\|_X - \|x\|_X \leq \|\tilde{x}\|_X,$$

woraus wie im Fall $x = 0$ folgt $\|\xi\|_{X^*} \leq 1$. Für $\tilde{x} = x/\|x\|_X$ gilt nun

$$\langle \xi, \tilde{x} \rangle_X = \|x\|_X^{-1} \langle \xi, x \rangle_X = \|x\|_X^{-1} \|x\|_X = 1.$$

Also ist tatsächlich $\|\xi\|_{X^*} = 1$.

Es sei umgekehrt $x^* \in X^*$ mit $\langle x^*, x \rangle_X = \|x\|_X$ und $\|x^*\|_{X^*} = 1$. Dann gilt mit (1.1) für alle $\tilde{x} \in X$ die Relation

$$\langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X = \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X - \langle x^*, x \rangle_X \leq \|\tilde{x}\|_X - \|x\|_X,$$

und daher nach Definition $x^* \in \partial(\|\cdot\|_X)(x)$ \square

Für den Fall $X = \mathbb{R}$ erhalten wir daraus das Subdifferential der Betragsfunktion als

$$(4.4) \quad \partial(|\cdot|)(t) = \text{sign}(t) := \begin{cases} \{1\} & \text{falls } t > 0, \\ \{-1\} & \text{falls } t < 0, \\ [-1, 1] & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

Durch komponentenweise Betrachtung erhält man daraus die Charakterisierung des Subdifferentials der Norm in $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_1)$.

Schließlich haben wir auch eine einfache Darstellung für das Subdifferential der Indikatorfunktion einer konvexen Menge $C \subset X$. Für $x \in C = \text{dom } \delta_C$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} x^* \in \partial\delta_C(x) &\Leftrightarrow \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X \leq \delta_C(\tilde{x}) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X \\ &\Leftrightarrow \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X \leq 0 \quad \text{für alle } \tilde{x} \in C, \end{aligned}$$

da die Ungleichung für alle $\tilde{x} \notin C$ trivialerweise gilt. Die Menge $\partial\delta_C(x)$ nennt man auch *Normalenkegel* an C in x . Wieder ist das Beispiel $X = \mathbb{R}$ erhellend: Betrachte $C = [-1, 1]$ und $t \in C$. Dann ist $\xi \in \partial\delta_{[-1,1]}(t)$ genau dann, wenn $\xi(\tilde{t} - t) \leq 0$ für alle $\tilde{t} \in [-1, 1]$ gilt. Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $t = 1$. Dann ist $\tilde{t} - t \in [-2, 0]$ und damit gilt die Bedingung genau dann, wenn $\xi \geq 0$ ist.
2. Fall: $t = -1$. Dann ist $\tilde{t} - t \in [0, 2]$ und damit gilt die Bedingung genau dann, wenn $\xi \leq 0$ ist.
3. Fall: $t \in (-1, 1)$. Dann kann $\tilde{t} - t$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen, und damit muss $\xi = 0$ sein.

Also ist

$$\partial\delta_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{falls } t = 1, \\ (-\infty, 0] & \text{falls } t = -1, \\ \{0\} & \text{falls } t \in (-1, 1), \\ \emptyset & \text{falls } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Dies entspricht den aus der linearen Optimierung bekannten *Komplementaritätsbedingungen* für die Ungleichungen $-1 \leq t \leq 1$. Analoges gilt für komponentenweise Schranken in $X = \mathbb{R}^N$.

Für konvexe Integralfunktionale lässt sich das Subdifferential punktweise charakterisieren. Im Folgenden sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $p^{-1} + q^{-1} = 1$, d. h. $L^q(\Omega) = L^p(\Omega)^*$ für $1 \leq p < \infty$, angenommen.

Lemma 4.6. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig und $F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $1 \leq p < \infty$ wie in Lemma 3.3. Dann ist für alle $u \in \text{dom } F$ mit $q = \frac{p}{p-1}$

$$\partial F(u) = \{u^* \in L^q(\Omega) : u^*(x) \in \partial f(u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega\}.$$

Beweis. Sei $u \in \text{dom } F$, d. h. $f \circ u \in L^1(\Omega)$. Gilt für $u^* \in L^q(\Omega)$ dass $u^*(x) \in \partial f(u(x))$ fast überall, so folgt daraus durch Integration

$$F(\tilde{u}) - F(u) = \int_{\Omega} f(\tilde{u}(x)) - f(u(x)) \, dx \geq \int_{\Omega} u^*(x)(\tilde{u}(x) - u(x)) \, dx = \langle u^*, \tilde{u} - u \rangle_{L^p}$$

für alle $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$.

Sei umgekehrt $u^* \in \partial F(u)$. Dann gilt nach Definition

$$\int_{\Omega} u^*(x)(\tilde{u}(x) - u(x)) \, dx \leq \int_{\Omega} f(\tilde{u}(x)) - f(u(x)) \, dx \quad \text{für alle } \tilde{u} \in L^p(\Omega).$$

Sei nun $t \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $A \subset \Omega$ eine beliebige messbare Menge. Für die Wahl

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} t & \text{falls } x \in A, \\ u(x) & \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

folgt wegen $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$ aus der obigen Ungleichung

$$\int_A u^*(x)(t - u(x)) \, dx \leq \int_A f(t) - f(u(x)) \, dx.$$

Da A beliebig war, muss gelten

$$u^*(x)(t - u(x)) \leq f(t) - f(u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Da $t \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt daraus $u^*(x) \in \partial u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. □

Subdifferentialer weiterer Funktionale erhält man durch Rechenregeln. Es ist naheliegend, dass diese umso aufwendiger zu beweisen sind, je schwächer der Differenzierbarkeitsbegriff ist (d. h. je mehr Funktionen in diesem Sinne differenzierbar sind). Die ersten beiden Regeln folgen noch direkt aus der Definition.

Lemma 4.7. Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex und $x \in \text{dom } F$ gilt

- (i) $\partial(\lambda F)(x) = \lambda \partial F(x) := \{\lambda \xi : \xi \in \partial F(x)\}$ für $\lambda > 0$;
- (ii) $\partial F(\cdot + x_0)(x) = \partial F(x + x_0)$ für $x_0 \in X$ mit $x + x_0 \in \text{dom } F$.

Schon die Summenregel ist deutlich aufwendiger.

Satz 4.8 (Summenregel). Seien $F, G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Dann gilt für alle $x \in \text{dom } F \cap \text{dom } G$

$$\partial F(x) + \partial G(x) \subset \partial(F + G)(x).$$

Existiert ein $x_0 \in \text{dom } F \cap \text{dom } G$ mit F stetig in x_0 , so gilt Gleichheit.

Beweis. Die Inklusion folgt aus der Definition des Subdifferentials. Seien daher $x \in \text{dom } F \cap G$ und $\xi \in \partial(F + G)(x)$, erfüllen also

$$(4.5) \quad \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X \leq (F(\tilde{x}) + G(\tilde{x})) - (F(x) + G(x)) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X.$$

Unser Ziel ist nun, ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.5 mit Hilfe der Charakterisierung konvexer Funktionale durch ihren Epigraphen und des Trennungssatzes ein lineares Funktional $\zeta \in \partial G(x) \subset X^*$ zu finden mit $\xi - \zeta \in \partial F(x)$, d. h.

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}) - F(x) - \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X &\geq \langle \zeta, x - \tilde{x} \rangle_X \quad \text{für alle } \tilde{x} \in \text{dom } F, \\ G(x) - G(\tilde{x}) &\leq \langle \zeta, x - \tilde{x} \rangle_X \quad \text{für alle } \tilde{x} \in \text{dom } G. \end{aligned}$$

Wir definieren dafür die Mengen

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{(\tilde{x}, t - (F(x) - \langle \xi, x \rangle_X)) : F(\tilde{x}) - \langle \xi, \tilde{x} \rangle_X \leq t\}, \\ C_2 &:= \{(\tilde{x}, G(x) - t) : G(\tilde{x}) \leq t\}, \end{aligned}$$

d. h.

$$C_1 = \text{epi}(F - \xi) - (F(x) - \langle \xi, x \rangle_X), \quad C_2 = -(\text{epi } G - G(x)).$$

Da es sich um verschobene (und, für C_2 , gespiegelte) Epigraphen eigentlicher konvexer Funktionen (lineare Funktionale sind konvex) handelt, sind C_1 und C_2 nichtleer und konvex. Weiter ist x_0 ein innerer Punkt von $\text{dom } F = \text{dom}(F - \xi)$ (sonst wäre F nicht stetig in x_0) und damit (x_0, α) für α groß genug ein innerer Punkt von C_1 . Das Innere $(C_1)^\circ$ von C_1 ist also nichtleer. Bleibt zu zeigen, dass $(C_1)^\circ$ und C_2 disjunkt sind. Dafür sei $(\tilde{x}, \alpha) \in (C_1)^\circ \cap C_2$, für das nach Definition gilt

$$F(\tilde{x}) - F(x) - \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X < \alpha \leq G(x) - G(\tilde{x}),$$

im Widerspruch zu (4.5). Folgerung 1.5 liefert also ein $(x^*, s) \in (X \times \mathbb{R})^* \setminus \{0\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(4.6) \quad \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X + s(t - (F(x) - \langle \xi, x \rangle_X)) \leq \lambda, \quad \tilde{x} \in \text{dom } F, t \geq F(\tilde{x}) - \langle \xi, \tilde{x} \rangle_X,$$

$$(4.7) \quad \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X + s(G(x) - t) \geq \lambda, \quad \tilde{x} \in \text{dom } G, t \geq G(\tilde{x}).$$

Wir zeigen nun, dass $s < 0$ ist. Für $s = 0$ folgt mit $\tilde{x} = x_0 \in \text{dom } F \cap \text{dom } G$ sofort der Widerspruch

$$\langle x^*, x_0 \rangle_X < \lambda \leq \langle x^*, x_0 \rangle_X,$$

da (x_0, α) für α groß genug innerer Punkt von C_1 ist und daher nach Satz 1.4 die Trennung sogar mit strikter Ungleichung erfüllt ist. Gilt $s > 0$, so ist für $t > F(x) - \langle \xi, x \rangle_X$ die Klammer in (4.6) positiv, und $t \rightarrow \infty$ mit \tilde{x} fest führt zum Widerspruch zur Beschränktheit durch λ .

Also ist $s < 0$, und aus (4.6) mit $t = F(\tilde{x}) - \langle \xi, \tilde{x} \rangle_X$ und aus (4.7) mit $t = G(\tilde{x})$ folgt

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}) - F(x) + \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X &\geq s^{-1}(\lambda - \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X), \quad \tilde{x} \in \text{dom } F, \\ G(x) - G(\tilde{x}) &\leq s^{-1}(\lambda - \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X), \quad \tilde{x} \in \text{dom } G. \end{aligned}$$

Setzen wir $\tilde{x} = x \in \text{dom } F \cap \text{dom } G$ in beiden Ungleichungen, so folgt sofort $\lambda = \langle x^*, x \rangle_X$. Damit ist $\zeta = s^{-1}x^*$ das gewünschte Funktional, für das gilt $(\xi - \zeta) \in \partial F$ und $\zeta \in \partial G$, d. h. $\xi \in \partial F + \partial G$. \square

Daraus erhält man per Induktion Summenregeln für mehr Summanden (wobei alle bis auf ein Summand stetig in x_0 sein müssen). Analog beweist man eine Kettenregel für lineare Operatoren.

Satz 4.9 (Kettenregel). *Seien X, Y normierte Räume, $A \in L(X, Y)$, und $F : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex. Dann gilt für alle $x \in \text{dom}(F \circ A)$*

$$\partial(F \circ A)(x) \supset A^* \partial F(Ax) := \{A^*y^* : y^* \in \partial F(Ax)\}.$$

Existiert ein $x_0 \in X$ so, dass F stetig in Ax_0 ist, so gilt Gleichheit.

Beweis. Die Inklusion folgt wieder direkt aus der Definition: Für $\eta \in \partial F(Ax) \subset Y^*$ gilt insbesondere für alle $A\tilde{x} \in Y, \tilde{x} \in X$, dass

$$F(A\tilde{x}) - F(Ax) \geq \langle \eta, A\tilde{x} - Ax \rangle_Y = \langle A^*\eta, \tilde{x} - x \rangle_X,$$

d. h. $\xi := A^*\eta \in \partial(F \circ A) \subset X^*$.

Sei nun $x \in \text{dom}(F \circ A)$ und $\xi \in \partial(F \circ A)(x)$, d. h.

$$F(Ax) + \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X \leq F(A\tilde{x}) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X.$$

Analog zur Summenregel könnten wir nun ein $\eta \in \partial F(Ax)$ mit $\xi = A^*\eta$ durch Trennung von epi F und

$$\text{graph } A = \{(x, Ax) : x \in X\} \subset X \times Y$$

konstruieren. Der Abwechslung halber wenden wir stattdessen die Summenregel an auf $H : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$H(x, y) := F(y) + \delta_{\text{graph } A}(x, y).$$

Da A linear ist, ist $\text{graph } A$ und damit $\delta_{\text{graph } A}$ konvex. Weiter ist $Ax \in \text{dom } F$ und damit $(x, Ax) \in \text{dom } H$.

Zuerst zeigen wir, dass $\xi \in \partial(F \circ A)(x)$ genau dann gilt, wenn $(\xi, 0) \in \partial H(x, Ax)$ ist. Sei dafür $(\xi, 0) \in \partial H(x, Ax)$. Dann gilt für alle $\tilde{x} \in X, \tilde{y} \in Y$

$$\langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X + \langle 0, \tilde{y} - Ax \rangle_Y \leq F(\tilde{y}) - F(Ax) + \delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \delta_{\text{graph } A}(x, Ax).$$

Insbesondere gilt dies für alle $\tilde{y} \in \text{ran}(A) = \{A\tilde{x} : \tilde{x} \in X\}$. Also ist wegen $\delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, A\tilde{x}) = 0$

$$\langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X \leq F(A\tilde{x}) - F(Ax) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X,$$

d. h. $\xi \in \partial(F \circ A)(x)$. Sei umgekehrt $\xi \in \partial(F \circ A)(x)$. Dann ist für alle $\tilde{x} \in X$ und $\tilde{y} \in Y$ wegen $\delta_{\text{graph } A}(x, Ax) = 0$ und $\delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X + \langle 0, \tilde{y} - Ax \rangle_Y &= \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle_X \\ &\leq F(A\tilde{x}) - F(Ax) + \delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \delta_{\text{graph } A}(x, Ax) \\ &= F(\tilde{y}) - F(Ax) + \delta_{\text{graph } A}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \delta_{\text{graph } A}(x, Ax). \end{aligned}$$

da für $\tilde{y} \neq A\tilde{x}$ beide Seiten der letzten Gleichung unendlich sind. Also ist $(\xi, 0) \in \partial H(x, Ax)$.

Da F stetig ist in Ax_0 , ist $(x, y) \mapsto F(y)$ stetig in $(x_0, Ax_0) \in \text{graph } A = \text{dom } \delta_{\text{graph } A}$. Aus der Summenregel folgt nun

$$(\xi, 0) \in \partial H(x, Ax) = \partial F(Ax) + \partial \delta_{\text{graph } A}(x, Ax).$$

Also ist $(\xi, 0) = (x^*, y^*) + (w^*, z^*)$ für ein $(x^*, y^*) \in \partial F(Ax)$ (mit F wieder aufgefasst als $(x, y) \mapsto F(y)$) und ein $(w^*, z^*) \in \partial \delta_{\text{graph } A}(x, Ax)$.

Nun ist $(x^*, y^*) \in \partial F(Ax)$ genau dann, wenn gilt

$$\langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_X + \langle y^*, \tilde{y} - Ax \rangle_Y \leq F(\tilde{y}) - F(Ax) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X, \tilde{y} \in Y$$

ist. Festhalten von $\tilde{x} = x$ bzw. $\tilde{y} = Ax$ liefert $y^* \in \partial F(Ax)$ (wobei nun wieder F als Abbildung auf Y aufgefasst wird) und $x^* = 0$. Weiter ist $(w^*, z^*) \in \partial \delta_{\text{graph } A}(x, Ax)$ genau dann, wenn

$$\langle w^*, \tilde{x} - x \rangle_X + \langle z^*, \tilde{y} - Ax \rangle_Y \leq 0 \quad \text{für alle } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \text{graph } A,$$

d. h. für alle $\tilde{x} \in X$ und $\tilde{y} = A\tilde{x}$. Also ist

$$\langle w^* + A^*z^*, \tilde{x} - x \rangle_X \leq 0 \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X$$

und damit $w^* = -A^*z^*$. Zusammen erhalten wir

$$(\xi, 0) = (0, y^*) + (-A^*z^*, z^*),$$

woraus $y^* = -z^*$ und daher $\xi = -A^*z^* = A^*y^*$ mit $y^* \in \partial F(Ax)$ folgt, was zu zeigen war. \square

Damit erhalten wir eine Charakterisierung von Minimierern konvexer Funktionen unter (konvexen) Nebenbedingungen.

Folgerung 4.10. Sei $U \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen, und sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Existiert ein $x_0 \in U^\circ \cap \text{dom } F$, so ist $\bar{x} \in U$ Lösung von

$$\min_{x \in U} F(x)$$

genau dann, wenn ein $\xi \in X^*$ existiert mit

$$(4.8) \quad \begin{cases} -\xi \in \partial F(\bar{x}), \\ \langle \xi, \tilde{x} - x \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \tilde{x} \in U. \end{cases}$$

Beweis. Da F und U konvex sind, können wir Satz 4.3 auf $J := F + \delta_U$ anwenden; und da δ_U in $x_0 \in U^\circ$ stetig ist, können wir auch die **Summenregel** anwenden. Also hat F in \bar{x} ein Minimum genau dann, wenn gilt

$$0 \in \partial J(\bar{x}) = \partial F(\bar{x}) + \partial \delta_U(\bar{x}).$$

Zusammen mit der Charakterisierung des Subdifferentials der Indikatorfunktion als Normalenkegel erhält man damit (4.8). \square

Für eine Gâteaux-differenzierbare (und damit stetige) Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt (4.8) die klassischen *Karush–Kuhn–Tucker-Bedingungen*; die Existenz des inneren Punktes $x_0 \in U^\circ$ entspricht dabei genau der *Slater-Bedingung*.

FENCHEL-DUALITÄT

5

Ein Grund für die Nützlichkeit des konvexen Subdifferentials ist, wie wir sehen werden, seine Verbindung mit der Fenchel–Legendre-Transformation. Sei X ein normierter Raum und $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich. Dann ist die *Fenchel-Konjugierte* zu F definiert als

$$F^* : X^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad F^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - F(x).$$

(Da $\text{dom } F \neq \emptyset$ angenommen ist, gilt $F^*(x^*) > -\infty$ für alle $x^* \in X^*$, also ist die Definition sinnvoll.) Aus Lemma 3.4 (v) und Lemma 2.2 (v) folgt sofort, dass F^* für eigentliche F stets konvex und unterhalbstetig ist. Ist F nach unten durch ein affin-lineares Funktional beschränkt, so ist F^* eigentlich. Aus der Definition folgt auch sofort die *Fenchel–Young-Ungleichung*

$$(5.1) \quad \langle x^*, x \rangle_X \leq F(x) + F^*(x^*) \quad \text{für alle } x \in X, x^* \in X^*.$$

Anschaulich ist $F^*(x^*)$ der (negative) affine Anteil der Tangente an F (im Punkt x , in dem das Supremum angenommen wird) mit der Steigung x^* . Analog definieren wir für $F : X^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ die Fenchel-Konjugierte als

$$F^* : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad F^*(x) = \sup_{x^* \in X^*} \langle x^*, x \rangle_X - F(x^*).$$

Durch diese Konvention ist die *Bikonjugierte* $F^{**} := (F^*)^*$ selbst für nicht-reflexive Räume wieder auf X definiert (anstatt auf X^{**}). Anschaulich ist F^{**} die untere konvexe Hülle von F , die für konvexe Funktionen nach Lemma 3.5 ja mit F übereinstimmt.

Satz 5.1 (Fenchel–Moreau–Rockafellar). Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich. Dann gilt

- (i) $F^{**} \leq F$;
- (ii) $F^{**} = F^\Gamma$;
- (iii) $F^{**} = F$ genau dann, wenn F konvex und unterhalbstetig ist.

Beweis. Für Aussage (i) nehmen wir in der Fenchel-Young-Ungleichung (5.1) das Supremum über alle $x^* \in X^*$ und erhalten

$$F(x) \geq \sup_{x^* \in X^*} \langle x^*, x \rangle_X - F^*(x^*) = F^{**}(x).$$

Für (ii) stellen wir zuerst fest, dass F^{**} nach Definition der Fenchel-Konjugierten konvex und unterhalbstetig und wegen (i) auch eigentlich ist. Also gilt nach Lemma 3.5

$$F^{**}(x) = (F^{**})^\Gamma(x) = \sup \{a(x) : a : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ affin mit } a \leq F^{**}\}.$$

Wir zeigen nun, dass wir auf der rechten Seite F^{**} durch F ersetzen können. Sei dafür $a(x) = \langle x^*, x \rangle_X - \alpha$ für $x^* \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Gilt $a \leq F^{**}$, so folgt aus (i) sofort $a \leq F$. Gilt umgekehrt $a \leq F$, so ist $\langle x^*, x \rangle_X - F(x) \leq \alpha$ für alle $x \in X$, und durch Supremum über alle $x \in X$ erhalten wir $\alpha \geq F^*(x^*)$. Daraus folgt nun

$$a(x) = \langle x^*, x \rangle_X - \alpha \leq \langle x^*, x \rangle_X - F^*(x^*) \leq F^{**}(x) \quad \text{für alle } x \in X,$$

d. h. $a \leq F^{**}$.

Aussage (iii) folgt nun sofort aus (ii) und Lemma 3.5. □

Wir betrachten wieder relevante Beispiele.

Beispiel 5.2.

- (i) Sei X ein Hilbertraum und $F(x) = \frac{1}{2} \|x\|_X^2$. Wir identifizieren X über den Satz von Fréchet-Riesz mit seinem Dualraum X^* , so dass die duale Paarung durch das Skalarprodukt ausgedrückt werden kann. Da F Fréchet-differenzierbar ist mit Gradient $\nabla F(x) = x$, muss die Lösung \bar{x} von

$$\sup_{x \in L^2(\Omega)} \langle x^*, x \rangle_X - \frac{1}{2} \langle x, x \rangle_X$$

das Fermat-Prinzip erfüllen, d. h. $x^* = \bar{x}$. Einsetzen und vereinfachen liefert die Konjugierte

$$F^* : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad F^*(x^*) = \frac{1}{2} \|x^*\|_{X^*}^2.$$

- (ii) Sei B_X die Einheitskugel im normierten Raum X und setze $F = \delta_{B_X}$. Dann ist für $x^* \in X^*$

$$(\delta_{B_X})^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - \delta_{B_X}(x) = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle x^*, x \rangle_X = \|x^*\|_{X^*}.$$

Analog zeigt man unter Verwendung der Definition der Konjugierten im Dualraum und Folgerung 1.6, dass $(\delta_{B_{X^*}})^*(x) = \|x\|_X$ ist.

(iii) Sei X ein normierter Raum und setze $F(x) = \|x\|_X$. Für $x^* \in X^*$ unterscheiden wir nun zwei Fälle:

1. Fall: $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$. Dann gilt mit (1.1) für alle $x \in X$ dass $\langle x^*, x \rangle_X - \|x\|_X \leq 0$ ist. Weiterhin ist $\langle x^*, 0 \rangle = 0 = \|0\|_X$. Also gilt

$$F^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - \|x\|_X = 0.$$

2. Fall: $\|x^*\|_{X^*} > 1$. Nach Definition der Norm im Dualraum existiert dann ein $x_0 \in X$ mit $\langle x^*, x_0 \rangle_X > \|x_0\|_X$. Lassen wir daher $t \rightarrow \infty$ gehen in

$$0 < t(\langle x^*, x_0 \rangle_X - \|x_0\|_X) = \langle x^*, tx_0 \rangle_X - \|tx_0\|_X \leq F^*(x^*),$$

so erhalten wir $F^*(x^*) = \infty$

Zusammen ergibt dies $F^* = \delta_{B_{X^*}}$. Wie oben zeigt man analog, dass $(\|\cdot\|_{X^*})^* = \delta_{B_X}$ ist.

Wir notieren noch einige nützliche Rechenregeln.

Lemma 5.3. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich. Dann ist

(i) $(\alpha F)^* = \alpha F^* \circ (\alpha^{-1} \text{Id})$ für $\alpha > 0$;

(ii) $(F(\cdot + x_0) + \langle x_0^*, \cdot \rangle_X)^* = F^*(\cdot - x_0^*) - \langle \cdot - x_0^*, x_0 \rangle_X$ für alle $x_0 \in X, x_0^* \in X^*$;

(iii) $(F \circ A)^* = F^* \circ A^{-*}$ für $A \in L(Y, X)$ stetig invertierbar und $A^{-*} := (A^{-1})^*$.

Beweis. Die Regeln folgen direkt aus den Eigenschaften des Supremums.

Aussage (i) gilt wegen $\alpha > 0$ und

$$(\alpha F)^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\alpha \langle \alpha^{-1} x^*, x \rangle_X - \alpha F(x)) = \alpha \sup_{x \in X} (\langle \alpha^{-1} x^*, x \rangle_X - F(x)) = \alpha F^*(\alpha^{-1} x^*).$$

Aussage (ii) gilt wegen $\{x + x_0 : x \in X\} = X$ und

$$\begin{aligned} (F(\cdot + x_0) + \langle x_0^*, \cdot \rangle_X)^*(x^*) &= \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - F(x^* + x_0) - \langle x_0^*, x_0 \rangle_X \\ &= \sup_{x \in X} (\langle x^* - x_0^*, x + x_0 \rangle_X - F(x^* + x_0)) - \langle x^* - x_0^*, x_0 \rangle_X \\ &= \sup_{\tilde{x} = x + x_0, x \in X} (\langle x^* - x_0^*, \tilde{x} \rangle_X - F(\tilde{x})) - \langle x^* - x_0^*, x_0 \rangle_X \\ &= F^*(x^* - x_0^*) - \langle x^* - x_0^*, x_0 \rangle_X. \end{aligned}$$

Aussage (iii) gilt wegen $X = \text{ran } A$ und

$$\begin{aligned} (F \circ A)^*(y^*) &= \sup_{y \in Y} \langle y^*, A^{-1} Ay \rangle_Y - F(Ay) \\ &= \sup_{x = Ay, y \in Y} \langle A^{-*} y^*, x \rangle_X - F(x) = F^*(A^{-*} y^*). \end{aligned} \quad \square$$

Analog zu Lemma 4.6 zeigt man, dass sich auch die Fenchel-Konjugierte punktweise berechnen lässt; siehe z. B. [Ekeland und Témam 1999, Proposition IV.1.2].

Lemma 5.4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig, und sei $F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $1 \leq p < \infty$ wie in Lemma 3.3. Dann ist für $q = \frac{p}{p-1}$

$$F^* : L^q(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad F^*(u^*) = \int_{\Omega} f^*(u^*(x)) \, dx.$$

Die Definition der Fenchel-Konjugierten ist auf besondere Weise verträglich mit der des Subdifferentials.

Lemma 5.5. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Dann sind äquivalent für $x \in X$ und $x^* \in X^*$:

- (i) $\langle x^*, x \rangle_X = F(x) + F^*(x^*);$
- (ii) $x^* \in \partial F(x);$
- (iii) $x \in \partial F^*(x^*).$

Beweis. Gilt (i), so folgt aus der Definition von F^* als Supremum, dass für alle $\tilde{x} \in X$ gilt

$$(5.2) \quad \langle x^*, x \rangle_X - F(x) = F^*(x^*) \geq \langle x^*, \tilde{x} \rangle_X - F(\tilde{x}),$$

was nach Definition äquivalent ist zu $x^* \in \partial F(x)$. Umgekehrt ergibt Supremum über alle $\tilde{x} \in X$ auf beiden Seiten von (5.2)

$$\langle x^*, x \rangle_X \geq F(x) + F^*(x^*),$$

und zusammen mit der Fenchel-Young-Ungleichung (5.1) folgt (i).

Analog erhält man aus (i) zusammen mit Satz 5.1 für alle $\tilde{x}^* \in X^*$ die Ungleichung

$$\langle x^*, x \rangle_X - F^*(x^*) = F(x) = F^{**}(x) \geq \langle \tilde{x}^*, x \rangle - F^*(\tilde{x}^*),$$

woraus wie oben die Äquivalenz von (i) und (iii) folgt. □

Bemerkung. Ist X nicht reflexiv, so ist dabei $x \in \partial F^*(x^*) \subset X^{**}$ über die kanonische Injektion aufzufassen, d. h. via

$$\langle J(x), \tilde{x}^* - x^* \rangle_{X^*} = \langle \tilde{x}^* - x^*, x \rangle_X \leq F^*(\tilde{x}^*) - F^*(x^*) \quad \text{für alle } \tilde{x}^* \in X^*.$$

Gleichheit in der Fenchel-Young-Ungleichung (oder äquivalent die Subdifferentialinklusion (ii)) garantiert also in (iii) die Existenz eines Subgradienten in $X \subset X^{**}$ und nicht nur in X^{**} ; umgekehrt ist in (iii) die Existenz eines Subgradienten in $X \subset X^{**}$ notwendig für die Gleichheit (und damit (ii)). (Analoges gilt für $F : X^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $F^* : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.)

Lemma 5.5 spielt die Rolle des „Satz von der konvexen Umkehrfunktion“. Damit kann man insbesondere das Subdifferential einer komplizierten Norm durch das (einfachere) der konjugierten Indikatorfunktion ersetzen. Hat man zum Beispiel ein Problem der Form

$$(5.3) \quad \inf_{x \in X} F(x) + G(Ax),$$

so können wir G mit Hilfe von Satz 5.1 ersetzen durch die Definition von G^{**} und erhalten

$$\inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*).$$

Dürften wir nun \inf und \sup vertauschen, so könnten wir schreiben (mit $\inf F = -\sup(-F)$)

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*) &= \sup_{y^* \in Y^*} \inf_{x \in X} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*) \\ &= \sup_{y^* \in Y^*} - \left(\sup_{x \in X} -F(x) + \langle -A^* y^*, x \rangle_X \right) - G^*(y^*). \end{aligned}$$

Einsetzen der Definition von F^* ergibt dann das *duale Problem*

$$(5.4) \quad \sup_{y^* \in Y^*} -F^*(-A^* y^*) - G^*(y^*).$$

Als Nebeneffekt haben wir den Operator A zwischen den Funktionalen verschoben.

Der folgende Satz nutzt auf elegante Weise das Fermat-Prinzip, Summen- und Kettenregel sowie die Fenchel-Young-Gleichung, um hinreichende Bedingungen für die Vertauschbarkeit zu geben.

Satz 5.6 (Fenchel-Rockafellar). *Seien X, Y normierte Räume, $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $G : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig, und $A \in L(X, Y)$. Gelte weiterhin:*

- (i) *das primale Problem (5.3) hat eine Lösung $\bar{x} \in X$;*
- (ii) *es existiert ein $x_0 \in \text{dom } F \cap \text{dom}(G \circ A)$ so dass G stetig ist in Ax_0 .*

Dann hat das duale Problem (5.4) eine Lösung $\bar{y}^ \in Y^*$ und es gilt*

$$(5.5) \quad \min_{x \in X} F(x) + G(Ax) = \max_{y^* \in Y^*} -F^*(-A^* y^*) - G^*(y^*).$$

Weiterhin sind \bar{x} und \bar{y}^ Lösungen von (5.3) bzw. (5.4) genau dann, wenn gilt*

$$(5.6) \quad \begin{cases} -A^* \bar{y}^* \in \partial F(\bar{x}), \\ \bar{y}^* \in \partial G(A\bar{x}). \end{cases}$$

Beweis. Nach Satz 4.3 ist $\bar{x} \in X$ genau dann eine Lösung von (5.3), wenn $0 \in \partial(F + G \circ A)(\bar{x})$ gilt. Wegen Voraussetzung (ii) sind Satz 4.8 und Satz 4.9 anwendbar; wir erhalten also

$$0 \in \partial(F + G \circ A)(\bar{x}) = \partial F(\bar{x}) + A^* \partial G(A\bar{x})$$

und damit die Existenz eines $\bar{y}^* \in \partial G(A\bar{x})$ mit $-A^* \bar{y}^* \in \partial F(\bar{x})$, d. h. (5.6) ist erfüllt.

Aus (5.6) folgt nun mit Lemma 5.5 die Gleichheit in den Fenchel-Youngschen Ungleichungen für F und G , d. h.

$$(5.7) \quad \begin{cases} \langle -A^* \bar{y}^*, \bar{x} \rangle_X = F(\bar{x}) + F^*(-A^* \bar{y}^*), \\ \langle \bar{y}^*, A\bar{x} \rangle_Y = G(A\bar{x}) + G^*(\bar{y}^*). \end{cases}$$

Durch Summieren beider Gleichungen erhalten wir

$$(5.8) \quad F(\bar{x}) + G(A\bar{x}) = -F^*(-A^* \bar{y}^*) - G^*(\bar{y}^*).$$

Es bleibt zu zeigen, dass \bar{y}^* Lösung von (5.4) ist. Setze dafür

$$L : X \times Y^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad L(x, y^*) = F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*).$$

Dann gilt für alle $\bar{x} \in X$ und $\bar{y}^* \in Y^*$ stets

$$\sup_{y^* \in Y^*} L(\bar{x}, y^*) \geq L(\bar{x}, \bar{y}^*) \geq \inf_{x \in X} L(x, \bar{y}^*),$$

und damit (Infimum über alle \bar{x} in der ersten und Supremum über alle \bar{y}^* in der zweiten Ungleichung)

$$\inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} L(x, y^*) \geq \sup_{y^* \in Y^*} \inf_{x \in X} L(x, y^*).$$

Also ist

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) + G(A\bar{x}) &= \inf_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*) \\ &\geq \sup_{y^* \in Y^*} \inf_{x \in X} F(x) + \langle y^*, Ax \rangle_Y - G^*(y^*) \\ &= \sup_{y^* \in Y^*} -F^*(-A^* y^*) - G^*(y^*). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Gleichung (5.8) erhalten wir damit

$$-F^*(-A^* \bar{y}^*) - G^*(\bar{y}^*) = F(\bar{x}) + G(A\bar{x}) \geq \sup_{y^* \in Y^*} -F^*(-A^* y^*) - G^*(y^*),$$

d. h. \bar{y}^* ist Lösung von (5.4). Damit folgt aus (5.8) auch (5.5).

Sind schließlich $\bar{x} \in X$ und $\bar{y}^* \in Y^*$ Lösungen von (5.3) bzw. (5.4), so folgt aus (5.5) auch (5.8). Zusammen mit der produktiven Null erhalten wir daraus

$$0 = [F(\bar{x}) + F^*(-A^* \bar{y}^*) - \langle -A^* \bar{y}^*, \bar{x} \rangle_X] + [G(A\bar{x}) + G^*(\bar{y}^*) - \langle \bar{y}^*, A\bar{x} \rangle_Y].$$

Da beide Klammern wegen der Fenchel-Young-Ungleichung nicht-negativ sind, müssen sie einzeln verschwinden. Also gilt (5.7), und aus Lemma 5.5 folgt (5.6). \square

Man nennt (5.6) auch *Fenchel-Extremalitätsbedingungen*; mit Hilfe von Lemma 5.5 können wir aus ihnen weitere äquivalente Optimalitätsbedingungen erzeugen, indem wir eine oder beide Subdifferentialinklusionen invertieren. Dies werden wir später nutzen, um praktisch durchführbare Algorithmen für die Lösung von Optimierungsproblemen dieser Form herzuleiten.

MONOTONE OPERATOREN UND PROXIMALPUNKTE

6

Ist $\bar{x} \in X$ ein Minimierer der konvexen Funktion $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so gilt nach Satz 4.3 das Fermat-Prinzip $0 \in \partial F(\bar{x})$. Um daraus Informationen über (und später konkrete Verfahren zur Berechnung) von \bar{x} zu erhalten, müssen wir daher die (mengenwertige!) Abbildung $x \mapsto \partial F(x)$ untersuchen. Um technischen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen – und da wir die folgenden Resultate primär für numerische Algorithmen benötigen – beschränken wir uns in diesem und dem nächsten Kapitel auf den Fall, dass X ein Hilbertraum ist. Dies erlaubt, X^* mit X identifizieren; insbesondere identifizieren wir $\partial F(x) \subset X^*$ mit der Menge der entsprechenden Riesz-Repräsentanten in X .

6.1 MONOTONE OPERATOREN

Für zwei normierte Räume X, Y betrachten wir eine *mengenwertige Abbildung* $A : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, geschrieben auch $A : X \rightrightarrows Y$, und definieren

- den *Definitionsbereich* $\text{dom } A = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}$;
- das *Bild* $\text{ran } A = \bigcup_{x \in X} Ax$;
- die *Inverse* $A^{-1} : Y \rightrightarrows X$ durch $A^{-1}(y) = \{x \in X : y \in Ax\}$ für alle $y \in Y$. (Beachten Sie, dass $A^{-1}(y) = \emptyset$ möglich ist; für mengenwertige Abbildungen fallen also Inverse und Urbild – das ja stets existiert – zusammen.)

Für $A, B : X \rightrightarrows Y, C : Y \rightrightarrows Z$, und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir weiter

- $\lambda A : X \rightrightarrows Y$ durch $(\lambda A)(x) = \{\lambda y : y \in Ax\}$;
- $A + B : X \rightrightarrows Y$ durch $(A + B)(x) = \{y + z : y \in Ax, z \in Bx\}$;
- $C \circ A : X \rightrightarrows Z$ durch $(C \circ A)(x) = \{z : \text{es gibt } y \in Ax \text{ mit } z \in Cy\}$.

Eine mengenwertige Abbildung $A : X \rightrightarrows X$ heißt *monoton*, falls gilt

$$(x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2)_X \geq 0 \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in X, x_1^* \in Ax_1, x_2^* \in Ax_2.$$

Gilt Gleichheit nur für $x_1 = x_2$, so heißt A *streng monoton*.

Klarerweise ist die Identität $\text{Id} : X \rightrightarrows X, x \mapsto \{x\}$, monoton. Für eine konvexe Funktion $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist $\partial F : X \rightrightarrows X, x \mapsto \partial F(x)$ monoton: Sind $x_1, x_2 \in X$ und $x_1^* \in \partial F(x_1)$ und $x_2^* \in \partial F(x_2)$, so gilt nach Definition

$$\begin{aligned} (x_1^*, \tilde{x} - x_1) &\leq F(\tilde{x}) - F(x_1) && \text{für alle } \tilde{x} \in X, \\ (x_2^*, \tilde{x} - x_2) &\leq F(\tilde{x}) - F(x_2) && \text{für alle } \tilde{x} \in X, \end{aligned}$$

woraus nach Addition der ersten Ungleichung mit $\tilde{x} = x_2$ und der zweiten Ungleichung mit $\tilde{x} = x_1$ die Monotonie folgt. Ebenso sind für A, B monoton und $\lambda \geq 0$ auch λA und $A + B$ monoton. Wir werden aber noch eine stärkere Eigenschaft benötigen, die zusätzlich die Abgeschlossenheit von A garantiert: Wir nennen einen monotonen Operator $A : X \rightrightarrows X$ *maximal monoton*, wenn für $x \in X$ und $x^* \in X$ die Bedingung

$$(x^* - \tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X \geq 0 \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X, \tilde{x}^* \in Ax$$

impliziert, dass $x^* \in Ax$ ist. Für feste $x \in X$ und $x^* \in X$ besagt die Bedingung gerade, dass mit A auch die Erweiterung

$$\tilde{A} : X \rightrightarrows X, \quad \tilde{x} \mapsto \begin{cases} Ax \cup \{x^*\} & \text{falls } \tilde{x} = x, \\ A\tilde{x} & \text{falls } \tilde{x} \neq x, \end{cases}$$

monoton ist. Die Behauptung ist dann genau, dass dies keine echte Erweiterung darstellt. Beispielsweise ist

$$A : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \{1\} & \text{falls } t > 0, \\ \{0\} & \text{falls } t = 0, \\ \{-1\} & \text{falls } t < 0, \end{cases}$$

monoton aber nicht maximal monoton, da A eine echte Teilmenge des durch $\tilde{A}t = \text{sign}(t) = \partial(|\cdot|)(t)$ definierten monotonen Operators ist.

Aus der Definition folgen sofort einige nützliche Aussagen.

Lemma 6.1. *Ist $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton, dann ist es auch λA für alle $\lambda > 0$.*

Beweis. Seien $x, x^* \in X$ und gelte

$$0 \leq (x^* - \tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X = \lambda (\lambda^{-1}x^* - \lambda^{-1}\tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X, \tilde{x}^* \in \lambda Ax.$$

Da für $\tilde{x}^* \in \lambda Ax$ gilt $\lambda^{-1}\tilde{x}^* \in Ax$ und A maximal monoton ist, folgt daraus $\lambda^{-1}\tilde{x}^* \in A\tilde{x}$, d. h. $\tilde{x}^* \in \lambda A\tilde{x}$. Damit ist λA maximal monoton. \square

Lemma 6.2. *Ist $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton, dann ist A schwach–stark abgeschlossen, d. h. aus $x_n \rightharpoonup x$ und $Ax_n \ni x_n^* \rightarrow x^*$ folgt $x^* \in Ax$.*

Beweis. Für $\tilde{x} \in X$ und $\tilde{x}^* \in A\tilde{x}$ beliebig gilt wegen der Monotonie von A

$$0 \leq (x_n^* - \tilde{x}^*, x_n - \tilde{x})_X \rightarrow (x^* - \tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X$$

da x_n schwach und x_n^* stark in X konvergieren. Da A maximal monoton ist, folgt daraus $x^* \in Ax$. \square

Von zentraler Bedeutung für die Theorie der monotonen Operatoren ist der *Satz von Minty*.

Satz 6.3 (Minty). *Sei $A : X \rightrightarrows X$ monoton. Dann ist A maximal monoton genau dann, wenn $\text{Id} + A$ surjektiv ist.*

Beweis. Wir zeigen nur, dass diese Bedingung hinreichend ist; der Beweis der Notwendigkeit ist deutlich aufwendiger,¹ weshalb hierfür auf die Literatur verwiesen wird; siehe z. B. [Bauschke und Combettes 2011, Theorem 21.1].

Sei $\text{Id} + A$ surjektiv, und seien $x \in X$ und $x^* \in X$ mit

$$(6.1) \quad (x^* - \tilde{x}^*, x - \tilde{x})_X \geq 0 \quad \text{für alle } \tilde{x} \in X, \tilde{x}^* \in A\tilde{x}.$$

Nach Annahme existiert nun für $x + x^* \in X$ ein $z \in X$ und ein $z^* \in Az$ mit

$$(6.2) \quad x + x^* = z + z^* \in (\text{Id} + A)z.$$

Einsetzen von $(\tilde{x}, \tilde{x}^*) = (z, z^*)$ in (6.1) ergibt dann

$$0 \leq (x^* - z^*, x - z)_X = (z - x, x - z)_X = -\|x - z\|_X^2 \leq 0,$$

d. h. $x = z$. Aus (6.2) folgt dann auch $x^* = z^* \in Az = Ax$, und damit ist A maximal monoton. \square

Damit lässt sich nun zeigen, dass Subdifferentiale maximal monoton sind.

Folgerung 6.4. *Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig ist $\partial F : X \rightrightarrows X$ maximal monoton.*

¹Er verläuft analog zu dem Beweis von Folgerung 6.4 über die Konstruktion eines Funktionals F_A – der Fitzpatrick-Funktion – welches für A die selbe Rolle spielt wie F für ∂F .

Beweis. Wir zeigen, dass $\text{Id} + \partial F$ surjektiv ist. Für gegebenes $z \in X$ betrachten wir das Funktional $J : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$J(x) = \frac{1}{2} \|x - z\|_X^2 + F(x).$$

Da die quadrierte Norm als auch F eigentlich, konvex, unterhalbstetig und koerziv ist, ist auch J eigentlich, konvex, unterhalbstetig und koerziv. (Beachte, dass F als konvexe Funktion wegen Lemma 3.5 nach unten durch eine affine Funktion beschränkt ist und damit die quadrierte Norm für $\|x\|_X \rightarrow \infty$ garantiert „gewinnt“.) Nach Satz 3.6 existiert also ein $\bar{x} \in X$ mit $J(\bar{x}) = \min_{x \in X} J(x)$, für welches nach Satz 4.3 und Satz 4.8 gilt

$$0 \in \partial J(\bar{x}) = \{\bar{x} - z\} + \partial F(\bar{x}),$$

d. h. $z \in \{\bar{x}\} + \partial F(\bar{x})$. □

6.2 RESOLVENTEN UND PROXIMALPUNKTE

Wie wir im Beweis von Folgerung 6.4 gesehen haben, ist $\text{Id} + \partial F$ surjektiv; da die quadrierte Norm im Hilbertraum und damit J strikt konvex ist, ist der Minimierer und damit das Urbild sogar eindeutig. Also ist $(\text{Id} + \partial F)^{-1}$ einwertig, auch wenn ∂F dies nicht ist. Es besteht daher die Hoffnung, dieses Objekt anstelle des Subdifferentials – oder allgemeiner, eines monotonen Operators – für Algorithmen nutzen zu können.

Wir definieren daher für $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton die *Resolvente*

$$\mathcal{R}_A : X \rightrightarrows X, \quad \mathcal{R}_A(x) = (\text{Id} + A)^{-1}x,$$

und für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig die *Proximalpunktabbildung*

$$(6.3) \quad \text{prox}_F : X \rightarrow X, \quad \text{prox}_F(x) = \arg \min_{z \in X} \frac{1}{2} \|z - x\|_X^2 + F(z).$$

Da $w \in \mathcal{R}_{\partial F}(x)$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass w der eindeutige Minimierer (man sagt auch *Proximalpunkt*) dieser strikt konvexen Funktion ist, gilt

$$(6.4) \quad \text{prox}_F = (\text{Id} + \partial F)^{-1} = \mathcal{R}_{\partial F}.$$

Wir müssen noch zeigen, dass auch die Resolvente von beliebigen maximal monotonen Operators einwertig ist, d. h. die Schreibweise $\mathcal{R}_A : X \rightarrow X$ gerechtfertigt ist.

Lemma 6.5. *Sei $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton. Dann ist \mathcal{R}_A auf ganz X definiert und einwertig.*

Beweis. Da A maximal monoton ist, ist $\text{Id} + A$ surjektiv, woraus $\mathcal{R}_A = X$ folgt. Seien nun $x, z \in X$ beliebig und $x^* \in \mathcal{R}_A(x)$ und $z^* \in \mathcal{R}_A(z)$, d. h. es gilt $x \in x^* + Ax^*$ und $z \in z^* + Az^*$. Aus $x - x^* \in Ax^*$ und $z - z^* \in Az^*$ folgt mit der Monotonie von A , dass

$$(6.5) \quad \|x^* - z^*\|_X^2 \leq (x - z, x^* - z^*)_X$$

gilt. Ist $x = z$, so muss daher auch $x^* = z^*$ sein. Also ist \mathcal{R}_A einwertig. \square

Tatsächlich ist die Resolvente sogar Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$; solche Abbildungen nennt man auch *nichtexpansiv* (englisch: „nonexpansive“). Wir können sogar noch mehr zeigen: Eine Abbildung $T : X \rightarrow X$ heißt *stark nichtexpansiv* (englisch: „firmly nonexpansive“), wenn gilt

$$\|Tx - Tz\|_X^2 \leq (Tx - Tz, x - z)_X \quad \text{für alle } x, z \in X.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt natürlich sofort, dass stark nichtexpansive Abbildungen stets auch nichtexpansiv sind.

Lemma 6.6. *Sei $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton. Dann ist $\mathcal{R}_A : X \rightarrow X$ stark nichtexpansiv, und es gilt*

$$\|\mathcal{R}_A x - \mathcal{R}_A z\|_X^2 + \|(\text{Id} - \mathcal{R}_A)x - (\text{Id} - \mathcal{R}_A)z\|_X^2 \leq \|x - z\|_X^2 \quad \text{für alle } x, z \in X.$$

Beweis. Die starke Nichtexpansivität von \mathcal{R}_A haben wir bereits mit (6.5) gezeigt, woraus folgt

$$\begin{aligned} \|(\text{Id} - \mathcal{R}_A)x - (\text{Id} - \mathcal{R}_A)z\|_X^2 &= \|x - z\|_X^2 - 2(x - z, \mathcal{R}_A x - \mathcal{R}_A z)_X + \|\mathcal{R}_A x - \mathcal{R}_A z\|_X^2 \\ &\leq \|x - z\|_X^2 - \|\mathcal{R}_A x - \mathcal{R}_A z\|_X^2. \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung 6.7. *Für $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig ist $\text{prox}_F : X \rightarrow X$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$.*

Tatsächlich lassen sich Minimierer konvexer Funktionen auch als Proximalpunkte charakterisieren, indem man den folgende nützlichen Zusammenhang verwendet.

Lemma 6.8. *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig, und seien $x, x^* \in X$. Dann ist für beliebige $\gamma > 0$*

$$x^* \in \partial F(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{prox}_{\gamma F}(x + \gamma x^*).$$

Beweis. Mit Hilfe der Rechenregeln für mengenwertige Abbildungen sieht man, dass gilt

$$\begin{aligned} x^* \in \partial F(x) &\Leftrightarrow x + \gamma x^* \in (\text{Id} + \gamma \partial F)(x) \\ &\Leftrightarrow x \in (\text{Id} + \gamma \partial F)^{-1}(x + \gamma x^*) \\ &\Leftrightarrow x = \text{prox}_{\gamma F}(x + \gamma x^*). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei $\gamma \partial F = \partial(\gamma F)$ nach Lemma 4.7 (ii) und damit $\text{prox}_{\gamma F} = \mathcal{R}_{\gamma \partial F}$ verwendet. \square

Wendet man diese Umformulierung auf das Fermat-Prinzip $0 \in \partial F(\bar{x})$ an, erhält man sofort das folgende Resultat.

Folgerung 6.9. *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig und $\gamma > 0$ beliebig. Dann ist $\bar{x} \in \text{dom } F$ ein Minimierer von F genau dann, wenn gilt*

$$\bar{x} = \text{prox}_{\gamma F}(\bar{x}).$$

Damit liefert uns die Proximalpunkt-Abbildung eine Möglichkeit, Minimierer konvexer Funktionen statt durch (explizite) Mengeninklusion durch eine (implizite) Gleichung zu charakterisieren.

Weiter erhält man daraus eine Verallgemeinerung der orthogonalen Zerlegung von Vektorräumen.

Satz 6.10 (Moreau-Zerlegung). *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Dann gilt für alle $x \in X$*

$$x = \text{prox}_F(x) + \text{prox}_{F^*}(x).$$

Beweis. Setze $w = \text{prox}_F(x)$. Dann folgt aus Lemma 6.8 und Lemma 5.5, dass

$$\begin{aligned} w = \text{prox}_F(x) &\Leftrightarrow x - w \in \partial F(x) \\ &\Leftrightarrow x \in \partial F^*(x - w) \\ &\Leftrightarrow x - w = \text{prox}_{F^*}(x). \end{aligned} \quad \square$$

Folgende Rechenregeln werden nützlich sein.

Lemma 6.11. *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig.*

(i) *Für $\lambda \neq 0$ und $z \in X$ gilt mit $H(x) = F(\lambda x + z)$*

$$\text{prox}_H(x) = \lambda^{-1}(\text{prox}_{\lambda^2 F}(\lambda x + z) - z).$$

(ii) *Für $\gamma > 0$ gilt*

$$\text{prox}_{\gamma F^*}(x) = x - \gamma \text{prox}_{\gamma^{-1} F}(\gamma^{-1} x).$$

(iii) *Für $G : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig gilt mit $H(x, y) = F(x) + G(y)$*

$$\text{prox}_{\gamma H}(x, y) = \begin{pmatrix} \text{prox}_{\gamma F}(x) \\ \text{prox}_{\gamma G}(y) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zu (i): Nach Definition ist

$$\text{prox}_H(x) = \arg \min_{w \in X} \frac{1}{2} \|w - x\|_X^2 + F(\lambda w + z) =: \bar{w}.$$

Mit der Substitution $v = \lambda w + z$ folgt wegen $\min_{w \in X} G(w) = \min_{v \in X} G(v)$ für alle G

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \arg \min_{v \in X} \frac{1}{2} \|\lambda^{-1}(v - z) - x\|_X^2 + F(v) \\ &= \arg \min_{v \in X} \frac{1}{2\lambda^2} \|v - (\lambda x + z)\|_X^2 + F(v) \\ &= \arg \min_{v \in X} \frac{1}{2} \|v - (\lambda x + z)\|_X^2 + \lambda^2 F(v) \\ &= \text{prox}_{\lambda^2 F}(\lambda x + z). \end{aligned}$$

Also ist $\bar{w} = \lambda^{-1}(\bar{v} - z)$ der gesuchte Minimierer.

Zu (ii): Aus der Moreau-Zerlegung, Lemma 5.3 (i), und (i) für $\lambda = \gamma^{-1}$ und $z = 0$, folgt

$$\begin{aligned} \text{prox}_{\gamma F}(x) &= x - \text{prox}_{(\gamma F)^*}(x) \\ &= x - \text{prox}_{\gamma F^* \circ (\gamma^{-1} \text{Id})}(x) \\ &= x - \gamma \text{prox}_{\gamma(\gamma^{-2} F^*)}(\gamma^{-1} x). \end{aligned}$$

Anwenden auf F^* unter Verwendung von $F^{**} = F$ liefert die Aussage.

Zu (iii): Nach Definition der Norm auf $X \times Y$ gilt

$$\begin{aligned} \text{prox}_{\gamma H}(x, y) &= \arg \min_{(u, v) \in X \times Y} \frac{1}{2} \|(u, v) - (x, y)\|_{X \times Y}^2 + \gamma H(u, v) \\ &= \arg \min_{u \in X, v \in Y} \left(\frac{1}{2} \|u - x\|_X^2 + \gamma F(u) \right) + \left(\frac{1}{2} \|v - y\|_Y^2 + \gamma G(v) \right). \end{aligned}$$

Da keine gemischten Terme in u und v auftreten, können die Klammern separat minimiert werden. Also ist $\text{prox}_{\gamma H}(x, y) = (\bar{u}, \bar{v})$ mit

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \arg \min_{u \in X} \frac{1}{2} \|u - x\|_X^2 + \gamma F(u) = \text{prox}_{\gamma F}(x), \\ \bar{v} &= \arg \min_{v \in Y} \frac{1}{2} \|v - y\|_Y^2 + \gamma G(v) = \text{prox}_{\gamma G}(y). \end{aligned} \quad \square$$

Das Ausrechnen von Proximalpunkten ist in der Regel schwierig, denn die Auswertung von prox_F enthält ja bereits die Minimierung von F . In manchen Fällen kann man aber eine geschlossene Formel angeben.

Beispiel 6.12. Wir betrachten zuerst $X = \mathbb{R}$.

- (i) $F(t) = \frac{1}{2}|t|^2$, d. h. $\partial F(t) = \{t\}$ und damit ist $\text{prox}_{\gamma F}(t) = (1 + \gamma)^{-1}t$.
- (ii) $F(t) = |t|$, d. h. $\partial F(t) = \text{sign}(t)$; siehe (4.4). Also ist $s := \text{prox}_{\gamma F}(t) = (\text{Id} + \gamma \text{sign})^{-1}(t)$ genau dann, wenn $t \in \{s\} + \gamma \text{sign}(s)$ ist. Angenommen, für gegebenes t gelte diese Inklusion für ein \bar{s} . Wir machen nun eine Fallunterscheidung.
 1. Fall $\bar{s} > 0$. Dies impliziert $t = \bar{s} + \gamma$, d. h. $\bar{s} = t - \gamma$ und damit $t > \gamma$.
 2. Fall $\bar{s} < 0$. Dies impliziert $t = \bar{s} - \gamma$, d. h. $\bar{s} = t + \gamma$ und damit $t < -\gamma$.
 3. Fall $\bar{s} = 0$. Dies impliziert $t \in \gamma[-1, 1] = [-\gamma, \gamma]$.

Da die so erhaltenen Bedingungen an t disjunkt und vollständig sind, erhalten wir

$$\text{prox}_{\gamma F}(t) = \begin{cases} t - \gamma & \text{falls } t > \gamma, \\ 0 & \text{falls } t \in [-\gamma, \gamma], \\ t + \gamma & \text{falls } t < -\gamma. \end{cases}$$

Diese Abbildung wird auch als *soft-shrinkage*-Operator bezeichnet.

- (iii) $F(t) = \delta_{[-1, 1]}(t)$. Nach Beispiel 5.2 (iii) gilt $F^*(t) = |t|$, und daraus erhalten wir mit Lemma 6.11 (ii)

$$\begin{aligned} \text{prox}_{\gamma F}(t) &= t - \gamma \text{prox}_{\gamma^{-1}F^*}(\gamma^{-1}t) \\ &= \begin{cases} t - \gamma(\gamma^{-1}t - \gamma^{-1}) & \text{falls } \gamma^{-1}t > \gamma^{-1}, \\ t - 0 & \text{falls } \gamma^{-1}t \in [-\gamma^{-1}, \gamma^{-1}], \\ t - \gamma(\gamma^{-1}t + \gamma^{-1}) & \text{falls } \gamma^{-1}t < -\gamma^{-1} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 1, \\ t & \text{falls } t \in [-1, 1], \\ -1 & \text{falls } t < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Proximalpunktabbildung ist also – unabhängig von γ – die Projektion von t auf $[-1, 1]$.

Beispiel 6.13. Die Beispiele 6.12 können auf $X = \mathbb{R}^N$ (versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt) verallgemeinert werden, indem man N mal Lemma 6.11 (iii) anwendet. Man erhält dann komponentenweise

- (i) für $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$:

$$[\text{prox}_{\gamma F}(x)]_i = \left(\frac{1}{1 + \gamma} \right) x_i, \quad 1 \leq i \leq N;$$

(ii) für $F(x) = \|x\|_1$:

$$[\text{prox}_{\gamma F}(x)]_i = (|x_i| - \gamma)^+ \text{sign}(x_i), \quad 1 \leq i \leq N;$$

(iii) für $F(x) = \delta_{B_\infty}(x)$:

$$\begin{aligned} [\text{prox}_{\gamma F}(x)]_i &= x_i - (x_i - 1)^+ - (x_i + 1)^- \\ &= \frac{x_i}{\max\{1, |x_i|\}}, \quad 1 \leq i \leq N; \end{aligned}$$

mit der Schreibweise $(t)^+ = \max\{t, 0\}$ und $(t)^- := \min\{t, 0\}$.

Viele weitere Beispiele findet man in [Parikh und Boyd 2014, § 6.5].

Da für konvexe Integralfunktionale nach Lemma 4.6 das Subdifferential punktweise ausgewertet werden kann, gilt dasselbe auch für die Definition (6.4) der Proximalpunktabbildung.

Folgerung 6.14. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig und $F : L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ wie in Lemma 3.3. Dann ist für alle $\gamma > 0$ und $u \in L^2(\Omega)$

$$[\text{prox}_{\gamma F}(u)](x) = \text{prox}_{\gamma f}(u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Beispiel 6.15. Durch Fallunterscheidung analog zu Beispiel 6.12 zeigt man für allgemeine Hilberträume X :

(i) Ist $F = \frac{1}{2} \|\cdot\|_X^2 = \frac{1}{2} (\cdot, \cdot)_X$, so ist

$$\text{prox}_{\gamma F}(x) = \left(\frac{1}{1 + \gamma} \right) x.$$

(ii) Ist $F = \|\cdot\|_X$, so zeigt man analog mit Fallunterscheidung nach Satz 4.5

$$\text{prox}_{\gamma F}(x) = \left(1 - \frac{\gamma}{\|x\|_X} \right)^+ x.$$

(iii) Ist $F = \delta_C$ für $C \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen, so ist nach Definition

$$\text{prox}_{\gamma F}(x) = \text{proj}_C(x) := \arg \min_{z \in C} \|z - x\|_X$$

die *Projektion* von x auf C ; die Proximalpunktabbildung verallgemeinert also die metrische Projektion auf (konvexe) Mengen. Projektionsformeln bzw. -verfahren für verschiedene Klassen von Mengen sind in [Cegielski 2012, Kapitel 4.1] aufgeführt.

6.3 MOREAU–YOSIDA-REGULARISIERUNG

Bevor wir zu Algorithmen für die Minimierung konvexer Funktionen kommen, betrachten wir noch eine weitere Möglichkeit, Optimalitätsbedingungen mit Hilfe von Proximalpunkt-abbildungen umzuformulieren. Dies ist zwar keine äquivalente Umformung mehr, bildet aber die Brücke zu den Newton-artigen Verfahren im letzten Kapitel.

Sei $A : X \rightrightarrows X$ ein maximal monotoner Operator und $\gamma > 0$. Dann ist die *Yosida-Approximation* von A definiert durch

$$A_\gamma := \frac{1}{\gamma} (\text{Id} - \mathcal{R}_{\gamma A}).$$

Insbesondere gilt für das Subdifferential einer eigentlichen, konvexen und unterhalbstetigen Funktion $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$(\partial F)_\gamma := \frac{1}{\gamma} (\text{Id} - \text{prox}_{\gamma F}).$$

Nach Folgerung 6.7 ist die Yosida-Approximation also stets Lipschitz-stetig mit Konstante $L = \gamma^{-1}$.

Eine andere Sichtweise erlaubt die folgende Definition. Für eine eigentliche, konvexe und unterhalbstetige Funktion $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\gamma > 0$ ist die *Moreau-Hülle*² von F definiert durch

$$F_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf_{z \in X} \frac{1}{2\gamma} \|z - x\|_X^2 + F(z).$$

Vergleich mit der Definition (6.3) der Proximalpunktabbildung liefert

$$(6.6) \quad F_\gamma(x) = \frac{1}{2\gamma} \|\text{prox}_{\gamma F}(x) - x\|_X^2 + F(\text{prox}_{\gamma F}(x)).$$

(Beachte, dass sich der Minimierer nicht ändert, wenn das Funktional mit $\gamma > 0$ multipliziert wird.) Also ist F_γ in der Tat wohldefiniert und einwertig.

Der nächste Satz stellt den Zusammenhang zwischen den beiden Definitionen her und rechtfertigt damit den Begriff *Moreau–Yosida-Regularisierung*.

Satz 6.16. *Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Dann ist F_γ für alle $\gamma > 0$ Fréchet-differenzierbar, und es gilt*

$$\nabla(F_\gamma) = (\partial F)_\gamma.$$

²nicht zu verwechseln mit der *konvexen* Hülle F^Γ !

Beweis. Seien $x, y \in X$ beliebig und $x^* = \text{prox}_{\gamma F}(x)$ sowie $y^* = \text{prox}_{\gamma F}(y)$. Wir zeigen zunächst, dass gilt

$$(6.7) \quad \frac{1}{\gamma} (y^* - x^*, x - x^*)_X + F(x^*) \leq F(y^*).$$

Dafür betrachten wir für $t \in (0, 1)$ den Punkt $x_t^* := ty^* + (1-t)x^*$. Aus der Definition des Proximalpunktes x^* als Minimierer und der Konvexität von F folgt

$$\begin{aligned} F(x^*) &\leq F(x_t^*) + \frac{1}{2\gamma} \|x_t^* - x\|_X^2 - \frac{1}{2\gamma} \|x^* - x\|_X^2 \\ &\leq tF(y^*) + (1-t)F(x^*) - \frac{t}{\gamma} (x - x^*, y^* - x^*)_X + \frac{t^2}{2\gamma} \|x^* - y^*\|_X^2. \end{aligned}$$

Umstellen, Division durch $t > 0$ und Grenzübergang $t \rightarrow 0$ ergibt dann die gewünschte Ungleichung. Zusammen mit (6.6) folgt daraus

$$\begin{aligned} F_\gamma(y) - F_\gamma(x) &= F(y^*) - F(x^*) + \frac{1}{2\gamma} (\|y - y^*\|_X^2 - \|x - x^*\|_X^2) \\ &\geq \frac{1}{2\gamma} (2(y^* - x^*, x - x^*)_X + \|y - y^*\|_X^2 - \|x - x^*\|_X^2) \\ &= \frac{1}{2\gamma} (2(y - x, x - x^*)_X + \|y - y^* - x + x^*\|_X^2) \\ &\geq \frac{1}{\gamma} (y - x, x - x^*)_X. \end{aligned}$$

Analog zeigt man durch Vertauschen der Rollen von x^* und y^* in (6.7), dass gilt

$$F_\gamma(y) - F_\gamma(x) \leq \frac{1}{\gamma} (y - x, y - y^*)_X.$$

Kombination dieser beiden Ungleichungen liefert dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq F_\gamma(y) - F_\gamma(x) - \frac{1}{\gamma} (y - x, x - x^*)_X \\ &\leq \frac{1}{\gamma} (y - x, (y - y^*) - (x - x^*))_X \\ &\leq \frac{1}{\gamma} (\|y - x\|_X^2 - \|y^* - x^*\|_X^2) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \|y - x\|_X^2, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die starke Nichtexpansivität der Proximalpunktabbildung (Lemma 6.6) verwendet haben.

Setzen wir nun $y = x + h$ für $h \in X$ beliebig, so folgt daraus

$$0 \leq \frac{F_\gamma(x+h) - F_\gamma(x) - (\gamma^{-1}(x - x^*), h)_X}{\|h\|_X} \leq \frac{1}{\gamma} \|h\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0,$$

d. h. F_γ ist Fréchet-differenzierbar, und der Gradient ist genau $\frac{1}{\gamma}(x - x^*) = (\partial F)_\gamma$. \square

Da F_γ zusätzlich konvex ist (siehe z. B. [Bauschke und Combettes 2011, Prop. 12.15]), gilt also die eingängige Gleichung $\partial(F_\gamma) = (\partial F)_\gamma$.

Beispiel 6.17. Wir betrachten wieder für $X = \mathbb{R}^N$ die Indikatorfunktion $F := \delta_{B_\infty}$. Nach Beispiel 6.13 (iii) ist die Proximalpunktabbildung gegeben durch die komponentenweise Projektion auf $[-1, 1]$, und damit ist

$$[(\partial\delta_{B_\infty})_\gamma(x)]_i = \frac{1}{\gamma} \left(x_i - (x_i - (x_i - 1)^+ - (x_i + 1)^-) \right) = \frac{1}{\gamma} (x_i - 1)^+ + \frac{1}{\gamma} (x_i + 1)^-.$$

Analog folgt durch Einsetzen wegen $\text{prox}_{\gamma F}(x) \in B_\infty$ und $((x + 1)^+, (x - 1)^-)_X = 0$

$$(\delta_{B_\infty})_\gamma(x) = \frac{1}{2\gamma} \|(x - 1)^+\|_2^2 + \frac{1}{2\gamma} \|(x + 1)^-\|_2^2,$$

was genau der aus der nichtlinearen Optimierung bekannten Penalty-Funktion für die Ungleichungsnebenbedingungen $x - 1 \leq 0$ und $x + 1 \geq 0$ entspricht.

Ein weiterer Zusammenhang besteht zwischen der Moreau-Hülle und der Fenchel-Konjugierten.

Satz 6.18. Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig. Dann gilt für alle $\gamma > 0$ und $x^* \in X$

$$(F_\gamma)^*(x^*) = F^*(x^*) + \frac{\gamma}{2} \|x^*\|_X^2.$$

Beweis. Die Definition der Fenchel-Konjugierten im Hilbertraum und der Moreau-Hülle ergibt direkt

$$\begin{aligned} (F_\gamma)^*(x^*) &= \sup_{x \in X} \left((x^*, x)_X - \inf_{z \in X} \left(\frac{1}{2\gamma} \|x - z\|_X^2 + F(z) \right) \right) \\ &= \sup_{x \in X} \left((x^*, x)_X + \sup_{z \in X} \left(-\frac{1}{2\gamma} \|x - z\|_X^2 - F(z) \right) \right) \\ &= \sup_{z \in X} \left((x^*, z)_X - F(z) + \sup_{x \in X} \left((x^*, x - z)_X - \frac{1}{2\gamma} \|x - z\|_X^2 \right) \right) \\ &= F^*(x^*) + \left(\frac{1}{2\gamma} \|\cdot\|_X^2 \right)^*(x^*), \end{aligned}$$

da unabhängig von der Wahl von $z \in X$ das innere Supremum stets über den ganzen Raum läuft. Aus Beispiel 5.2 (i) und Lemma 5.3 (i) folgt nun die Aussage. \square

Wir skizzieren kurz die Relevanz für die Optimierung. Ist $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konvex, so erfüllt jeder Minimierer das Fermat-Prinzip $0 \in \partial F(\bar{x})$, welches wir äquivalent schreiben können als $\bar{x} \in \partial F^*(0)$. Ersetzen wir ∂F^* durch die Yosida-Approximation $(\partial F^*)_\gamma$, so erhalten wir eine regularisierte Bedingung

$$x_\gamma = (\partial F^*)_\gamma(0) = -\frac{1}{\gamma} \text{prox}_{\gamma F^*}(0).$$

Dies ist nun eine *explizite* und sogar Lipschitz-stetige Relation. Zwar ist x_γ selber kein Minimierer von F , wegen der Konvexität von F_γ ist $x_\gamma \in (\partial F^*)_\gamma(0) = \partial(F_\gamma^*)(0)$ aber äquivalent mit

$$0 \in \partial(F_\gamma^*)^*(x_\gamma) = \partial(F^{**} + \frac{\gamma}{2}\|\cdot\|_{\bar{X}}^2)(x_\gamma) = \partial(F + \frac{\gamma}{2}\|\cdot\|_{\bar{X}}^2)(x_\gamma),$$

d. h. x_γ ist der (wegen der strikten Konvexität der quadrierten Norm) einzige Minimierer von $F + \frac{\gamma}{2}\|\cdot\|_{\bar{X}}^2$. Daraus folgt auch (ähnlich wie im Beweis von Satz 2.1) $x_\gamma \rightarrow \bar{x}$ für $\gamma \rightarrow 0$. In der Praxis scheitert dieses Vorgehen an der Berechnung von F^* , weshalb man es mit dem im nächsten Kapitel vorgestellten Splitting-Ansatz kombiniert.

PROXIMALPUNKT- UND SPLITTING-VERFAHREN

7

Wir beschäftigen uns jetzt mit Verfahren zur numerischen Berechnung von Minimierern von Funktionalen $J : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ der Form

$$J(x) := F(x) + G(x)$$

für F, G konvex aber nicht differenzierbar. Die Schwierigkeit dabei ist, dass im Gegensatz zu differenzierbaren Funktionen das Äquivalent zum Gradientenabstieg, die Iteration

$$x^{k+1} \in x^k - \tau_k \partial J(x^k),$$

nicht praktikabel ist, da ein beliebiges Element im Subdifferential keine Abstiegsrichtung sein muss; dies kann man nur für den Subgradienten minimaler Norm garantieren – und für J erhält man diesen auch nicht aus den entsprechenden Subgradienten von F und G . Wir ändern daher unseren Blickwinkel und suchen eine Nullstelle der mengenwertigen Abbildung $x \mapsto \partial J(x) \subset X^* \equiv X$ durch Fixpunktiteration.

7.1 PROXIMALPUNKT-VERFAHREN

Wir haben gesehen, dass eine Nullstelle \bar{x} von $\partial F : X \rightrightarrows X$ charakterisiert werden kann als Fixpunkt von $\mathcal{R}_{\gamma \partial F} = \text{prox}_{\gamma F}$ für beliebiges $\gamma > 0$. Dies legt nahe, diese durch eine Fixpunktiteration zu berechnen: Wähle $x^0 \in X$ und setze für eine geeignete Folge $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$$(7.1) \quad x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k F}(x^k).$$

Wie bei der klassischen Fixpunktiteration müssen wir nun nachweisen, dass die Fixpunktabbildung in einem passenden Sinne kontrahierend wirkt – in unserem Fall, stark nichtexpansiv. Dies ist nach Lemma 6.7 für Resolventen maximal monotoner Operatoren stets der Fall, woraus die Konvergenz der entsprechenden Fixpunktiteration und insbesondere des Proximalpunkt-Verfahrens (7.1) folgt. Für den späteren Gebrauch betrachten wir gleich die allgemeine Version.

Satz 7.1. Sei $A : X \rightrightarrows X$ maximal monoton, und sei $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 = \infty$. Erfüllt $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ die Rekursion

$$x^{k+1} = \mathcal{R}_{\gamma_k A} x^k,$$

dann konvergiert $x^k \rightarrow \bar{x}$ mit $0 \in A\bar{x}$.

Beweis. Aus der Rekursion $x^{k+1} = \mathcal{R}_{\gamma_k A} x^k = (\text{Id} + \gamma_k A)^{-1} x^k$ folgt

$$w^k := \gamma_k^{-1}(x^k - x^{k+1}) \in Ax^{k+1}$$

und damit auch $x^{k+1} - x^{k+2} = \gamma_{k+1} w^{k+1}$. (Der Vektor w^k spielt die Rolle des Residuums in der verallgemeinerten Gleichung $0 \in Ax$.) Da A monoton ist, gilt für $\gamma_{k+1} > 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma_{k+1}^{-1} (w^k - w^{k+1}, x^{k+1} - x^{k+2})_X \\ &= (w^k - w^{k+1}, w^{k+1})_X \\ &= (w^k, w^{k+1})_X - \|w^{k+1}\|_X^2 \\ &\leq \|w^{k+1}\|_X (\|w^k\|_X - \|w^{k+1}\|_X). \end{aligned}$$

Also ist die (nicht-negative) Folge $\{\|w^k\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und daher konvergent (zumindest solange $w^{k+1} \neq 0$ gilt, aber andernfalls ist wegen $w^{k+1} \in Ax^{k+2}$ bereits x^{k+2} die gesuchte Nullstelle.)

Sei nun $x^* \in X$ eine Nullstelle von A , d. h. $0 \in Ax^*$. Dann ist $x^* = \mathcal{R}_{\gamma A} x^*$ für alle $\gamma > 0$. Aus Lemma 6.6 folgt mit $(\text{Id} - \mathcal{R}_{\gamma A})x^k = x^k - x^{k+1} = \gamma_k w^k$

$$\begin{aligned} (7.2) \quad \|x^{k+1} - x^*\|_X^2 &= \|\mathcal{R}_{\gamma_k A} x^k - \mathcal{R}_{\gamma_k A} x^*\|_X^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|_X^2 - \|(\text{Id} - \mathcal{R}_{\gamma_k A})x^k - (\text{Id} - \mathcal{R}_{\gamma_k A})x^*\|_X^2 \\ &= \|x^k - x^*\|_X^2 - \gamma_k^2 \|w^k\|_X^2, \end{aligned}$$

Also ist $\{\|x^k - x^*\| : X\}_{k \in \mathbb{N}}$ für jede Nullstelle x^* monoton fallend (man nennt solche Folgen *Féjer-monoton*) und damit beschränkt. Also ist auch $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt und hat daher eine schwach konvergente Teilfolge $x^{k_l} \rightarrow \bar{x}$.

Aus (7.2) folgt ausserdem

$$\|x^{k+1} - x^*\|_X^2 \leq \|x^0 - x^*\|_X^2 - \sum_{j=0}^k \gamma_j^2 \|w^j\|_X^2.$$

Die (monoton wachsende) Partialsummenfolge ist also beschränkt, und deshalb konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 \|w^k\|_X^2$. Da die Folge $\{\gamma_k^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ nach Annahme nicht summierbar ist, muss $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|w^k\|_X^2 = 0$ gelten. Aus der Konvergenz von $\{\|w^k\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ folgt damit $w^k \rightarrow 0$. Insbesondere gilt $Ax^{k_l+1} \ni w^{k_l} \rightarrow 0$ für $x^{k_l+1} \rightarrow \bar{x}$, und aus der Abgeschlossenheit von maximal monotonen Operatoren (Folgerung 6.2) folgt dann $0 \in A\bar{x}$, d. h. jeder schwache Häufungspunkt von $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullstelle von A .

Wir zeigen schließlich, dass die gesamte Folge $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Seien \bar{x} und \hat{x} schwache Häufungspunkte und damit Nullstellen von A . Dann sind wegen der Féjer-Monotonie von $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sowohl $\{\|x^k - \bar{x}\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ als auch $\{\|x^k - \hat{x}\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt und daher konvergent. Also konvergiert auch

$$(x^k, \bar{x} - \hat{x})_X = \frac{1}{2} (\|x^k - \hat{x}\|_X^2 - \|x^k - \bar{x}\|_X^2 + \|\bar{x}\|_X^2 - \|\hat{x}\|_X^2) \rightarrow c \in \mathbb{R}.$$

Da \bar{x} schwacher Häufungspunkt ist, existiert eine Teilfolge $\{x^{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x^{k_n} \rightharpoonup \bar{x}$; ebenso existiert eine Teilfolge $\{x^{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ mit $x^{k_m} \rightharpoonup \hat{x}$. Also ist

$$(\bar{x}, \bar{x} - \hat{x})_X = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{k_n}, \bar{x} - \hat{x})_X = c = \lim_{m \rightarrow \infty} (x^{k_m}, \bar{x} - \hat{x})_X = (\hat{x}, \bar{x} - \hat{x})_X,$$

und damit

$$0 = \|\bar{x} - \hat{x}\|_X^2,$$

d. h. $\bar{x} = \hat{x}$. Jede Teilfolge hat daher den selben Grenzwert, und deshalb konvergiert die gesamte Folge $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen diesen. \square

7.2 EXPLIZITES SPLITTING

Für Funktionale der Form $J(x) = F(x) + G(x)$ ist das Proximalpunkt-Verfahren in der Regel nicht praktikabel, da die Auswertung von prox_J nicht wesentlich einfacher ist als das ursprüngliche Problem – selbst wenn prox_F und prox_G eine geschlossene Darstellung haben. Anstatt die Proximalpunkt-Formulierung auf $0 \in \partial J(\bar{x})$ anzuwenden, verwendet man daher zuerst die Summenregel und erhält dadurch ein $\bar{p} \in X$ mit

$$(7.3) \quad \begin{cases} \bar{p} \in \partial F(\bar{x}), \\ -\bar{p} \in \partial G(\bar{x}). \end{cases}$$

Man kann nun eine oder beide der Subdifferentialinklusionen durch eine Proximalpunkt-abbildung ersetzen.

In expliziten Splitting-Verfahren – auch *forward-backward splitting* genannt – wendet man Lemma 6.8 nur auf die zweite Inklusion in (7.3) an:

$$\begin{cases} \bar{p} \in \partial F(\bar{x}), \\ \bar{x} = \text{prox}_{\gamma G}(\bar{x} - \gamma \bar{p}). \end{cases}$$

Die zugehörige Fixpunkt-Iteration ist dann

1. Wähle $p^k \in \partial F(x^k)$ (mit minimaler Norm).
2. Setze $x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k G}(x^k - \gamma_k p^k)$.

Dies ist im Allgemeinen kein praktikables Verfahren, da die Bestimmung eines Subgradienten minimaler Norm aufwendig ist. Eine Ausnahme ist jedoch, wenn F zusätzlich differenzierbar ist: Dann gilt (im Hilbertraum) $\partial F(x) = \{\nabla F(x)\}$. In diesem Fall erhalten wir das *Proximal-Gradientenverfahren*

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k G}(x^k - \gamma_k \nabla F(x^k))$$

(im Spezialfall $G = \delta_C$ – d. h. $\text{prox}_{\gamma G}(x) = \text{proj}_C(x)$ – auch *projiziertes Gradientenverfahren* genannt).

Um nun analog zum Proximalpunkt-Verfahren Konvergenz zu zeigen, müssen wir die Lipschitz-Stetigkeit des Gradienten voraussetzen (da wir für F ja keine Resolvente verwenden, die automatisch stark nichtexpansiv und damit Lipschitz-stetig ist).

Lemma 7.2. *Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar mit Lipschitz-stetigem Gradienten. Dann gilt*

$$F(y) \leq F(x) + (\nabla F(x), y - x)_X + \frac{L}{2} \|x - y\|_X^2 \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Beweis. Aus der Gâteaux-Differenzierbarkeit von F folgt

$$\frac{d}{dt} F(x + t(y - x)) = (\nabla F(x + t(y - x)), y - x)_X \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Integration über t auf $[0, 1]$ liefert damit

$$\int_0^1 (\nabla F(x + t(y - x)), y - x)_X dt = F(y) - F(x).$$

Zusammen mit der produktiven Null erhalten wir dann unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Lipschitz-Stetigkeit

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x) + (\nabla F(x), y - x)_X + \int_0^1 (\nabla F(x + t(y - x)) - \nabla F(x), y - x)_X dt \\ &\leq F(x) + (\nabla F(x), y - x)_X + \int_0^1 \|\nabla F(x + t(y - x)) - \nabla F(x)\|_X \|x - y\|_X dt \\ &\leq F(x) + (\nabla F(x), y - x)_X + \int_0^1 Lt \|x - y\|_X^2 dt \\ &= F(x) + (\nabla F(x), y - x)_X + \frac{L}{2} \|x - y\|_X^2. \quad \square \end{aligned}$$

Für genügend kleine Schrittweiten kann man damit die Konvergenz des Proximal-Gradientenverfahrens zeigen.

Satz 7.3. Seien $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eigentlich, konvex, und unterhalbstetig. Sei zusätzlich F Gâteaux-differenzierbar mit Lipschitz-stetigem Gradienten. Gilt $0 < \gamma_{\min} \leq \gamma_k \leq L^{-1}$, dann konvergiert $x^k \rightarrow \bar{x}$ mit $0 \in \partial J(\bar{x})$.

Beweis. Wir argumentieren ähnlich wie im Beweis von Satz 7.1, wobei wir die Monotonie der Folge der Residuumsnormen $w^k \in Ax^{k+1}$ durch die der Funktionswerte $J(x^k)$ ersetzen. Wir definieren dafür $T_\gamma : X \rightarrow X$,

$$T_\gamma(x) = \gamma^{-1}(x - \text{prox}_{\gamma G}(x - \gamma \nabla F(x))),$$

und erhalten dadurch

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k G}(x^k - \gamma_k \nabla F(x^k)) = x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)$$

sowie nach Lemma 6.8

$$(7.4) \quad T_{\gamma_k}(x^k) - \nabla F(x^k) \in \partial G(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)).$$

Aus Lemma 7.2 folgt weiter mit $x = x^k$, $y = x^{k+1} = x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)$, und $\gamma_k \leq L^{-1}$

$$(7.5) \quad \begin{aligned} F(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)) &\leq F(x^k) - \gamma_k (\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k))_X + \frac{\gamma_k^2 L}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2 \\ &\leq F(x^k) - \gamma_k (\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k))_X + \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2. \end{aligned}$$

Damit gilt auch für alle $z \in X$ unter Verwendung von (7.4) und $\nabla F(x) \in \partial F(x)$, dass

$$\begin{aligned} J(x^{k+1}) &= F(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)) + G(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)) \\ &\leq F(x^k) - \gamma_k (\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k))_X + \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2 \\ &\quad + G(z) + (T_{\gamma_k}(x^k) - \nabla F(x^k), x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k) - z)_X \\ &\leq F(z) + (\nabla F(x^k), x^k - z)_X - \gamma_k (\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k))_X + \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2 \\ &\quad + G(z) + (T_{\gamma_k}(x^k) - \nabla F(x^k), x^k - z - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k))_X \\ &= J(z) + (T_{\gamma_k}, x^k - z)_X - \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2. \end{aligned}$$

Für $z = x^k$ folgt daraus

$$J(x^{k+1}) \leq J(x^k) - \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2,$$

d. h. $\{J(x^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend. (Das Proximal-Gradientenverfahren ist also ein Abstiegsverfahren.) Für $z = x^*$ mit $J(x^*) = \min_{x \in X} J(x)$ folgt weiter durch quadratisches Ergänzen

$$\begin{aligned} 0 \leq J(x^{k+1}) - J(x^*) &\leq (T_{\gamma_k}(x^k), x^k - x^*)_X - \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2 \\ &= \frac{1}{2\gamma_k} (\|x^k - x^*\|_X^2 - \|x^k - x^* - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2) \\ &= \frac{1}{2\gamma_k} (\|x^k - x^*\|_X^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_X^2). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\{\|x^k - x^*\|_X\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und damit $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ Féjer-monoton und beschränkt. Es existiert also eine schwach konvergente Teilfolge $\{x^{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ mit $x^{k_l} \rightharpoonup \bar{x}$.

Summieren über $k = 1, \dots, n$ liefert nun

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (J(x^k) - J(x^*)) &\leq \frac{1}{2\gamma_{\min}} \sum_{k=1}^n (\|x^{k-1} - x^*\|_X^2 - \|x^k - x^*\|_X^2) \\ &= \frac{1}{2\gamma_{\min}} (\|x^0 - x^*\|_X^2 - \|x^n - x^*\|_X^2) \\ &\leq \frac{1}{2\gamma_{\min}} \|x^0 - x^*\|_X^2. \end{aligned}$$

Da $\{J(x^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt

$$(7.6) \quad J(x^n) - J(x^*) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (J(x^k) - J(x^*)) \leq \frac{1}{2n\gamma_{\min}} \|x^0 - x^*\|_X^2$$

und damit $J(x^k) \rightarrow J(x^*)$. Also gilt auch wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit von F und G , dass

$$J(\bar{x}) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} J(x^{k_l}) = J(x^*).$$

Wie im Beweis von Satz 7.1 folgt nun aus der Féjer-Monotonie von $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, dass $x^k \rightharpoonup \bar{x}$ für die gesamte Folge gilt. \square

Aus (7.6) folgt insbesondere $J(x^k) = J(x^*) + \mathcal{O}(k^{-1})$. Um $J(x^k) \leq J(x^*) + \varepsilon$ zu erreichen, sind also $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ Iterationen notwendig. Durch eine geschickte Extrapolation lässt sich dies auf $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$ reduzieren, was beweisbar optimal ist; siehe [Nesterov 1983], [Nesterov 2004, Theorem 2.1.7]. (Dafür ist die Folge der Funktionswerte allerdings nicht mehr monoton fallend.) Die Iterationsvorschrift dafür ist

$$(7.7) \quad \begin{cases} x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k G}(\bar{x}^k - \gamma_k \nabla F(\bar{x}^k)), \\ \bar{x}^{k+1} = \left(1 - \frac{1 - \tau_k}{\tau_{k+1}}\right) x^{k+1} + \frac{1 - \tau_k}{\tau_{k+1}} \bar{x}^k, \end{cases}$$

für die (schwer zu motivierende) Folge

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\tau_{k-1}^2}}{2} \quad (\rightarrow \infty),$$

siehe [Beck und Teboulle 2009, § 4].

Ein Nachteil des expliziten Splittings ist die Notwendigkeit, für die Wahl einer zulässigen Schrittweite γ_k die Lipschitzkonstante L von ∇F zu kennen. Im Beweis von Satz 7.3 erkennt

man, dass dies lediglich dazu dient, die Abschätzung (7.5) zu garantieren. Ist die Lipschitzkonstante nicht bekannt, kann man versuchen, die Gültigkeit von (7.5) durch Liniensuche zu erfüllen: Man startet mit $\gamma^0 > 0$ und verkleinert γ_k (etwa durch Halbieren) so lange, bis

$$F(x^k - \gamma_k T_{\gamma_k}(x^k)) \leq F(x^k) - \gamma_k (\nabla F(x^k), T_{\gamma_k}(x^k))_X + \frac{\gamma_k}{2} \|T_{\gamma_k}(x^k)\|_X^2$$

erfüllt ist (was spätestens für $\gamma_k < L^{-1}$ der Fall ist). Dafür ist in jedem Schritt der Liniensuche jeweils eine Auswertung von F und $\text{prox}_{\gamma_k G}$ erforderlich (wobei Letzteres durch Vertauschen von Proximal- und Gradientenschritt – *Backward-Forward-Splitting* vermieden werden kann).

7.3 IMPLIZITES SPLITTING

Auch mit Liniensuche bleiben die Anforderungen an die Schrittweite γ_k in expliziten Verfahren unbefriedigend. Dies kann man mit einem impliziten Splitting umgehen. Hier wenden wir die Proximalpunkt-Formulierung auf beide Subdifferential-Inklusionen in (7.3) an und erhalten

$$\begin{cases} \bar{x} = \text{prox}_{\gamma F}(\bar{x} + \gamma \bar{p}), \\ \bar{x} = \text{prox}_{\gamma G}(\bar{x} - \gamma \bar{p}). \end{cases}$$

Um \bar{p} aus den Gleichungen zu eliminieren, setzen wir $\bar{z} := \bar{x} + \gamma \bar{p}$ und $\bar{w} := \bar{x} - \gamma \bar{p}$. Dann ist $\bar{z} + \bar{w} = 2\bar{x}$, d. h.

$$\bar{w} = 2\bar{x} - \bar{z}.$$

Damit brauchen wir nur noch eine Rekursion für \bar{z} ; diese gewinnen wir aus der produktiven Null

$$\bar{z} = \bar{z} + (\bar{x} - \bar{x}).$$

Durch Fixpunktiteration auf diesen Gleichungen erhalten wir das *Douglas-Rachford-Verfahren*

$$(7.8) \quad \begin{cases} x^{k+1} = \text{prox}_{\gamma F}(z^k), \\ y^{k+1} = \text{prox}_{\gamma G}(2x^{k+1} - z^k), \\ z^{k+1} = z^k + y^{k+1} - x^{k+1}. \end{cases}$$

Diese Iteration kann man durch Einführen von geeigneten Operatoren als Proximalpunkt-Verfahren schreiben, woraus mit etwas Aufwand (nach Nachweisen der maximalen Monotonie des entsprechenden Operators) die Konvergenz mit Satz 7.1 folgt; siehe etwa [Eckstein und Bertsekas 1992]. Wir betrachten hier gleich eine allgemeinere Variante, die sich vor allem in der mathematischen Bildverarbeitung als sehr erfolgreich erwiesen hat.

7.4 PRIMAL-DUALE VERFAHREN

Diese Verfahren wurden speziell für Probleme der Form

$$\min_{x \in X} F(x) + G(Ax)$$

für F, G eigentlich, konvex und unterhalbstetig und $A \in L(X, Y)$ entwickelt. Aus Satz 5.6 und Lemma 5.5 erhält man dafür die Fenchel-Extremalitätsbedingungen

$$(7.9) \quad \begin{cases} -A^* \bar{y} \in \partial F(\bar{x}), \\ \bar{y} \in \partial G(A\bar{x}), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A^* \bar{y} \in \partial F(\bar{x}), \\ A\bar{x} \in \partial G^*(\bar{y}). \end{cases}$$

Die zugehörige Proximalpunktformulierung nach Lemma 6.8 ist

$$\begin{cases} \bar{x} = \text{prox}_{\tau F}(\bar{x} - \tau A^* \bar{y}), \\ \bar{y} = \text{prox}_{\sigma G^*}(\bar{y} + \sigma A \bar{x}), \end{cases}$$

für beliebige $\sigma, \tau > 0$. Daraus lässt sich direkt eine Fixpunktiteration gewinnen. Es ist aber sowohl aus praktischer als auch aus theoretischer Sicht hilfreich, einen Extrapolationsschritt (vergleiche (7.7)) einzuschieben:

$$(7.10) \quad \begin{cases} x^{k+1} = \text{prox}_{\tau F}(x^k - \tau A^* y^k), \\ \bar{x}^{k+1} = 2x^{k+1} - x^k, \\ y^{k+1} = \text{prox}_{\sigma G^*}(y^k + \sigma A \bar{x}^{k+1}). \end{cases}$$

Dieses *primal-duale Extragradien-Verfahren* kann man nun als Proximalpunkt-Verfahren auffassen.¹ Dazu formen wir (7.10) so um, dass (x^k, y^k) und (x^{k+1}, y^{k+1}) auf jeweils einer Seite stehen. Verwenden von $\text{prox}_{\tau F} = (\text{Id} + \tau \partial F)^{-1}$ ergibt für die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} x^{k+1} = \text{prox}_{\tau F}(x^k - \tau A^* y^k) &\Leftrightarrow x^k - \tau A^* y^k \in x^{k+1} + \tau \partial F(x^{k+1}) \\ &\Leftrightarrow \tau^{-1} x^k - A^* y^k \in \tau^{-1} x^{k+1} + \partial F(x^{k+1}). \end{aligned}$$

Analog haben wir für die zweite Gleichung (nach Elimination von \bar{x}^{k+1})

$$\begin{aligned} y^{k+1} = \text{prox}_{\sigma G^*}(y^k + \sigma A(2x^{k+1} - x^k)) &\Leftrightarrow \\ \sigma^{-1} y^k - Ax^k &\in \sigma^{-1} y^{k+1} + \partial G^*(y^{k+1}) - 2Ax^{k+1}. \end{aligned}$$

Setzen wir $Z = X \times Y, z = (x, y)$,

$$M = \begin{pmatrix} \tau^{-1} \text{Id} & -A^* \\ -A & \sigma^{-1} \text{Id} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \partial F & A^* \\ -A & \partial G^* \end{pmatrix},$$

¹Eingeführt wurde das Verfahren in [Chambolle und Pock 2011]; der Zusammenhang mit Proximalpunkt-Verfahren wurde in [He und Yuan 2012] beschrieben.

so ist (7.10) äquivalent mit

$$Mz^k \in (M + T)z^{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad z^{k+1} \in (M + T)^{-1}Mz^k.$$

Ist M invertierbar, so gilt $M = (M^{-1})^{-1}$ und damit $(M + T)^{-1}Mz^k = (\text{Id} + M^{-1}T)^{-1}z^k$; es handelt sich dann also in der Tat um ein Proximalpunkt-Verfahren für den Operator $M^{-1}T$. Dazu zeigen wir, dass – unter Voraussetzungen an σ, τ – M selbstadjungiert und positiv definit ist bezüglich des Skalarproduktes

$$(z_1, z_2)_Z = (x_1, x_2)_X + (y_1, y_2)_Y \quad \text{für alle } z_1 = (x_1, y_1) \in Z, z_2 = (x_2, y_2) \in Z.$$

Lemma 7.4. *Der Operator M ist beschränkt und selbstadjungiert. Gilt $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 < 1$, so ist M positiv definit.*

Beweis. Direkt aus der Definition von M folgt die Beschränktheit (da $A \in L(X, Y)$ beschränkt ist) und Selbstadjungiertheit. Sei nun $z = (x, y) \in Z \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} (Mz, z)_Z &= (\tau^{-1}x - A^*y, x)_X + (\sigma^{-1}y - Ax, y)_Y \\ &= \tau^{-1}\|x\|_X^2 - 2(x, A^*y)_X + \sigma^{-1}\|y\|_Y^2 \\ &\geq \tau^{-1}\|x\|_X^2 - 2\|A\|_{L(X,Y)}\|x\|_X\|y\|_Y + \sigma^{-1}\|y\|_Y^2 \\ &\geq \tau^{-1}\|x\|_X^2 - \|A\|_{L(X,Y)}\sqrt{\sigma\tau}(\tau^{-1}\|x\|_X^2 + \sigma^{-1}\|y\|_Y^2) + \sigma^{-1}\|y\|_Y^2 \\ &= (1 - \|A\|_{L(X,Y)}\sqrt{\sigma\tau})(\sqrt{\tau^{-1}}\|x\|_X^2 + \sqrt{\sigma^{-1}}\|y\|_Y^2) \\ &\geq C(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2) \end{aligned}$$

für $C := (1 - \|A\|_{L(X,Y)}\sqrt{\sigma\tau}) \min\{\tau^{-1}, \sigma^{-1}\} > 0$. Also ist $(Mz, z)_Z > C\|z\|_Z^2$ für alle $z \neq 0$ und damit M positiv definit. \square

Der Operator M induziert also ein Skalarprodukt $(z_1, z_2)_M := (Mz_1, z_2)_Z$ und dadurch eine Norm $\|z\|_M^2 = (z, z)_M$ für die gilt

$$(7.11) \quad c_1\|z\|_Z \leq \|z\|_M \leq c_2\|z\|_Z \quad \text{für alle } z \in Z.$$

Folgerung 7.5. *Gilt $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 < 1$, so ist M stetig invertierbar, d. h. es gilt $M^{-1} \in L(Y, X)$.*

Beweis. Wegen (7.11) ist für beliebige $z \in Z$ die Abbildung $f : Z \rightarrow \mathbb{R}, f(v) = (z, v)_Z$ ein (bezüglich $\|\cdot\|_M$) beschränktes Funktional. Nach dem Satz von [Fréchet–Riesz](#) existiert also ein eindeutiges $z^* \in Z$ mit

$$(Mz^*, v)_Z = (z, v)_Z \quad \text{für alle } v \in Z,$$

und die Abbildung $M^{-1} : z \mapsto z^*$ ist linear. Damit gilt

$$c_1^2\|z^*\|_Z^2 \leq \|z^*\|_M^2 = (Mz^*, z^*)_Z = (z, z^*)_Z \leq \|z\|_Z\|z^*\|_Z,$$

und nach Division durch $c_1^2\|z^*\|_Z$ folgt die behauptete Beschränktheit von M^{-1} . \square

Also ist $M^{-1}T$ wohldefiniert. Um die maximale Monotonie von $M^{-1}T$ zu beweisen, benötigen wir auch noch, dass die Skalarprodukte $(\cdot, \cdot)_M$ und $(\cdot, \cdot)_Z$ äquivalent sind.

Folgerung 7.6. *Es existieren $C_1, C_2 > 0$, so dass gilt*

$$C_1 (z, z')_Z \leq (z, z')_M \leq C_2 (z, z')_Z \quad \text{für alle } z, z' \in Z.$$

Beweis. Aus der Parallelogrammgleichung und (7.11) folgt

$$\begin{aligned} (z, z')_M &= \frac{1}{4} (\|z + z'\|_M^2 - \|z - z'\|_M^2) \\ &\geq \frac{1}{4} (c_1^2 \|z + z'\|_Z^2 - c_2^2 \|z - z'\|_Z^2) \\ &\geq \min\{c_1^2, c_2^2\} (z, z')_Z \end{aligned}$$

und damit die erste Abschätzung mit $C_1 := \max\{c_1^2, c_2^2\}$. Die zweite Abschätzung zeigt man analog. \square

Lemma 7.7. *Gilt $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 < 1$, so ist $M^{-1}T$ maximal monoton.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Monotonie. Sei $z \in Z$ und $z^* \in M^{-1}Tz$, d. h. $Mz^* \in Tz$. Nach Definition von T existieren daher für $z = (x, y)$ ein $\xi \in \partial F(x)$ und ein $\eta \in \partial G^*(y)$ mit $Mz^* = (\xi + A^*y, \eta - Ax)$. Analog können wir für $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ und $\bar{z}^* \in M^{-1}T\bar{z}$ schreiben $M\bar{z}^* = (\bar{\xi} + A^*\bar{y}, \bar{\eta} - A\bar{x})$ für $\bar{\xi} \in \partial F(\bar{x})$ und $\bar{\eta} \in \partial G^*(\bar{y})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (M\bar{z}^* - Mz^*, \bar{z} - z)_Z &= ((\bar{\xi} + A^*\bar{y}) - (\xi + A^*y), \bar{x} - x)_X \\ &\quad + ((\bar{\eta} - A\bar{x}) - (\eta - Ax), \bar{y} - y)_Y \\ &= (\bar{\xi} - \xi, \bar{x} - x)_X + (A^*(\bar{y} - y), \bar{x} - x)_X \\ &\quad - (A(\bar{x} - x), \bar{y} - y)_Y + (\bar{\eta} - \eta, \bar{y} - y)_Y \\ &= (\bar{\xi} - \xi, \bar{x} - x)_X + (\bar{\eta} - \eta, \bar{y} - y)_Y \geq 0 \end{aligned}$$

wegen der Monotonie der Subdifferentiale. Aus Folgerung 7.6 erhalten wir dann

$$(\bar{z}^* - z^*, \bar{z} - z)_Z \geq C_2^{-1} (M\bar{z}^* - Mz^*, \bar{z} - z)_Z \geq 0$$

und damit die Monotonie.

Für die maximale Monotonie seien nun $\bar{z}^*, \bar{z} \in Z$ und es gelte

$$(\bar{z}^* - z^*, \bar{z} - z)_Z \geq 0 \quad \text{für alle } z \in Z, z^* \in M^{-1}Tz.$$

Wie oben ist nun $Mz^* = (\xi + A^*y, \eta - Ax)$ für ein $\xi \in \partial F(x)$ und ein $\eta \in \partial G^*(y)$. Aus Folgerung 7.6 erhalten wir auch

$$(7.12) \quad (M\bar{z}^* - Mz^*, \bar{z} - z)_Z \geq C_1 (\bar{z}^* - z^*, \bar{z} - z)_Z \geq 0 \quad \text{für alle } z \in Z, Mz^* \in Tz.$$

Setze nun $\bar{\xi} := \bar{x}^* - A^*\bar{y}$ und $\bar{\eta} := \bar{y}^* + A\bar{x}$ für $M\bar{z}^* = (\bar{x}^*, \bar{y}^*)$ und $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$. Dann ist $M\bar{z}^* = (\bar{\xi} + A^*\bar{y}, \bar{\eta} - A\bar{x})$, und aus (7.12) folgt daher für alle $(x, y) \in Z$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq ((\bar{\xi} + A^*\bar{y}) - (\xi + A^*y), \bar{x} - x)_X + ((\bar{\eta} - A\bar{x}) - (\eta - Ax), \bar{y} - y)_Y \\ &= (\bar{\xi} - \xi, \bar{x} - x)_X + (\bar{\eta} - \eta, \bar{y} - y)_Y. \end{aligned}$$

Da der erste Term nur von x und der zweite nur von y abhängt und x und y unabhängig gewählt werden können, müssen beide Terme nichtnegativ sein. Aus der maximalen Monotonie von Subdifferentialen folgt nun $\bar{\xi} \in \partial F(\bar{x})$ und $\bar{\eta} \in \partial G^*(\bar{y})$. Also ist

$$M\bar{z}^* = (\bar{\xi} + A^*\bar{y}, \bar{\eta} - A\bar{x}) \in T\bar{z}$$

und damit $\bar{z}^* \in M^{-1}T\bar{z}$. Dies zeigt die maximale Monotonie von $M^{-1}T$. \square

Das primal-duale Extragradien-Verfahren (7.10) ist also äquivalent mit der Proximalpunktiteration $z^{k+1} = \mathcal{R}_{M^{-1}T}z^k$ für $M^{-1}T$ maximal monoton, so dass aus Satz 7.1 die Konvergenz folgt.

Satz 7.8. *Erfüllen F, G, A die Voraussetzungen von Satz 5.6 und gilt $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 < 1$, so konvergiert $\{(x^k, y^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ schwach in Z gegen eine Lösung (\bar{x}, \bar{y}) von (7.9).*

Setzt man $A = \text{Id}$, $\tau = \gamma$, $\sigma = \gamma^{-1}$ und $z^k = x^k - \gamma y^k$ und wendet Lemma 6.11 (ii) an, so erkennt man, dass die Iteration (7.10) äquivalent ist mit (7.8); die Konvergenz des Douglas-Rachford-Verfahrens kann man aber wegen $\sigma\tau\|A\|_{L(X,Y)}^2 = 1$ nicht aus Satz 7.8 folgern.

Teil III

LIPSCHITZ-ANALYSIS

DAS CLARKE-SUBDIFFERENTIAL

8

Wir suchen nun nach einem verallgemeinerten Ableitungskonzept, das sowohl die Fréchet-Ableitung als auch das konvexe Subdifferential verallgemeinert. Dieses finden wir für lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Zur Erinnerung: Eine Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$, falls ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$ (womit wir im Folgenden stets die Lipschitz-Konstante bezeichnen werden) existieren mit

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq L \|x_1 - x_2\|_X \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in O_\delta(x).$$

Beachte, dass dies im Gegensatz zur Konvexität eine rein lokale Bedingung ist, wir aber F als (lokal) endlich-wertig voraussetzen müssen.

Wir gehen analog zum konvexen Subdifferential vor und definieren zunächst die *verallgemeinerte Richtungsableitung* in $x \in X$ in Richtung $h \in X$ über

$$F^\circ(x; h) := \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + th) - F(y)}{t}.$$

Beachte den Unterschied zur Richtungsableitung: Es wird nicht verlangt, dass irgendein Grenzwert existiert, nur Häufungspunkte. Wir benötigen die folgenden Eigenschaften.

Lemma 8.1. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in x . Dann ist die Abbildung $h \mapsto F^\circ(x; h)$

- (i) Lipschitz-stetig mit Konstante L und erfüllt $|F^\circ(x; h)| \leq L \|h\|_X$;
- (ii) subadditiv, d. h. $F^\circ(x; h + g) \leq F^\circ(x; h) + F^\circ(x; g)$ für alle $h, g \in X$;
- (iii) positiv homogen, d. h. für alle $\alpha > 0$ ist $F^\circ(x; \alpha h) = (\alpha F)^\circ(x; h)$ für alle $h \in X$;
- (iv) reflektiv, d. h. $F^\circ(x; -h) = (-F)^\circ(x; h)$ für alle $h \in X$;

Beweis. Zu (i): Seien $h, g \in X$ beliebig. Aus der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von F folgt dann

$$F(y + th) - F(y) \leq F(y + tg) - F(y) + tL \|h - g\|_X$$

für alle y hinreichend nahe an x und t klein genug. Division durch t und Bilden des Limes superior ergibt dann

$$F^\circ(x; h) \leq F^\circ(x; g) + L\|h - g\|_X.$$

Vertauschen von h und g liefert dann die Lipschitz-Stetigkeit. Weiter folgt direkt aus der Definition $F^\circ(x; g) = 0$ für $g = 0$ und damit auch die behauptete Beschränktheit.

Zu (ii): Aus der Definition des Limes superior und der produktiven Null folgt sofort

$$\begin{aligned} F^\circ(x; h + g) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + th + tg) - F(y)}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + th + tg) - F(y + tg)}{t} + \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + tg) - F(y)}{t} \\ &= F^\circ(x; h) + F^\circ(x; g), \end{aligned}$$

da für $y \rightarrow x$ und $t \rightarrow 0$ auch $y + tg \rightarrow x$ konvergiert.

Zu (iii): Direkt aus der Definition folgt wegen $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} F^\circ(x; \alpha h) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y - t(\alpha h)) - F(y)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ \alpha t \rightarrow 0^+}} \alpha \frac{F(y + (\alpha t)h) - F(y)}{\alpha t} = (\alpha F)^\circ(x; h). \end{aligned}$$

Zu (iv): Ebenso folgt

$$\begin{aligned} F^\circ(x; -h) &= \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y - th) - F(y)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{w \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{-F(w + th) - (-F(w))}{t} = (-F)^\circ(x; h), \end{aligned}$$

da für $y \rightarrow x$ und $t \rightarrow 0$ auch $w := y - th \rightarrow x$ konvergiert. □

Aus Lemma 8.1 (i–iii) folgt insbesondere, dass $h \mapsto F^\circ(x; h)$ eigentlich, konvex und unterhalbstetig ist.

Wir definieren nun für $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig das *Clarke-Subdifferential* in $x \in X$ durch

$$(8.1) \quad \partial_C F(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq F^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\}.$$

Direkt aus der Definition und Lemma 8.1 (i) folgt, dass $\partial_C F(x)$ konvex, schwach-* abgeschlossen und beschränkt (da in $K_L(0) \subset X^*$ enthalten) ist. Auch hier gilt nach Konstruktion das Fermat-Prinzip.

Satz 8.2. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in \bar{x} . Hat F ein lokales Minimum in \bar{x} , so gilt $0 \in \partial_C F(\bar{x})$.

Beweis. Ist $\bar{x} \in X$ ein lokaler Minimierer von F , so gilt insbesondere $F(\bar{x}) \leq F(\bar{x} + th)$ für alle $h \in X$ und $t > 0$ hinreichend klein. Daraus folgt

$$0 \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(\bar{x} + th) - F(\bar{x})}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(\bar{x} + th) - F(\bar{x})}{t} \leq F^\circ(\bar{x}; h)$$

und damit $0 \in \partial_C F(\bar{x})$ nach Definition. □

Beachte, dass F nicht konvex und damit die Bedingung nicht mehr hinreichend sein muss! (Betrachte z. B. $f(t) = -|t|$.)

Wir werden später auch noch die folgende Abgeschlossenheitseigenschaft benötigen.

Lemma 8.3. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$. Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \rightarrow x$ und sei $x_n^* \in \partial_C F(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n^* \rightharpoonup^* x^*$ in X^* . Dann ist $x^* \in \partial_C F(x)$.

Beweis. Sei $h \in X$ beliebig. Nach Annahme gilt dann $\langle x_n^*, h \rangle_X \leq F^\circ(x_n; h)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der schwach-* Konvergenz folgt dann

$$\langle x^*, h \rangle_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n^*, h \rangle_X \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F^\circ(x_n; h).$$

Wir sind also fertig, wenn wir zeigen können, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} F^\circ(x_n; h) \leq F^\circ(x; h)$ gilt (denn dann ist nach Definition $x^* \in \partial_C F(x)$).

Nach Definition von $F^\circ(x_n; h)$ existieren Folgen $\{y_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ und $\{t_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ mit $y_{n,m} \rightarrow x_n$ und $t_{n,m} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, die den Limes superior realisieren. Wir finden also für alle $n \in \mathbb{N}$ ein y_n und t_n mit $\|y_n - x_n\|_X + t_n < n^{-1}$ (und damit insbesondere $y_n \rightarrow x$ und $t_n \rightarrow 0$) sowie

$$F^\circ(x_n; h) - \frac{1}{n} \leq \frac{F(y_n + t_n h) - F(y_n)}{t_n}$$

für n hinreichend groß. Übergang zum Limes superior für $n \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten liefert dann die gewünschte Ungleichung. □

Wir zeigen nun, dass das Clarke-Subdifferential in der Tat eine Verallgemeinerung der bereits bekannten Ableitungen darstellt.

Satz 8.4. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig Fréchet-differenzierbar in einer Umgebung U um $x \in X$. Dann ist $\partial_C F(x) = \{F'(x)\}$.

Beweis. Zunächst folgt aus der Annahme die lokale Lipschitz-Stetigkeit: Da F' in U stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|F'(z) - F'(x)\|_{X^*} \leq 1$ und damit $\|F'(z)\|_{X^*} \leq 1 + \|F'(x)\|_{X^*}$ für alle $z \in K_\delta(x) \subset U$. Aus dem Mittelwertsatz 2.6 und der Konvexität von Kugeln folgt dann für alle $x_1, x_2 \in K_\delta(x)$

$$\begin{aligned} \|F(x_1) - F(x_2)\|_X &\leq \int_0^1 \|F'(x_2 + t(x_1 - x_2))\|_{X^*} t \|x_1 - x_2\|_X dt \\ &\leq \frac{1 + \|F'(x)\|_{X^*}}{2} \|x_1 - x_2\|_X. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun $F^\circ(x; h) = F'(x)h$ für alle $h \in X$. Seien dafür $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $x_n \rightarrow x$ und $t_n \rightarrow 0^+$, die den Limes superior realisieren. Dann folgt wieder aus dem Mittelwertsatz und der Stetigkeit von F' für $h \in X$ beliebig

$$\begin{aligned} F^\circ(x; h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n + t_n h) - F(x_n)}{t_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{t_n} \langle F'(x_n + t(t_n h)), t_n h \rangle_X dt \\ &= \langle F'(x), h \rangle_X. \end{aligned}$$

Also ist nach Definition $x^* \in \partial_C F(x)$ genau dann, wenn $\langle x^*, h \rangle_X \leq \langle F'(x), h \rangle_X$ für alle $h \in X$ gilt, was nur für $x^* = F'(x)$ möglich ist. \square

Satz 8.5. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$. Dann ist $\partial_C F(x) = \partial F(x)$.

Beweis. Wir zeigen $F^\circ(x; h) = F'(x; h)$ für alle $h \in X$, woraus mit Definition (4.2) des konvexen Subdifferentials die Aussage folgt. Zunächst gilt stets

$$F'(x; h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} \leq \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(y + th) - F(y)}{t} = F^\circ(x; h).$$

Für die umgekehrte Richtung sei daran erinnert, dass im Beweis von Lemma 4.1 gezeigt wurde, dass für konvexe Funktionen der Differenzenquotient auf der linken Seite monoton wachsend ist. Sei nun $\delta > 0$ beliebig. Wir können also schreiben

$$\begin{aligned} F^\circ(x; h) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{y \in K_{\delta\varepsilon}(x)} \sup_{0 < t < \varepsilon} \frac{F(y + th) - F(y)}{t} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{y \in K_{\delta\varepsilon}(x)} \frac{F(y + \varepsilon h) - F(y)}{\varepsilon} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(x + \varepsilon h) - F(x)}{\varepsilon} + 2L\delta \\ &= F'(x; h) + 2L\delta, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt zweimal die produktive Null zusammen mit der lokalen Lipschitz-Stetigkeit in x verwendet haben. Da $\delta > 0$ beliebig war, muss also $F^\circ(x; h) \leq F'(x; h)$ gelten. \square

Ist $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig und gilt $F^\circ(x; h) = F'(x; h)$ für alle $h \in X$, so heißt F *regulär* in x . Wie wir gerade gezeigt haben, ist jedes stetig differenzierbare Funktional regulär. Weiterhin ist jedes konvexe und unterhalbstetige Funktional im Inneren seines Definitionsbereiches lokal Lipschitz-stetig und damit ebenso regulär, siehe z. B. [Clarke 2013, Theorem 5.17]. Anschaulich sind Funktionale also regulär in Punkten, in denen sie entweder differenzierbar sind oder einen “konvexen Knick” haben.

Wir kommen nun zu Rechenregeln. Die erste folgt wieder direkt aus der Definition.

Satz 8.6. *Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\partial_C(\alpha F)(x) = \alpha \partial_C(F)(x).$$

Beweis. Zunächst ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ offensichtlich αF lokal Lipschitz-stetig. Für $\alpha = 0$ steht nach Satz 8.4 auf beiden Seiten $\{0\}$. Für alle $\alpha > 0$ ist nach Definition stets $(\alpha F)^\circ(x; h) = \alpha F^\circ(x; h)$ für alle $h \in X$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \alpha \partial_C F(x) &= \{\alpha x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq F^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \{\alpha x^* \in X^* : \langle \alpha x^*, h \rangle_X \leq \alpha F^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \{y^* \in X^* : \langle y^*, h \rangle_X \leq (\alpha F)^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \partial_C(\alpha F)(x). \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall muss daher nur noch die Aussage für $\alpha = -1$ gezeigt werden. Dazu schreiben wir analog mit Lemma 8.1 (iv)

$$\begin{aligned} \partial_C(-F)(x) &= \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq (-F)^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \{x^* \in X^* : \langle -x^*, -h \rangle_X \leq F^\circ(x; -h) \text{ für alle } h \in X\} \\ &= \{-y^* \in X^* : \langle y^*, g \rangle_X \leq F^\circ(x; g) \text{ für alle } g \in X\} \\ &= -\partial_C(F)(x). \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung 8.7. *Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in \bar{x} . Hat F ein lokales Maximum in \bar{x} , so gilt $0 \in \partial_C F(\bar{x})$.*

Beweis. Hat F ein lokales Maximum in \bar{x} , so hat $-F$ ein lokales Minimum. Aus Satz 8.2 folgt dann

$$0 \in \partial_C(-F)(\bar{x}) = -\partial_C F(\bar{x}),$$

d. h. $0 = -0 \in \partial_C F(\bar{x})$. □

Die weiteren Regeln sind wieder aufwendiger. Dazu müssen wir Mengen der Form (8.1) vergleichen, wofür wir wiederholt die folgenden Argumente anwenden.

Lemma 8.8. Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ positiv homogen, subadditiv und unterhalbstetig, und sei

$$A = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle_X \leq F(x) \text{ für alle } x \in X\}.$$

Dann ist

$$F(x) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis. Nach Definition gilt für alle $x^* \in A$ (und nur diese!) und $x \in X$ die Ungleichung $\langle x^*, x \rangle_X - F(x) \leq 0$. Durch Fallunterscheidung analog zu Beispiel 5.2 (iii) folgt daraus zusammen mit der positiven Homogenität von F für $x^* \in X^*$ beliebig

$$F^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x^*, x \rangle_X - F(x) = \begin{cases} 0 & x^* \in A, \\ \infty & x^* \notin A, \end{cases}$$

d. h. $F^* = \delta_A$. Nun ist F nach Voraussetzung zusätzlich subadditiv und damit konvex sowie unterhalbstetig. Aus Satz 5.1 folgt daher für alle $x \in X$

$$F(x) = F^{**}(x) = (\delta_A)^*(x) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle_X. \quad \square$$

Für die nächsten Resultate benötigen wir die folgende “schwach- $*$ ”-Fassung des Hahn-Banach-Trennungssatzes.

Satz 8.9. Sei $A \subset X^*$ eine nichtleere, konvexe und schwach- $*$ abgeschlossene Teilmenge und sei $x^* \in X^* \setminus A$. Dann existieren ein $x \in X$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle z^*, x \rangle_X \leq \lambda < \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } z^* \in A.$$

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 1.4 unter Verwendung der Tatsache, dass die linearen schwach- $*$ stetigen Funktionale genau die Form $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle_X$ für ein $x \in X$ haben; siehe auch [Werner 2011, Satz VIII.2.11, Korollar VIII.3.4]. \square

Lemma 8.10. Seien $F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$ positiv homogen und subadditiv, und seien

$$\begin{aligned} A &:= \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \leq F(x) \text{ für alle } x \in X\}, \\ B &:= \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \leq G(x) \text{ für alle } x \in X\}, \end{aligned}$$

nichtleere Teilmengen von X^* . Gilt $F \leq G$, so ist $A \subset B$.

Beweis. Nach Konstruktion sind sowohl A als auch B konvex und schwach- $*$ abgeschlossen. Angenommen, es existiert ein $x^* \in A$ mit $x^* \notin B$. Dann existiert nach Satz 8.9 ein $x \in X$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle z^*, x \rangle_X \leq \lambda < \langle x^*, x \rangle_X \leq F(x) \quad \text{für alle } z^* \in B.$$

Nach Lemma 8.8 gilt daher

$$G(x) = \sup_{z^* \in B} \langle z^*, x \rangle_X < F(x),$$

im Widerspruch zur Annahme $F \leq G$. □

Lemma 8.11. *Seien $A, B \subset X^*$ konvex und schwach-* abgeschlossen. Dann ist $A = B$ genau dann, wenn gilt*

$$(8.2) \quad \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle_X = \sup_{x^* \in B} \langle x^*, x \rangle_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis. Die eine Richtung ist klar. Gilt umgekehrt (8.2), so ist für alle $x \in X$

$$(\delta_A)^*(x) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle_X = \sup_{x^* \in B} \langle x^*, x \rangle_X = (\delta_B)^*(x).$$

Nun sind unter den genannten Voraussetzungen die zugehörigen Indikatorfunktionen δ_A und δ_B konvex und schwach-* unterhalbstetig. Aus Satz 5.1 (diesmal mit Satz 8.9) folgt daher

$$\delta_A = ((\delta_A)^*)^* = ((\delta_B)^*)^* = \delta_B,$$

und das ist nur dann möglich, wenn beide Mengen übereinstimmen. □

Damit können wir zum Beispiel eine Summenregel beweisen.

Satz 8.12. *Seien $F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$. Dann gilt*

$$\partial_C(F + G)(x) \subset \partial_C F(x) + \partial_C G(x).$$

Sind F und G regulär in x , so gilt Gleichheit.

Beweis. Man sieht sofort die Lipschitz-Stetigkeit von $F + G$ in x . Aus der Definition des Limes superior folgt weiter für beliebiges $h \in X$

$$(F + G)^\circ(x; h) \leq F^\circ(x; h) + G^\circ(x; h).$$

Sind F und G regulär in x , so erhalten wir aus den Rechenregeln für konvergente Folgen

$$F^\circ(x; h) + G^\circ(x; h) = F'(x; h) + G'(x; h) = (F + G)'(x; h) \leq (F + G)^\circ(x; h)$$

und damit Gleichheit.

Nach Lemma 8.10 sind wir also fertig, wenn wir gezeigt haben, dass gilt

$$\partial_C F(x) + \partial_C G(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle_X \leq F^\circ(x; h) + G^\circ(x; h) \text{ für alle } h \in X\} =: A.$$

Dafür verwenden wir, dass beide Mengen konvex und schwach-* abgeschlossen sind, sowie dass verallgemeinerte Richtungsableitungen nach Lemma 8.1 positiv homogen, subadditiv und unterhalbstetig sind. Nach Lemma 8.8 gilt daher für alle $h \in X$

$$\begin{aligned} \sup_{x^* \in \partial_C F(x) + \partial_C G(x)} \langle x^*, h \rangle_X &= \sup_{x_1^* \in \partial_C F(x)} \langle x_1^*, h \rangle_X + \sup_{x_2^* \in \partial_C G(x)} \langle x_2^*, h \rangle_X \\ &= F^\circ(x; h) + G^\circ(x; h) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, h \rangle_X, \end{aligned}$$

woraus mit Lemma 8.11 die behauptete Gleichheit folgt. \square

Beachten Sie den Unterschied zur konvexen Summenregel: Die Inklusion ist genau umgekehrt; auch müssen jetzt *beide* Summanden regulär sein, und zwar in genau dem Punkt, in dem die Summenregel angewendet wird.

Für die Kettenregel brauchen wir den folgenden Mittelwertsatz.

Satz 8.13. *Sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in X$. Dann existiert für alle $y \in X$ hinreichend nahe an x ein $\lambda \in (0, 1)$ und ein $x^* \in \partial_C F(x + \lambda(y - x))$ mit*

$$F(y) - F(x) = \langle x^*, y - x \rangle_X.$$

Beweis. Wir definieren $\psi, \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\psi(\lambda) := F(x + \lambda(y - x)), \quad \varphi(\lambda) := \psi(\lambda) + \lambda(F(x) - F(y)).$$

Da F lokal Lipschitz-stetig und y nahe genug an x ist, sind sowohl φ als auch ψ Lipschitz-stetig. Wegen $\varphi(0) = F(x) = \varphi(1)$ hat φ daher ein lokales Minimum oder Maximum in einem Punkt $\bar{\lambda} \in (0, 1)$. Nach Satz 8.2 oder Folgerung 8.7 zusammen mit der Summenregel aus Satz 8.12 sowie Satz 8.4 ist daher

$$0 \in \partial_C \varphi(\bar{\lambda}) \subset \partial_C \psi(\bar{\lambda}) + \{F(x) - F(y)\}.$$

Wir sind also fertig, wenn wir zeigen können, dass für $x_{\bar{\lambda}} := x + \bar{\lambda}(y - x)$ gilt

$$(8.3) \quad \partial_C \psi(\bar{\lambda}) \subset \{ \langle x^*, y - x \rangle_X : \langle x^*, h \rangle_X \leq F^\circ(x_{\bar{\lambda}}; h) \text{ für alle } h \in X \}.$$

Dafür betrachten wir zunächst für $s \in \mathbb{R}$ beliebig die verallgemeinerte Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \psi^\circ(\bar{\lambda}; s) &= \limsup_{\substack{\lambda \rightarrow \bar{\lambda} \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{\psi(\bar{\lambda} + ts) - \psi(\bar{\lambda})}{t} \\ &= \limsup_{\substack{\lambda \rightarrow \bar{\lambda} \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(x + (\lambda + ts)(y - x)) - F(x + \lambda(y - x))}{t} \\ &\leq \limsup_{\substack{z \rightarrow x_{\bar{\lambda}} \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{F(z + ts(y - x)) - F(z)}{t} = F^\circ(\bar{\lambda}; s(y - x)), \end{aligned}$$

da wir im vorletzten Schritt *beliebige* Folgen $z \rightarrow x_{\bar{\lambda}}$ (anstelle von Folgen der speziellen Form $z_n = x + \lambda_n(y - x)$) betrachten. Nach Lemma 8.10 ist daher

$$(8.4) \quad \partial_C \psi(\bar{\lambda}) \subset \{t^* \in \mathbb{R} : t^*s \leq F^\circ(x_{\bar{\lambda}}; s(y - x)) \text{ f\u00fcr alle } s \in \mathbb{R}\}.$$

Bleibt nur noch zu zeigen, dass die Mengen auf der jeweils rechten Seite von (8.3) und (8.4) (nennen wir sie A bzw. B) \u00fcbereinstimmen. Dies folgt aber wieder aus Lemma 8.8 und 8.11, denn f\u00fcr alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sup_{t^* \in A} t^*s = \sup_{x^* \in \partial_C F(x_{\bar{\lambda}})} \langle x^*, s(y - x) \rangle_X = F^\circ(x_{\bar{\lambda}}; s(y - x)) = \sup_{t^* \in B} t^*s. \quad \square$$

Wir kommen nun zur Kettenregel, f\u00fcr die im Gegensatz zum konvexen Fall die innere Abbildung nicht mehr linear sein muss; dies ist einer der wesentlichen Vorz\u00fcge des Clarke-Subdifferentials.

Satz 8.14. *Sei Y separabel, sei $F : X \rightarrow Y$ stetig differenzierbar in $x \in X$, und sei $G : Y \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $F(x)$. Dann gilt*

$$\partial_C(G \circ F)(x) \subset F'(x)^* \partial_C G(F(x)) := \{F'(x)^* x^* : x^* \in \partial_C G(F(x))\}.$$

Ist G regul\u00e4r in $F(x)$, so ist auch $G \circ F$ regul\u00e4r in x und es gilt Gleichheit.

Beweis. Die Lipschitz-Stetigkeit von $G \circ F$ folgt sofort aus der von G und F . F\u00fcr die Mengeninklusion bzw. Gleichheit argumentieren wir wie zuvor. Zuerst zeigen wir, dass f\u00fcr $h \in X$ beliebig ein $y^* \in \partial_C G(F(x))$ existiert mit

$$(8.5) \quad (G \circ F)^\circ(x; h) = \langle y^*, F'(x)h \rangle_Y.$$

Daf\u00fcr betrachte zwei Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ und $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ mit $x_n \rightarrow x$, $t_n \rightarrow 0$ und

$$(G \circ F)^\circ(x; h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(F(x_n + t_n h)) - G(F(x_n))}{t_n}.$$

F\u00fcr jedes $n \in \mathbb{N}$ gro\u00df genug existiert nun nach dem Mittelwertsatz 8.13 ein $\lambda_n \in (0, 1)$ und ein $y_n^* \in \partial_C G(F(x_n))$ mit

$$\frac{G(F(x_n + t_n h)) - G(F(x_n))}{t_n} = \left\langle y_n^*, \frac{F(x_n + t_n h) - F(x_n)}{t_n} \right\rangle_Y.$$

Nun ist f\u00fcr $n \in \mathbb{N}$ gro\u00df genug der Punkt $y_n := F(x_n) + \lambda_n(F(x_n + t_n h) - F(x_n)) \rightarrow x$ innerhalb der durch die lokale Lipschitz-Stetigkeit definierten Umgebung von $F(x)$, so dass dort $y_n^* \in \partial_C G(y_n) \subset K_L(0)$ gilt. Also ist $\{y_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^*$ beschr\u00e4nkt und hat daher nach dem Satz von Banach-Alaoglu eine schwach-* konvergente Teilfolge, f\u00fcr dessen Grenzwert nach Lemma 8.3 gilt $y^* \in \partial_C G(F(x))$. Andererseits ist F stetig differenzierbar in x , und deshalb konvergiert der Differenzenquotient auf der rechten Seite stark gegen $F'(x)h$. Da das

Produkt von schwach-* und stark konvergenten Folgen konvergiert, erhalten wir (8.5). Nach Definition von $\partial_C G(F(x))$ gilt daher

$$(8.6) \quad (G \circ F)^\circ(x; h) = \langle y^*, F'(x)h \rangle_Y \leq G^\circ(F(x); F'(x)h).$$

Ist nun G regulär, so gilt $G^\circ(F(x); F'(x)h) = G'(F(x); F'(x)h)$ und damit wegen der Lipschitz-Stetigkeit von G und der Fréchet-Differenzierbarkeit von F

$$\begin{aligned} G^\circ(F(x); F'(x)h) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(F(x) + tF'(x)h) - G(F(x))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(F(x) + tF'(x)h) - G(F(x + th)) + G(F(x + th)) - G(F(x))}{t} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{G(F(x + th)) - G(F(x))}{t} + L \frac{\|F(x) + F'(x)th - F(x + th)\|_Y}{t} \right) \\ &= (G \circ F)'(x; h) \leq (G \circ F)^\circ(x; h). \end{aligned}$$

Zusammen mit (8.6) folgt daraus $(G \circ F)'(x; h) = (G \circ F)^\circ(x; h)$ (d. h. $G \circ F$ ist regulär) sowie $(G \circ F)^\circ(x; h) = G^\circ(F(x); F'(x)h)$.

Wie im Beweis von Satz 8.13 zeigt man nun, dass gilt

$$F'(x)^* \partial_C G(F(x)) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq G^\circ(F(x); F'(x)h) \text{ für alle } h \in X\},$$

woraus die restlichen Behauptungen folgen. □

Ist G nicht regulär aber $F'(x)$ surjektiv, so kann man auf ähnliche Weise zeigen, dass die Kettenregel mit Gleichheit (aber nicht die Regularität von $G \circ F$) gilt; siehe [Clarke 2013, Theorem 10.19].

Ist X endlich-dimensional, so ist eine explizitere Charakterisierung des Clarke-Subdifferentials möglich. Die Grundlage ist der Satz von Rademacher, der nur in \mathbb{R}^n gilt; siehe z. B. [DiBenedetto 2002, Theorem 23.2] oder [Heinonen 2005, Theorem 3.1].

Satz 8.15. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Dann ist F fast überall Fréchet-differenzierbar.*

Dies erlaubt, den Limes superior in der Definition des Clarke-Subdifferentials (das wir nun als Teilmenge des \mathbb{R}^n auffassen, d. h. den Dualraum von \mathbb{R}^n mit sich selbst identifizieren) durch einen Grenzwert zu ersetzen.

Satz 8.16. *Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig in $x \in \mathbb{R}^n$ und differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus E_F$ für eine Lebesgue-Nullmenge $E_F \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$(8.7) \quad \partial_C F(x) = \text{co} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n) : x_n \rightarrow x, x_n \notin E_F \right\},$$

wobei $\text{co } A$ die konvexe Hülle der Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Beweis. Zunächst folgt aus dem Satz von Rademacher, dass so ein E_F existiert und – eingeschränkt auf die Umgebung, in der F Lipschitz-stetig ist – eine Nullmenge ist. Also existieren überhaupt Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n \setminus E_F$ mit $x_n \rightarrow x$. Weiter folgt aus der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von F für x_n hinreichend nahe an x und $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig

$$|\langle \nabla F(x_n), h \rangle| = \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x_n + th) - F(x_n)}{t} \right| \leq L \|h\|$$

und damit $\|\nabla F(x_n)\| \leq L$. Also ist $\{\nabla F(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und enthält daher eine konvergente Teilfolge. Damit ist die Menge auf der rechten Seite nichtleer.

Sei nun $x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n)$ für eine beliebige zulässige Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \setminus E_F$. Da F nach Konstruktion in jedem $x_n \notin E_F$ differenzierbar ist, folgt aus Satz 8.4 insbesondere $\nabla F(x_n) \in \partial_C F(x_n)$ und damit nach Lemma 8.3 auch $x^* \in \partial_C F(x)$. Wegen der Konvexität von $\partial_C F(x)$ ist daher auch jede Konvex-Kombination von solchen x^* in $\partial_C F(x)$ enthalten. Damit folgt die Inklusion “ \supset ” der beiden Mengen.

Für die andere Inklusion zeigen wir zunächst, dass für alle $h \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$F^\circ(x; h) - \varepsilon \leq \limsup_{E_F \ni y \rightarrow x} \langle \nabla F(y), h \rangle =: M(h).$$

Nach Definition von $M(h)$ und des Limes superior existiert nun für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$\langle \nabla F(y), h \rangle \leq M(h) + \varepsilon \quad \text{für alle } y \in O_\delta(x) \setminus E_F.$$

Dabei kann δ so klein gewählt werden, dass F Lipschitz-stetig auf $O_\delta(x)$ ist. Insbesondere ist $E_F \cap O_\delta(x)$ eine Nullmenge. Für fast alle $y \in O_{\delta/2}(x)$ ist also F in $y + th$ für fast alle $t \in (0, \frac{\delta}{2\|h\|})$ differenzierbar (dies folgt aus dem Satz von Fubini). Für diese y und t gilt nach dem Mittelwertsatz

$$(8.8) \quad F(y + th) - F(y) = \int_0^1 \langle \nabla F(y + sth), h \rangle ds \leq t(M(h) + \varepsilon),$$

denn $y + sh \in O_\delta(x)$ für alle $s \in (0, t)$ nach Wahl von t . Da F stetig ist auf $O_\delta(x)$, gilt (8.8) sogar für *alle* $y \in O_{\delta/2}(x)$ und *alle* $t \in O_{\delta/2}(x)$. Division durch t und Übergang zum Limes superior ergibt nun die gewünschte Ungleichung. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $F^\circ(x; h) \leq M(h)$.

Nun ist $h \mapsto M(h)$ positiv homogen, subadditiv und unterhalbstetig. Wir sind daher fertig, wenn wir zeigen können, dass wir die Menge auf der rechten Seite von (8.7) (nennen wir sie $\text{co } A$) schreiben können als

$$\text{co } A = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, h \rangle \leq M(h) \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dafür verwenden wir wieder Lemma 8.11 (denn beide Mengen sind konvex und abgeschlossen). Zunächst gilt nach Definition der konvexen Hülle für alle $h \in \mathbb{R}^n$

$$\sup_{x^* \in \text{co } A} \langle x^*, h \rangle = \sup_{\substack{x_i^* \in A \\ \sum_i t_i = 1}} \sum_i t_i \langle x_i^*, h \rangle = \sup_{\sum_i t_i = 1} \sum_i t_i \sup_{x_i^* \in A} \langle x_i^*, h \rangle = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, h \rangle,$$

denn die Summe ist maximal genau dann, wenn jeder Summand maximal ist. Nun gilt

$$M(h) = \limsup_{E_F \ni y \rightarrow x} \langle \nabla F(y), h \rangle = \sup_{E_F \ni x_n \rightarrow x} \langle \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n), h \rangle = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, h \rangle,$$

woraus mit Lemma 8.8 die Aussage folgt. □

Schließlich gilt, dass man ähnlich wie in Lemma 4.6 das Clarke-Subdifferential von Integralfunktionalen mit Lipschitz-stetigen Integranden punktweise darstellen kann; siehe z. B. [Clarke 1990, Theorem 2.7.3, 2.7.5].

Satz 8.17. *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $1 \leq p \leq \infty$ wie in Lemma 3.3. Dann ist für alle $u \in L^p(\Omega)$ mit $q = \frac{p}{p-1}$ ($q = 1$ für $p = \infty$)*

$$\partial_C F(u) \subset \{u^* \in L^q(\Omega) : u^*(x) \in \partial_C f(u(x)) \text{ für fast alle } x \in \Omega\}.$$

Ist f regulär in $u(x)$ für alle $x \in \Omega$, so ist F regulär in u und es gilt Gleichheit.

SEMIGLATTE NEWTON-VERFAHREN

9

Die Proximalpunkt- und Splitting-Verfahren aus Kapitel 7 stellen Verallgemeinerungen von Gradientenverfahren dar und weisen im Allgemeinen auch nur deren lineare Konvergenz auf. In diesem Kapitel suchen wir daher eine Verallgemeinerung des Newton-Verfahrens, für das (lokal) superlineare Konvergenz gilt.

Als Motivation betrachten wir zuerst die allgemeine Form eines Newton-artigen Verfahrens. Sei $F : X \rightarrow Y$ für zwei Banachräume X und Y , und gesucht sei ein $\bar{x} \in X$ mit $F(\bar{x}) = 0$. Ein Newton-artiges Verfahren hat dann die Form

1. Wähle $M_k := M(x^k) \in L(X, Y)$ invertierbar.
2. Löse $M_k s^k = -F(x^k)$;
3. Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.

Wir können uns nun fragen, unter welchen Bedingungen diese Iteration konvergiert, und insbesondere, wann die Konvergenz superlinear ist, d. h. wann gilt

$$(9.1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|_X}{\|x^k - \bar{x}\|_X} = 0.$$

Dafür setzen wir $e^k := x^k - \bar{x}$ und verwenden den Newton-Schritt sowie $F(\bar{x}) = 0$ um zu schreiben

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - \bar{x}\|_X &= \|x^k - M(x^k)^{-1}F(x^k) - \bar{x}\|_X \\ &= \|M(x^k)^{-1} [F(x^k) - F(\bar{x}) - M(x^k)(x^k - \bar{x})]\|_X \\ &= \|M(\bar{x} + e^k)^{-1} [F(\bar{x} + e^k) - F(\bar{x}) - M(\bar{x} + e^k)e^k]\|_X \\ &\leq \|M(\bar{x} + e^k)^{-1}\|_{L(Y, X)} \|F(\bar{x} + e^k) - F(\bar{x}) - M(\bar{x} + e^k)e^k\|_Y. \end{aligned}$$

Also gilt (9.1), falls erfüllt sind

- (i) eine *Regularitätsbedingung*: es existiert ein $C > 0$ mit

$$\|M(\bar{x} + e^k)^{-1}\|_{L(Y, X)} \leq C \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

(ii) eine *Approximationsbedingung*:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|F(\bar{x} + e^k) - F(\bar{x}) - M(\bar{x} + e^k)e^k\|_Y}{\|e^k\|_X} = 0.$$

Dies motiviert die folgende Definition: Wir nennen $F : X \rightarrow Y$ *Newton-differenzierbar* in $x \in X$ mit *Newton-Ableitung* $D_N F(x) \in L(X, Y)$, falls gilt

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - D_N F(x)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Beachte die Unterschiede zur Fréchet-Ableitung: Zum einen wird die Newton-Ableitung in $x+h$ anstelle von x ausgewertet. Wichtiger ist aber, dass kein konkreter Zusammenhang von $D_N F$ mit F gefordert wurde (im Gegensatz zur Fréchet-Ableitung, für die nur die Gâteaux-Ableitung als Kandidat in Frage kam); eine Funktion ist also nur Newton-differenzierbar (oder nicht) in Bezug auf eine konkrete Wahl von $D_N F$. Insbesondere sind Newton-Ableitungen nicht eindeutig!¹

Ist F Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung $D_N F$, so erhält man das *semiglatte Newton-Verfahren*

$$x^{k+1} = x^k - D_N F(x^k)^{-1} F(x^k).$$

Direkt aus der Konstruktion folgt dann die lokal superlineare Konvergenz.

Satz 9.1. Sei $F : X \rightarrow Y$ und $\bar{x} \in X$ mit $F(\bar{x}) = 0$. Ist F Newton-differenzierbar in \bar{x} mit Newton-Ableitung $D_N F(\bar{x})$, und existieren $\delta > 0$ und $C > 0$ mit $\|D_N F(x)^{-1}\|_{L(Y, X)} \leq C$ für alle $x \in O_\delta(\bar{x})$, so konvergiert für alle x^0 hinreichend nahe an \bar{x} das semiglatte Newton-Verfahren superlinear gegen \bar{x} .

Beweis. Der Beweis ist völlig analog zum Konvergenzbeweis für das klassische Newton-Verfahren. Für $x^0 \in O_\delta(\bar{x})$ gilt wie schon gezeigt

$$(9.2) \quad \|e^1\|_X \leq C \|F(\bar{x} + e^0) - F(\bar{x}) - D_N F(\bar{x} + e^0)e^0\|_Y.$$

Sei nun $\varepsilon \in (0, 1)$ beliebig. Aufgrund der Newton-Differenzierbarkeit existiert dann ein $\rho > 0$ mit

$$\|F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) - D_N F(\bar{x} + h)h\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{C} \|h\|_X \quad \text{für alle } \|h\|_X \leq \rho.$$

Wählen wir also x^0 so, dass $\|\bar{x} - x^0\|_X \leq \min\{\delta, \rho\}$ gilt, so folgt aus (9.2) $\|\bar{x} - x^1\|_X \leq \varepsilon \|\bar{x} - x^0\|_X$ und damit durch Induktion $\|\bar{x} - x^k\|_X \leq \varepsilon^k \|\bar{x} - x^0\|_X \rightarrow 0$. Da ε beliebig war, kann man für jeden Schritt ein neues $\varepsilon_k \rightarrow 0$ wählen, und daher ist die Konvergenz superlinear. \square

¹Wir folgen hier [Chen u. a. 2000; Ito und Kunisch 2008; Schiela 2008] und betrachten nur einwertige Newton-Ableitungen (in ersterer Arbeit als *slanting function* eingeführt). Alternativ kann man für jedes $x \in X$ eine Menge $\partial_N F(x)$ festlegen, aus der $M(x)$ zu wählen ist. Gelten die Approximations- und eine Beschränktheitsbedingung *gleichmäßig* für alle $M \in \partial_N F(x)$, so nennt man F *semiglatte*, was die Namensgebung in diesem Kapitel erklärt. Dieser Zugang wird z. B. in [Mifflin 1977; Kummer 1988; Ulbrich 2011] verfolgt.

Der Rest des Kapitels ist nun der Konstruktion von Newton-Ableitungen gewidmet (wobei nicht verschwiegen werden soll, dass in der Praxis der Nachweis der Regularitätsbedingung die deutlich aufwendigere Aufgabe ist). Wir beginnen mit dem offensichtlichen Zusammenhang mit der Fréchet-Differenzierbarkeit.

Satz 9.2. *Ist $F : X \rightarrow Y$ stetig differenzierbar in $x \in X$, so ist F Newton-differenzierbar in x mit Newton-Ableitung $D_N F(x) = F'(x)$.*

Beweis. Für beliebige $h \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y &\leq \|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y \\ &\quad + \|F'(x) - F'(x+h)\|_{L(X,Y)} \|h\|_X, \end{aligned}$$

wobei beide Summanden $o(\|h\|_X)$ sind: der erste nach Definition der Fréchet-Ableitung und der zweite wegen der Stetigkeit von F' . \square

Rechenregeln beweist man nun analog zu denen für Fréchet-Ableitungen. Die Summenregel ist offensichtlich; wir beweisen beispielhaft die Kettenregel.

Satz 9.3. *Seien X, Y, Z Banachräume und $F : X \rightarrow Y$ Newton-differenzierbar in $x \in X$ mit Newton-Ableitung $D_N F(x)$ und $G : Y \rightarrow Z$ Newton-differenzierbar in $y := F(x) \in Y$ mit Newton-Ableitung $D_N G(y)$. Sind $D_N F$ und $D_N G$ gleichmäßig beschränkt in einer Umgebung von x bzw. y , so ist $G \circ F$ Newton-differenzierbar in x mit Newton-Ableitung*

$$D_N(G \circ F)(x) = D_N G(F(x)) \circ D_N F(x).$$

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Satz 2.5 vor. Für $h \in X$ und $g := F(x+h) - F(x)$ ist

$$(G \circ F)(x+h) - (G \circ F)(x) = G(y+g) - G(y).$$

Aus der Newton-Differenzierbarkeit von G folgt nun

$$\|(G \circ F)(x+h) - (G \circ F)(x) - D_N G(y+g)g\|_Z = r_1(\|g\|_Y)$$

mit $r_1(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Aus der Newton-Differenzierbarkeit von F folgt weiter

$$\|g - D_N F(x+h)h\|_Y = r_2(\|h\|_X)$$

mit $r_2(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Insbesondere ist

$$\|g\|_Y \leq \|D_N F(x+h)\|_{L(X,Y)} \|h\|_Y + r_2(\|h\|_X).$$

Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $D_N F$ gilt also $\|g\|_Y \rightarrow 0$ für $\|h\|_X \rightarrow 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \|(G \circ F)(x+h) - (G \circ F)(x) - D_N G(F(x+h))D_N F(x+h)h\|_Z \\ \leq \|G(y+g) - G(y) - D_N G(y+g)g\|_Z \\ \quad + \|D_N G(y+g) [g - D_N F(x+h)h]\|_Z \\ \leq r_1(\|g\|_Y) + \|D_N G(y+g)\|_{L(Y,Z)} r_2(\|h\|_X), \end{aligned}$$

woraus wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $D_N G$ die gewünschte Aussage folgt. \square

Schließlich folgt direkt aus der Definition der Produktnorm und der Newton-Differenzierbarkeit, dass für vektorwertige Funktionen die Newton-Ableitung komponentenweise berechnet werden kann.

Satz 9.4. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig und seien $F_i : X \rightarrow Y_i$ Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung $D_N F_i$ für $1 \leq i \leq m$. Dann ist

$$F : X \rightarrow (Y_1 \times \cdots \times Y_m), \quad x \mapsto (F_1(x), \dots, F_m(x))^T$$

Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung

$$D_N F(x) = (D_N F_1(x), \dots, D_N F_m(x))^T.$$

Bleibt die Frage, wie man für eine gegebene (elementare) Funktion $F : X \rightarrow Y$ Kandidaten für eine Newton-Ableitung bestimmt. Für zwei Klassen von Funktionen kann man diese Frage umfassend beantworten.

$X = \mathbb{R}^n$. Ist $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, so liefert das Clarke-Subdifferential die gesuchten Kandidaten, die wegen Satz 8.16 eine explizite Darstellung haben. Unter zusätzlichen Annahmen sind diese Kandidaten auch tatsächlich Newton-Ableitungen.²

Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stückweise (stetig) differenzierbar* oder *PC¹-Funktion*, falls F stetig ist und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ um x sowie eine endliche Menge $\{F_i : U \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ von stetig differenzierbaren Funktionen existiert mit

$$F(y) \in \{F_i(y)\}_{i \in I} \quad \text{für alle } y \in U.$$

Wir nennen F eine *stetige Auswahl* der F_i in U . Die Menge

$$I(x) := \{i \in I : F(x) = F_i(x)\}$$

heißt *aktive Index-Menge*. Aufgrund der Stetigkeit der F_i gilt $F(y) \neq F_j(y)$ für alle $j \notin I(x)$ und y hinreichend nahe an x . Indizes, die nur auf einer Nullmenge aktiv sind, müssen wir in Folge nicht berücksichtigen. Wir definieren daher die *essentiell aktive Index-Menge*

$$I_e(x) := \{i \in I : x \in \text{cl}(\{y \in U : F(y) = F_i(y)\}^o)\} \subset I(x).$$

PC¹-Funktionen sind stets lokal Lipschitz-stetig; siehe [Scholtes 2012, Corollary 4.1.1].

Satz 9.5. Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise differenzierbar. Dann ist F lokal Lipschitz-stetig mit Konstante $L = \max_{i \in I(x)} L_i$.

Aus Satz 8.16 erhalten wir daher die folgende Darstellung des Clarke-Subdifferentials.

²Dies war die ursprüngliche Herleitung der semiglatte Newton-Verfahren.

Satz 9.6. Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise differenzierbar. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_C F(x) = \text{co}\{\nabla F_i(x) : i \in I_e(x)\}.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Nach Satz 8.16 genügt zu zeigen, dass gilt

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n) : x_n \rightarrow x, x_n \notin E_F \right\} = \{\nabla F_i(x) : i \in I_e(x)\}.$$

Sei dafür $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}^n mit $x_n \rightarrow x$, F differenzierbar in x_n für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\nabla F(x_n) \rightarrow z \in \mathbb{R}^n$. Da F differenzierbar ist in x_n , muss $F(y) = F_{i_n}(y)$ für ein i_n und alle y hinreichend nahe an x_n gelten, woraus $\nabla F(x_n) = \nabla F_{i_n}(x_n)$ folgt. Für $n \in \mathbb{N}$ groß genug können wir darüberhinaus $i_n \in I_e(x)$ (eventuell durch Hinzunahme einer weiteren Nullmenge zu E_F) annehmen. Betrachten wir Teilfolgen $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit konstanten Indizes $i_{n_k} = i \in I_e(x)$ (solche existieren, da $I_e(x)$ endlich ist), so erhalten wir wegen der Stetigkeit von ∇F_i

$$z = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla F(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla F_i(x_{n_k}) \in \{\nabla F_i(x) : i \in I_e(x)\}.$$

Umgekehrt existiert für $\nabla F_i(x)$ mit $i \in I_e(x)$ nach Definition der essentiell aktiven Indizes eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x$ und $F = F_i$ in einer hinreichend kleinen Umgebung aller x_n . Wegen der stetigen Differenzierbarkeit der F_i ist dann $\nabla F(x_n) = \nabla F_i(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\nabla F_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F_i(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla F(x_n). \quad \square$$

Daraus folgt die Newton-Differenzierbarkeit von PC^1 -Funktionen.

Satz 9.7. Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise differenzierbar. Dann ist F Newton-differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und jedes $D_N F(x) \in \partial_C F(x)$ ist eine Newton-Ableitung.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $h \in X$ mit $x + h \in U$. Nach Satz 9.6 hat jedes $D_N F(x + h) \in \partial_C F(x + h)$ die Form

$$D_N F(x + h) = \sum_{i \in I_e(x+h)} t_i \nabla F_i(x + h) \quad \text{für } t_i \geq 0, \quad \sum_{i \in I_e(x+h)} t_i = 1.$$

Da alle F_i stetig sind, gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\|_X$ hinreichend klein $I_e(x + h) \subset I(x + h) \subset I(x)$. Also ist sowohl $F(x + h) = F_i(x + h)$ als auch $F(x) = F_i(x)$ für alle $i \in I_e(x + h)$. Damit folgt aus Satz 9.2

$$|F(x + h) - F(x) - D_N F(x + h)h| = \sum_{i \in I_e(x+h)} t_i |F_i(x + h) - F_i(x) - \nabla F_i(x + h)h| = o(\|h\|),$$

da alle F_i nach Annahme stetig differenzierbar sind. □

Als Anwendung haben wir natürlich die Proximalpunkt-Formulierung von Optimalitätsbedingungen für konvexe Probleme vor Augen.

Beispiel 9.8. Wir betrachten die Minimierung von $F + G$ für $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $G = \|\cdot\|_1$. Analog zur Herleitung des expliziten Splitting-Verfahrens schreiben wir die notwendige Optimalitätsbedingung $0 \in \partial(F + G)(\bar{x})$ äquivalent um als

$$\bar{x} - \text{prox}_{\gamma G}(\bar{x} - \gamma \nabla F(\bar{x})) = 0$$

für $\gamma > 0$ beliebig. Nach Beispiel 6.13 (ii) ist die Proximalpunkt-Abbildung für G komponentenweise gegeben durch

$$[\text{prox}_{\gamma G}(x)]_i = \begin{cases} x_i - \gamma & \text{falls } x_i > \gamma, \\ 0 & \text{falls } x \in [-\gamma, \gamma], \\ x_i + \gamma & \text{falls } x_i < -\gamma, \end{cases}$$

was offensichtlich eine stückweise differenzierbare Funktion ist. Nach Satz 9.6 ist daher (ebenfalls komponentenweise)

$$[\partial_C(\text{prox}_{\gamma G})(x)]_i = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } |x_i| > \gamma, \\ \{0\} & \text{falls } |x_i| < \gamma, \\ [0, 1] & \text{falls } |x_i| = \gamma, \end{cases}$$

und nach Satz 9.7 zusammen mit Satz 9.4 ist eine mögliche Newton-Ableitung

$$[D_N \text{prox}_{\gamma G}(x)h]_i = [\chi_{\{|x| \geq \gamma\}}h]_i := \begin{cases} h_i & \text{falls } |x_i| \geq \gamma, \\ 0 & \text{falls } |x_i| < \gamma. \end{cases}$$

(Welchem Fall wir die Gleichheit zuschlagen, ist dabei willkürlich.) Nun sind $D_N \text{prox}_{\gamma G}(x)$ und $D_N(\nabla F)(x) = \nabla^2 F(x)$ (wegen der stetigen Differenzierbarkeit) lokal gleichmäßig beschränkt, und mit Hilfe der Kettenregel (Satz 9.3) erhalten wir nach etwas Umformen den semiglaten Newton-Schritt

$$(\chi_{\mathcal{A}_k} + \gamma \chi_{\mathcal{J}_k} \nabla^2 F(x^k)) s^k = -x^k + \text{prox}_{\gamma G}(x^k - \gamma \nabla F(x^k)).$$

wobei wir die *aktive* bzw. *inaktive Menge* definiert haben als

$$\mathcal{A}_k := \{i \in \{1, \dots, n\} : |x_i^k - \gamma[\nabla F(x^k)]_i| < \gamma\}, \quad \mathcal{J}_k := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{A}_k.$$

Partitionieren wir auch s^k sowie die rechte Seite in aktive und inaktive Komponenten, setzen die Fallunterscheidung für $\text{prox}_{\gamma G}$ ein, und sortieren das lineare Gleichungssystem so um, dass aktive und inaktive Komponenten zu Blöcken zusammengefasst sind, so erhält der Newton-Schritt die Form einer *aktiven-Mengen-Strategie*; siehe auch [Ito und Kunisch 2008, Kapitel 8.4].

$X = L^p(\Omega)$. In unendlichdimensionalen Funktionenräumen gilt der Satz von Rademacher nicht, so dass das Clarke-Subdifferential keinen algorithmisch nutzbaren Kandidaten für eine Newton-Ableitung mehr liefert. Eine Ausnahme bilden Superpositionsoperatoren von Newton-differenzierbaren skalaren Funktionen, für die die Newton-Ableitung punktweise charakterisiert werden kann.

Wir betrachten wieder für ein offenes und beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Carathéodory-Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (d. h. f ist meßbar in x und stetig in z) sowie für $1 \leq p, q \leq \infty$ den zugehörigen Superpositionsoperator

$$F : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega), \quad [F(u)](x) = f(x, u(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Wir möchten nun die Newton-Ableitung $D_N F$ von F ebenfalls als Superpositionsoperator der Newton-Ableitung $D_N f(x, z)$ von $z \mapsto f(x, z)$ darstellen. Dabei ist die Forderung, $D_N f$ ist ebenfalls Carathéodory-Funktion, zu einschränkend, denn wir wollen auch unstetige Ableitungen zulassen. Für unsere Zwecke genügt eine schwächere Eigenschaft: Eine Funktion heißt *Baire-Carathéodory-Funktion*, wenn sie punktweiser Grenzwert von Carathéodory-Funktionen ist.

Unter bestimmten Wachstumsbedingungen³ an f und $D_N f$ können wir die Newton-Differenzierbarkeit von f auf F übertragen, wobei wir wieder eine zwei-Norm-Diskrepanz berücksichtigen müssen.

Satz 9.9. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion. Es gelte weiterhin

- (i) $z \mapsto f(x, z)$ ist gleichmäßig Lipschitz-stetig für fast alle $x \in \Omega$ und $f(x, 0)$ ist beschränkt;
- (ii) $z \mapsto f(x, z)$ ist Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung $z \mapsto D_N f(x, z)$ für fast alle $x \in \Omega$;
- (iii) $D_N f$ ist eine gleichmäßig beschränkte Baire-Carathéodory-Funktion.

Dann ist für alle $1 \leq p < q < \infty$ der zugehörige Superpositionsoperator $F : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ Newton-differenzierbar mit Newton-Ableitung

$$D_N F : L^q(\Omega) \rightarrow L(L^q(\Omega), L^p(\Omega)), \quad [D_N F(u)h](x) = D_N f(x, u(x))h(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$ und alle $h \in L^q(\Omega)$.

Beweis. Zunächst folgt aus der gleichmäßigen Lipschitz-Stetigkeit in z zusammen mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f(x, z)| \leq |f(x, 0)| + L|z| \leq C + L|z|^{p/p} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega, z \in \mathbb{R},$$

und damit die Wachstumsbedingung für alle $1 \leq p < \infty$. Wegen der stetigen Einbettung $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p < q < \infty$ ist also $F : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ nach Satz 2.8 wohldefiniert und stetig.

³die deutlich abgeschwächt werden können; siehe [Schiela 2008, Proposition A.1]

Ist nun $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, so ist $x \mapsto D_N f(x, u(x))$ nach Annahme Grenzwert einer Folge von meßbaren Funktionen und damit selber meßbar. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit folgt nun insbesondere die Wachstumsbedingung für $p' = q$ und $q' = q - p$. Analog zum Beweis von Satz 2.9 erhält man daraus, dass der zugehörige Superpositionsoperator $D_N F : L^q(\Omega) \rightarrow L^s(\Omega)$ für $s := \frac{pq}{q-p}$ wohldefiniert und stetig ist, und deshalb für $u \in L^q(\Omega)$ durch $h \mapsto D_N F(u)h$ ein linearer und beschränkter Operator $D_N F(u) : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ definiert wird.

Um zu zeigen, dass $D_N F(u)$ eine Newton-Ableitung von F in $u \in L^q(\Omega)$ ist, betrachten wir das punktweise Residuum

$$r : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad r(x, z) := \begin{cases} \frac{|f(x, z) - f(x, u(x)) - D_N f(x, z)(z - u(x))|}{|z - u(x)|} & \text{falls } z \neq u(x), \\ 0 & \text{falls } z = u(x). \end{cases}$$

Da f Carathéodory- und $D_N f$ Baire–Carathéodory-Funktion ist, ist für beliebiges $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar auch $x \mapsto r(x, \tilde{u}(x)) =: R(\tilde{u})$ meßbar (Summe, Produkt und Quotient von meßbaren Funktionen ist meßbar). Für $\tilde{u} \in L^q(\Omega)$ folgt aus der gleichmäßigen Lipschitz-Stetigkeit von f und der gleichmäßigen Beschränktheit von $D_N f$

$$(9.3) \quad |[R(\tilde{u})](x)| = \frac{|f(x, \tilde{u}(x)) - f(x, u(x)) - D_N f(x, \tilde{u}(x))(\tilde{u}(x) - u(x))|}{|\tilde{u}(x) - u(x)|} \leq L + C$$

und damit $R(\tilde{u}) \in L^\infty(\Omega)$. Also ist der Superpositionsoperator $R : L^q(\Omega) \rightarrow L^s(\Omega)$ wohldefiniert. Sei nun $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^q(\Omega)$ eine Folge mit $u_n \rightarrow u \in L^q(\Omega)$. Dann existiert eine Teilfolge, die wir wieder mit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, mit $u_n(x) \rightarrow u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Da $z \mapsto f(x, z)$ Newton-differenzierbar ist, gilt nach Definition $r(x, u_n(x)) \rightarrow 0$ punktweise fast überall. Zusammen mit der Beschränktheit (9.3) gilt daher nach dem Satz von Lebesgue auch $R(u_n) \rightarrow 0$ in $L^s(\Omega)$ (wegen Eindeutigkeit des Grenzwertes für die gesamte Folge). Also folgt für beliebige $\tilde{u} \in L^q(\Omega)$ wegen $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$ aus der Hölderschen Ungleichung

$$\|F(\tilde{u}) - F(u) - D_N F(\tilde{u})(\tilde{u} - u)\|_{L^p} = \|R(\tilde{u})(\tilde{u} - u)\|_{L^p} \leq \|R(\tilde{u})\|_{L^s} \|\tilde{u} - u\|_{L^q}.$$

Setzen wir nun $\tilde{u} := u + h$ für $h \in L^q(\Omega)$ mit $\|h\|_{L^q} \rightarrow 0$, so ist dies wegen $\|R(u+h)\|_{L^s} \rightarrow 0$ genau die Definition der Newton-Differenzierbarkeit von F in u . \square

Aufgrund der zwei-Norm-Diskrepanz können wir das semiglatte Newton-Verfahren im Funktionenraum in der Regel nicht direkt auf Proximalpunkt-Formulierungen anwenden, weshalb wir auf die Moreau–Yosida-Regularisierung ausweichen müssen.

Beispiel 9.10. Wir betrachten analog zu Beispiel 9.8 die Minimierung von $F + G$ für $F : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $G = \|\cdot\|_{L^1}$. Die Proximalpunktformulierung der notwendigen Optimalitätsbedingung $0 \in \partial(F + G)(\tilde{u})$,

$$\tilde{u} - \text{prox}_{\gamma G}(\tilde{u} - \gamma \nabla F(\tilde{u})) = 0,$$

müssen wir nun als Gleichung in $L^2(\Omega)$ auffassen, aber $\text{prox}_{\gamma G}$ ist *nicht* Newton-differenzierbar von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$. Wir ersetzen daher in der äquivalenten Optimalitätsbedingung

$$\begin{cases} -\bar{p} = \nabla F(\bar{u}), \\ \bar{u} \in \partial G^*(\bar{p}), \end{cases}$$

das Subdifferential von G^* durch die Moreau-Yosida-Regularisierung $H_\gamma := (\partial G^*)_\gamma$, welche nach Folgerung 6.14 und Beispiel 6.17 punktweise gegeben ist durch $[H_\gamma(p)](x) = h_\gamma(p(x))$ für

$$h_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\gamma}(t-1) & \text{falls } t > 1, \\ 0 & \text{falls } t \in [-1, 1], \\ \frac{1}{\gamma}(t+1) & \text{falls } t < -1. \end{cases}$$

Diese Funktion ist offensichtlich Lipschitz-stetig und stückweise differenzierbar. Nach Satz 9.6 ist daher

$$\partial_C h_\gamma(t) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{\gamma} \right\} & \text{falls } |t| > 1, \\ \{0\} & \text{falls } |t| < 1, \\ \left[0, \frac{1}{\gamma} \right] & \text{falls } |t| = 1, \end{cases}$$

und nach Satz 9.7 zusammen mit Satz 9.4 ist eine mögliche Newton-Ableitung

$$D_N h_\gamma(t)h = \frac{1}{\gamma} \chi_{\{|t| \geq 1\}} h = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} h & \text{falls } |t| \geq 1, \\ 0 & \text{falls } |t| < 1. \end{cases}$$

Die Funktion $D_N h_\gamma$ ist nun gleichmäßig beschränkt und kann, wie man leicht zeigt, punktweise durch eine Folge von stetigen Funktionen approximiert werden. Also ist $H_\gamma : L^p(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ Newton-differenzierbar für alle $p > 2$, und eine Newton-Ableitung ist gegeben durch

$$[D_N H_\gamma(p)h](x) = \frac{1}{\gamma} \chi_{\{|p| \geq 1\}}(x) h(x).$$

Angenommen, $\bar{p} = -\nabla F(\bar{u}) \in L^p(\Omega)$ für ein $p > 2$. Dann ist nach Satz 9.2 und der Kettenregel (Satz 9.3) die regularisierte Optimalitätsbedingung

$$\bar{u} - H_\gamma(-\nabla F(\bar{u})) = 0$$

Newton-differenzierbar, und wir erhalten den semiglatten Newton-Schritt

$$\left(\text{Id} + \frac{1}{\gamma} \chi_{\{|\nabla F(\mathbf{u}^k)| \geq 1\}} \nabla^2 F(\mathbf{u}^k) \right) s^k = -\mathbf{u}^k + H_\gamma(-\nabla F(\mathbf{u}^k)).$$

In der Praxis hängt der Konvergenzbereich des Newton-Verfahrens von γ ab. Man löst daher oft eine Folge von Problemen mit abnehmendem γ , wobei man die Lösung des vorhergehenden Problems als Startwert für das folgende nimmt.

LITERATUR

- J. Appell und P. Zabrejko (1990). *Nonlinear Superposition Operators*. Cambridge University Press, New York.
- H. H. Bauschke und P. L. Combettes (2011). *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York. DOI: [10.1007/978-1-4419-9467-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9467-7).
- A. Beck und M. Teboulle (2009). *A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems*. SIAM J. Imaging Sci. 2.1, S. 183–202. DOI: [10.1137/080716542](https://doi.org/10.1137/080716542).
- M. Brokate (2014). „Konvexe Analysis und Evolutionsprobleme“. Vorlesungsskript, Zentrum Mathematik, TU München. URL: http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/cev_ss14.pdf.
- A. Cegielski (2012). *Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces*. Bd. 2057. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-642-30901-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-30901-4).
- A. Chambolle und T. Pock (2011). *A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging*. J Math Imaging Vis 40.1, S. 120–145. DOI: [10.1007/s10851-010-0251-1](https://doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1).
- X. Chen, Z. Nashed und L. Qi (2000). *Smoothing methods and semismooth methods for nondifferentiable operator equations*. SIAM J. Numer. Anal. 38.4, S. 1200–1216. DOI: [10.1137/S0036142999356719](https://doi.org/10.1137/S0036142999356719).
- F. Clarke (2013). *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer, London. DOI: [10.1007/978-1-4471-4820-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3).
- F. H. Clarke (1990). *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Bd. 5. Classics Appl. Math. SIAM, Philadelphia, PA. DOI: [10.1137/1.9781611971309](https://doi.org/10.1137/1.9781611971309).
- C. Clason (2015). „Funktionalanalysis I“. Vorlesungsskript, Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen. URL: <https://www.uni-due.de/~adf040p/skripte/FunktAnSkript15.pdf>.
- E. DiBenedetto (2002). *Real analysis*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. DOI: [10.1007/978-1-4612-0117-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0117-5).
- M. Dobrowolski (2010). *Angewandte Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin. DOI: [10.1007/978-3-642-15269-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-15269-6).

- J. Eckstein und D. P. Bertsekas (1992). *On the Douglas–Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators*. Mathematical Programming 55.1-3, S. 293–318. DOI: [10.1007/BF01581204](https://doi.org/10.1007/BF01581204).
- I. Ekeland und R. Témam (1999). *Convex Analysis and Variational Problems*. Bd. 28. Classics Appl. Math. SIAM, Philadelphia, PA. DOI: [10.1137/1.9781611971088](https://doi.org/10.1137/1.9781611971088).
- B. He und X. Yuan (2012). *Convergence analysis of primal-dual algorithms for a saddle-point problem: from contraction perspective*. SIAM J. Imag. Sci. 5.1, S. 119–149. DOI: [10.1137/100814494](https://doi.org/10.1137/100814494).
- J. Heinonen (2005). *Lectures on Lipschitz analysis*. Bd. 100. Rep. Univ. Jyväskylä Dept. Math. Stat. University of Jyväskylä. URL: <http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep100.pdf>.
- K. Ito und K. Kunisch (2008). *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*. Bd. 15. Advances in Design and Control. SIAM, Philadelphia, PA. DOI: [10.1137/1.9780898718614](https://doi.org/10.1137/1.9780898718614).
- B. Kummer (1988). *Newton’s method for non-differentiable functions*. Mathematical Research 45, S. 114–125.
- R. Mifflin (1977). *Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization*. SIAM J. Control Optimization 15.6, S. 959–972. DOI: [10.1137/0315061](https://doi.org/10.1137/0315061).
- Y. E. Nesterov (1983). *A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$* . Soviet Math. Doklad. 27.2, S. 372–376.
- Y. Nesterov (2004). *Introductory Lectures on Convex Optimization*. Bd. 87. Applied Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA. DOI: [10.1007/978-1-4419-8853-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8853-9).
- N. Parikh und S. Boyd (2014). *Proximal algorithms*. Foundations and Trends in Optimization 1.3, S. 123–231. DOI: [10.1561/2400000003](https://doi.org/10.1561/2400000003).
- M. Růžička (2004). *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin. DOI: [10.1007/3-540-35022-5](https://doi.org/10.1007/3-540-35022-5).
- A. Schiela (2008). *A simplified approach to semismooth Newton methods in function space*. SIAM J. Opt. 19.3, S. 1417–1432. DOI: [10.1137/060674375](https://doi.org/10.1137/060674375).
- W. Schirotzek (2007). *Nonsmooth Analysis*. Universitext. Springer, Berlin. DOI: [10.1007/978-3-540-71333-3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71333-3).
- S. Scholtes (2012). *Introduction to piecewise differentiable equations*. Springer Briefs in Optimization. Springer, New York. DOI: [10.1007/978-1-4614-4340-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4340-7).
- M. Ulbrich (2011). *Semismooth Newton Methods for Variational Inequalities and Constrained Optimization Problems in Function Spaces*. Bd. 11. MOS-SIAM Series on Optimization. SIAM, Philadelphia, PA. DOI: [10.1137/1.9781611970692](https://doi.org/10.1137/1.9781611970692).
- D. Werner (2011). *Funktionalanalysis*. 7. Aufl. Springer-Verlag, Berlin. DOI: [10.1007/978-3-642-21017-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-21017-4).