



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Leggi di conservazione scalari e teorema di Kruzkov

Relatore: Prof. Gianluca Crippa

Candidato: Marcello Carioni

Anno Accademico 2008/2009

Indice

Introduzione	iii
1 Leggi di conservazione: esempi preliminari	1
1.1 Interpretazione fisica	1
1.2 Alcuni esempi di applicazioni	2
1.2.1 Un modello di traffico stradale	2
1.2.2 p -sistema	4
1.2.3 Equazioni di Eulero	4
1.2.4 Equazione di Burgers	5
1.3 Non esistenza di soluzioni regolari	6
1.3.1 Metodo della caratteristica	6
1.3.2 Equazione di Burgers: perdita di regolarità delle soluzioni	7
2 Soluzioni deboli e problemi di non unicità	10
2.1 Definizioni preliminari	10
2.2 Condizione di Rankine-Hugoniot	12
2.2.1 Non unicità delle soluzioni deboli	14
3 Soluzioni entropiche e teorema di Kruzkov	17
3.1 Soluzioni entropiche	17
3.1.1 Soluzione di Kruzkov	17
3.1.2 Soluzione entropica	19
3.2 Teorema di Kruzkov: esistenza e unicità	21
3.2.1 Unicità	21
3.2.2 Esistenza	22
3.3 Definizioni e lemmi preliminari	23
3.4 Teorema di Kruzkov:	
dimostrazione dell'unicità	28
3.4.1 Passo 1	28
3.4.2 Passo 2	34

3.5	Teorema di esistenza:	
	metodo di approssimazione di viscosità	37
3.5.1	Passo 1	37
3.5.2	Passo 2	39
3.5.3	Passo 3	42
3.5.4	Passo 4	45
Bibliografia		47

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è lo studio di una classe di equazioni differenziali alle derivate parziali del tipo

$$u_t + F(u)_x = 0.$$

Tali equazioni differenziali sono chiamate leggi di conservazione e appaiono in maniera naturale nella modellizzazione di fenomeni fisici in cui esiste una certa grandezza che si conserva, il cui flusso attraverso i confini della regione che stiamo considerando è regolato dalla funzione F . Per quanto appena detto, l'importanza applicativa dello studio delle leggi di conservazione è evidente: modelli di questo tipo vengono usati, ad esempio, per prevedere l'evoluzione del traffico su un'autostrada, in idraulica per studiare il comportamento del flusso dell'acqua all'interno di tubature, in dinamica dei gas con lo studio del *p-sistema* e delle equazioni di Eulero e in generale in tutti i problemi in cui è possibile individuare una quantità che si conserva (massa, energia, quantità di moto o semplicemente il numero di automobili su un tratto autostradale).

L'obiettivo che ci si pone studiando equazioni di questo tipo è quello canonico: data una distribuzione iniziale nello spazio della grandezza che stiamo considerando, vogliamo riuscire a prevedere la sua evoluzione nel futuro. Basta però studiare esempi di leggi di conservazione (come l'equazione di Burgers) per comprendere come in generale il problema non sia di facile trattazione. Si osserva infatti che, analizzando il problema da un punto di vista teorico, la soluzione regolare del problema ai valori iniziali non è in generale definita per tutti i tempi e che, da un punto di vista pratico, il fenomeno fisico modellizzato dalla legge di conservazione evolve in maniera discontinua. Appare quindi evidente che per interpretare correttamente fenomeni di questo tipo non è sufficiente limitarsi al concetto di soluzione classica. In questo caso, infatti, otterremmo solo soluzioni di classe C^1 che in generale non sono definite globalmente nel tempo e che quindi non sono utili a descrivere il fenomeno.

Lo studio di tali problematiche è svolto nel primo capitolo ed è anticipato da alcuni esempi di leggi di conservazione applicate a problemi fisici.

Nel secondo capitolo si mostra che, estendendo il concetto di soluzione anche a funzioni discontinue con la nozione di soluzione debole, si lavorerà in una più grande classe di soluzioni in cui sarà garantita l'esistenza. Si illustrano inoltre le conseguenze che questa nuova definizione di soluzione porta con sé; infatti pur ammettendo che la soluzione possa essere discontinua ricaveremo le condizioni di Rankine-Hugoniot che impongono severe restrizioni alle discontinuità che una soluzione può avere.

A questo punto è naturale chiedersi se la definizione data (quella di soluzione debole) sia adeguata. Possiamo affermare che in questa classe di soluzioni si troverà sempre una unica soluzione al problema di Cauchy relativo alla legge di conservazione?

Nella seconda parte del capitolo si mostra con degli esempi che in generale ciò non è vero. Tale problema è fortemente rilevante anche nelle applicazioni, perchè, di fronte a un fenomeno fisico, non si sarebbe in grado di decidere con certezza in che modo evolverà.

All'inizio del capitolo terzo si risolve questo problema proponendo un criterio di selezione della soluzione. Tale criterio deriva da considerazioni di carattere fisico; si definisce infatti una funzione entropia e un flusso di entropia, e si concorderà di scegliere come soluzione accettabile quella tale per cui l'entropia tende a diminuire (notiamo che la definizione è in contrasto con le note proprietà dell'entropia fisica secondo cui l'entropia dovrebbe aumentare, perchè per comodità e per tradizione si conviene di prendere l'opposto). Si giunge così ad una nuova definizione di soluzione, chiamata soluzione entropica del problema di Cauchy relativo alla legge di conservazione considerata.

Nel prosieguo del capitolo si dimostra che la soluzione entropica esiste ed è unica. Il teorema di unicità fa riferimento alla dimostrazione presentata da S.N. Kruzkov nell'articolo *First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables* [6] e si basa sulla tecnica dello sdoppiamento delle variabili, mentre la dimostrazione dell'esistenza utilizza il classico argomento di approssimazione della viscosità.

Capitolo 1

Leggi di conservazione: esempi preliminari

1.1 Interpretazione fisica

Consideriamo una funzione vettoriale a valori in \mathbb{R}^m :

$$u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t)) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T])$$

con $T \in \mathbb{R}^+$ arbitrario. Le componenti di u possono essere viste come le densità di grandezze conservate in una certa regione dello spazio che stiamo considerando.

Sia ora $U \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n con frontiera regolare. Possiamo quindi indicare con

$$\int_U u(x, t) dx \quad (1.1)$$

la quantità totale della grandezza esaminata in un determinato istante di tempo all'interno di U . Supponiamo che il flusso della sostanza sia regolato da una funzione $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{M}^{m \times n}$ che controlla la variazione della sostanza attraverso la frontiera di U e che dipende solamente dalle densità della sostanza in un dato punto. Per quanto detto possiamo quindi assumere che:

$$\frac{d}{dt} \int_U u dx = - \int_{\partial U} F(u) \nu dS \quad (1.2)$$

dove ν indica il versore normale uscente da ∂U . Riscrivendo (1.2) grazie al *teorema della divergenza* otteniamo:

$$\int_U u_t dx = - \int_{\partial U} F(u) \nu dS = - \int_U \operatorname{div} F(u) dx \quad (1.3)$$

Dato che ciò vale per qualsiasi $U \subset \mathbb{R}^n$ limitato e con frontiera regolare otteniamo il sistema di leggi di conservazione:

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, T] \quad (1.4)$$

e il relativo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} F(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ u = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.5)$$

dove $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0m})$ descrive la distribuzione iniziale di $u = (u_1, \dots, u_m)$.

Ad oggi, per i sistemi di leggi di conservazione in più variabili spaziali, non esiste ancora una trattazione matematica esaustiva, perciò prenderemo in considerazione sistemi di leggi di conservazione scalari in una variabile spaziale, del tipo:

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, T] \quad (1.6)$$

e il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, T] \\ u = u_0 & \text{in } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.7)$$

dove $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la *funzione flusso* di classe C^∞ e $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la distribuzione iniziale, sono dati e $u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ è l'incognita del problema.

1.2 Alcuni esempi di applicazioni

Le *leggi di conservazione* si ritrovano in numerosi campi come modellizzazione di fenomeni fisici. Vediamo alcuni esempi.

1.2.1 Un modello di traffico stradale

Per prima cosa vediamo come le leggi di conservazione si possono ritrovare quando si modella una situazione reale, come per esempio l'evoluzione del traffico su un'autostrada.

Possiamo indicare la densità del traffico con la variabile

$$\rho = [\text{numero di auto per chilometro di strada}]$$

che rappresenterà la funzione u definita in maniera più generale nella sezione precedente. La densità ρ è una funzione di x , che indica il punto sull'autostrada in cui si vuole misurare la densità e del tempo t . Fissiamo ora due punti qualsiasi sull'autostrada $a < b$ e osserviamo che in analogia con il ragionamento fatto in generale, la quantità totale di auto nel tratto $[a, b]$ all'istante t è:

$$\int_a^b \rho(x, t) dx.$$

A differenza del caso generale adesso stiamo lavorando in una dimensione spaziale, quindi i calcoli risultano semplificati. La variazione del numero di macchine è dovuta solo alle macchine che passano nei punti a e b ; quindi possiamo affermare che

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \rho(x, t) dx = F(a, t) - F(b, t),$$

dove $F(a, t)$ rappresenta il flusso di auto entrante in a , mentre $F(b, t)$ è il flusso di auto uscente da b all'istante t . Da cui usando il teorema fondamentale del calcolo (che non è altro che il teorema della divergenza in dimensione 1) otteniamo:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) dx.$$

Perciò, dato che la scelta dell'intervallo $[a, b]$ è arbitraria, otteniamo la legge di conservazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = 0. \quad (1.8)$$

Tuttavia per ricondurci alle legge di conservazione (1.6) dobbiamo riuscire ad esprimere il flusso F in funzione della sola densità ρ . A tale scopo osserviamo che, indicando con v la velocità del traffico in un determinato punto (x, t) , possiamo assumere che la funzione flusso F sia data dalla relazione:

$$F = \rho v.$$

Facciamo inoltre l'ipotesi semplificatrice che la velocità v dei veicoli dipenda solo dalla densità del traffico, cioè $v = v(\rho)$. Tale funzione, che può essere ottenuta per via sperimentale, si tratterà intuitivamente di una funzione decrescente; infatti se la densità ρ del traffico è piccola, le auto viaggeranno più velocemente e quando la densità raggiungerà una soglia critica (ρ_{max}), le auto si troveranno incolonnate con un paraurti attaccato al successivo e nessuna potrà più muoversi: cioè $v = 0$. Possiamo perciò definire una funzione

di flusso per il nostro modello del tipo: $F(\rho) = \rho v(\rho)$, che sostituita in (1.8) ci permette di ottenere la legge di conservazione nella forma (1.6):

$$\rho_t + F(\rho)_x = 0.$$

Osserviamo che dando una densità iniziale $\rho_0(x)$ e risolvendo la precedente, si ottengono i valori $\rho(x, t)$ per ogni istante successivo di tempo, perciò con tale equazione è possibile prevedere l'evoluzione del traffico in un'autostrada entro i limiti imposti dal modello matematico.

1.2.2 p -sistema

Il p -sistema è un sistema di due leggi di conservazione della forma:

$$\begin{cases} v_t - u_x & = 0 \\ u_t - p(v)_x & = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è data tale che $p' > 0$ e $p'' > 0$, mentre la funzione vettoriale $w = (u, v)$ è l'incognita. E' immediato vedere che in questo caso la funzione flusso è:

$$F(z) = (-z_2, -p(z_1)), \quad z = (z_1, z_2).$$

Tale sistema è la generalizzazione del seguente modello usato in dinamica dei gas:

$$\begin{cases} v_t - u_x & = 0 \\ u_t - \left(\frac{k}{v^\gamma}\right)_x & = 0 \end{cases}$$

con $k > 0$ e $\gamma \geq 1$ costanti. In tali equazioni u rappresenta la velocità del gas e v il suo volume specifico ($v = \rho^{-1}$, indicando con ρ la densità). In particolare queste ultime due equazioni rappresentano la conservazione della massa e della quantità di moto del sistema.

1.2.3 Equazioni di Eulero

Le equazioni di Eulero per un gas comprimibile in una dimensione sono:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x & = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x & = 0 \\ (\rho E)_t + (\rho E u + P u)_x & = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. In cui ρ indica la densità di massa, u la velocità del gas, E l'energia per unità di massa e P la pressione. Possiamo assumere che:

$$E = e + \frac{u^2}{2}.$$

Dove e rappresenta l'energia interna per unità di massa e il termine $\frac{u^2}{2}$ è l'energia cinetica per unità di massa. Inoltre possiamo supporre che la pressione P sia una funzione nota

$$P = P(\rho, e)$$

di ρ e e . Si può osservare che le tre *equazioni di Eulero* sono rispettivamente la legge di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia (rispettivamente) in *coordinate euleriane*. Se indichiamo con $w = (w_1, w_2, w_3) = (\rho, \rho u, \rho E)$ l'incognita del sistema, mostriamo che le equazioni di Eulero sono effettivamente un sistema di leggi di conservazione del tipo

$$w_t + F(w)_x = 0, \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, T].$$

E' immediato infatti verificare che definendo $F = (F_1, F_2, F_3)$ come

$$\begin{cases} F_1(z) &= z_2 \\ F_2(z) &= \frac{(z_2)^2}{z_1} + P\left(z_1, \frac{z_3}{z_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right) \\ F_3(z) &= \frac{z_2 z_3}{z_1} + P\left(z_1, \frac{z_3}{z_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right) \frac{z_2}{z_1} \end{cases}$$

con $z_1 > 0$, F risulta essere di classe C^∞ ed è il flusso corrispondente alle *equazioni di Eulero*.

1.2.4 Equazione di Burgers

Se ora consideriamo le leggi di conservazione scalari, uno dei modelli più semplici e dalle proprietà più interessanti è rappresentato dall'equazione di Burgers.

Inizialmente il modello proposto fu un'equazione parabolica del tipo

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx},$$

detta *equazione di Burgers viscosa*, che intendeva modellizzare il comportamento di un fluido in presenza di attrito viscoso. Successivamente però, molti studi si concentrarono sul problema privato del termine viscoso e espresso nella forma di una legge di conservazione:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0. \tag{1.10}$$

La (1.10) è detta *equazione di Burgers non viscosa* o semplicemente *equazione di Burgers* ed è evidentemente una legge di conservazione con funzione di flusso $F(z) = \frac{z^2}{2}$.

Più avanti si analizzeranno le proprietà di tale legge di conservazione, legate soprattutto alla perdita di regolarità delle soluzioni.

1.3 Non esistenza di soluzioni regolari

Consideriamo il problema di Cauchy (1.7) in una variabile spaziale:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, T] \\ u = u_0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

La prima domanda che ci si può porre è se tale problema ai valori iniziali ammette sempre una soluzione definita globalmente per ogni $t \geq 0$. La risposta è in generale negativa, infatti se supponiamo di considerare soluzioni di (1.7) in senso classico, cioè funzioni di classe $C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$ che soddisfano la (1.7) puntualmente, allora bisogna concludere che in generale non esiste una soluzione in senso classico di (1.7) definita globalmente. Ciò risulta evidente con il metodo della caratteristica.

1.3.1 Metodo della caratteristica

Consideriamo una legge di conservazione scalare:

$$u_t + F(u)_x = 0, \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, T]. \quad (1.11)$$

Supponiamo ora che u sia una soluzione di classe C^1 in $\mathbb{R} \times (0, T)$ e sia $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T]$. Possiamo considerare l'unica curva $x(t)$ soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria:

$$\begin{cases} x'(t) = F'(u(x(t), t)) & \text{in } \mathbb{R} \times [0, T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

La curva così definita è detta *curva caratteristica* per la legge di conservazione scalare (1.11). Osserviamo inoltre che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= u_x(x(t), t)x'(t) + u_t(x(t), t) \\ &= u_x(x(t), t)F'(u(x(t), t)) + u_t(x(t), t) = 0. \end{aligned}$$

Perciò deduciamo immediatamente che la soluzione u è costante lungo la *curva caratteristica* $x(t)$. In aggiunta a ciò, ritornando alla definizione della curva caratteristica, si nota che, essendo $u(x(t), t)$ costante, la curva caratteristica è una retta passante per (x_0, t_0) con coefficiente angolare $1/F'(u(x(t_0), t_0))$ nel piano (x, t) .

1.3.2 Equazione di Burgers: perdita di regolarità delle soluzioni

Avendo introdotto il metodo della caratteristica per le leggi di conservazione possiamo ritornare all'equazione di Burgers

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad (1.12)$$

per osservare che non è possibile definire una soluzione regolare globalmente. Supponiamo quindi che la soluzione u dell'equazione di Burgers sia di classe C^1 . Possiamo applicare il metodo della caratteristica con la funzione di flusso F definita come segue:

$$F(z) = \frac{z^2}{2}.$$

In questo caso specifico, dato che $x'(t) = F'(u(x(t), t)) = u(x(t), t)$, la curva caratteristica passante per (x_0, t_0) è una retta con coefficiente angolare $1/u(x(t), t)$ nel piano (x, t) . Da ciò deduciamo che:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \forall t \leq 0 \quad u(x_1, t) \geq u(x_2, t),$$

altrimenti le rette caratteristiche passanti per x_1 e x_2 si incontrerebbero in un qualche punto (\bar{x}, \bar{t}) . Ciò però non è possibile, perché in quel punto la soluzione $u(x, t)$ dovrebbe assumere due valori diversi, ciascuno relativo a una delle due rette caratteristiche.

Perciò, in particolare, se consideriamo un problema di Cauchy con dato iniziale $u_0(x)$ e esiste \bar{x} tale che $u'_0(\bar{x}) < 0$ allora (1.10) non può avere una soluzione regolare definita globalmente. Infatti considerando $x_1 = \bar{x}$ e x_2 sufficientemente vicino a x_1 e tale che $x_2 > x_1$, allora $u(x_1, t) \geq u(x_2, t)$ dato che $u'_0(\bar{x}) < 0$, quindi le rette caratteristiche passanti per $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ devono intersecarsi in tempo finito.

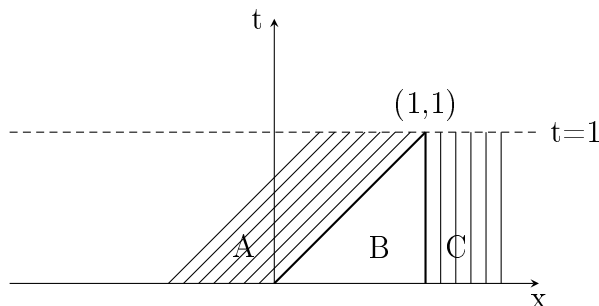
Vediamo ora un esempio pratico in cui tale situazione si verifica. Consideriamo un problema di Cauchy sempre relativo all'equazione di Burgers (1.10). Scegliamo come condizione iniziale $u_0(x)$ tale che:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Limitiamoci a considerare la regione $0 \leq t \leq 1$.

Osserviamo che nella regione A (Figura 1.1) le rette caratteristiche hanno coefficiente angolare uguale a 1 dato che $u_0(x) = 1$, mentre nella regione

Figura 1.1: Rette caratteristiche per l'equazione di Burgers



C hanno coefficiente angolare infinito essendo $u_0(x) = 0$. Invece nella regione B il coefficiente angolare tende a $+\infty$ per $u_0(x)$ che tende a zero. Si osserva quindi che nel punto $(1, 1)$ si incontrano due rette caratteristiche, perciò in quel punto la soluzione è sovradeterminata e quindi non può esistere una soluzione definita globalmente per $t > 1$. Grazie al metodo delle caratteristiche possiamo trovare analiticamente una soluzione C^1 per $t < 1$:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < t \\ (1 - x)/(1 - t) & t \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che anche dall'espressione analitica risulta evidente che per $t = 1$ la soluzione C^1 determinata con il metodo delle caratteristiche non è definita.

Più in generale, possiamo considerare un problema di Cauchy relativo a una legge di conservazione scalare generica:

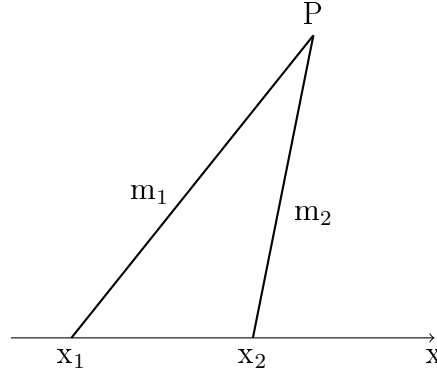
$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, T] \\ u = u_0 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ricordiamo che in questo caso le caratteristiche sono rette di coefficiente angolare $1/F'(u(x(t), t))$. Ragionando in modo analogo al caso particolare delle equazioni di Burgers, si ha che se esistono $x_1 < x_2$ tali che

$$0 < m_1 = \frac{1}{F'(u_0(x_1))} < \frac{1}{F'(u_0(x_2))} = m_2,$$

allora le rette caratteristiche passanti per $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ si intersecano in un punto P per $t > 0$ (Figura 1.2). Osserviamo che la conclusione a cui siamo arrivati, ossia l'impossibilità in generale di trovare una soluzione C^1 definita globalmente, è indipendente dalle proprietà di regolarità del dato iniziale.

Figura 1.2: Intersezione di caratteristiche



Esaminiamo analiticamente il caso di un problema di Cauchy per una legge di conservazione scalare generica in cui u'_0 è negativa in qualche punto e $F'' > 0$. Osserveremo che sotto queste condizioni non è possibile avere una soluzione della legge di conservazione definita globalmente. Sia $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T]$. Indichiamo quindi con $y(x, t)$ il punto di intersezione tra la retta caratteristica passante per (x, t) e l'asse delle x . Dato che il coefficiente angolare della caratteristica è $F'(u)$ valutato in un punto della retta in questione, otteniamo:

$$tF'(u) = x - y.$$

Da cui ricaviamo un'espressione implicita della soluzione u :

$$u(x, t) = u_0(x - tF'(u(x, t))).$$

Supponiamo ora che u_0 sia almeno di classe C^1 ; allora possiamo applicare il teorema della funzione implicita ed ottenere, per t sufficientemente piccolo,

$$u_t = -\frac{F'(u)u'_0}{1 + u'_0F''(u)t} \quad \text{e} \quad u_x = -\frac{u'_0}{1 + u'_0F''(u)t}.$$

Osserviamo quindi che se u'_0 è negativa in qualche punto e $F'' > 0$, allora u_x e u_t non si mantengono limitati quando $1 + u'_0F''(u)t$ tende a zero.

Concludiamo osservando che se pretendiamo di trovare una soluzione C^1 al problema di Cauchy (1.7) dobbiamo accontentarci (come dimostrano gli esempi precedenti) di una soluzione definita localmente nel tempo.

Capitolo 2

Soluzioni deboli e problemi di non unicità

2.1 Definizioni preliminari

Nell'ultima parte del capitolo precedente abbiamo visto che in generale non è possibile trovare una soluzione C^1 di (1.7) definita globalmente. E' necessario perciò estendere il concetto di soluzione a funzioni anche discontinue, in modo da poter garantire l'esistenza della soluzione.

Consideriamo la legge di conservazione scalare (1.6) introdotta precedentemente. Supponiamo temporaneamente che u sia una soluzione C^1 ; l'obiettivo è arrivare con questa ipotesi ad una definizione che non coinvolga le derivate di u e che abbia senso perciò anche se u non è regolare. Dimostremo poi che, nel caso in cui u sia di classe C^1 , la definizione che daremo si riduce a quella classica.

Definizione 2.1.1 *Consideriamo $\phi : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $\text{supp}(\phi) \subset \mathbb{R} \times (0, T)$ e sia compatto. ϕ è detta funzione test.*

Moltiplichiamo la PDE (1.6) per ϕ e, dopo aver integrato su $\mathbb{R} \times [0, T]$, integriamo per parti:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T (u_t + F(u)_x) \phi \, dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T u_t \phi \, dx dt + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)_x \phi \, dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi u \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T u \phi_t dx dt + \int_0^T \phi F(u) \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \phi_x dt dx.
\end{aligned}$$

Dato che ϕ ha supporto compatto contenuto in $\mathbb{R} \times (0, T)$, il primo e il terzo integrale sono nulli. In definitiva ottengo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T u \phi_t dx dt + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \phi_x dx dt = 0$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T u \phi_t + F(u) \phi_x dx dt = 0. \quad (2.1)$$

Come avevamo anticipato precedentemente, si può osservare che per ottenere (2.1) abbiamo dovuto supporre u di classe C^1 , tuttavia tale definizione ha senso anche per u solo limitata. Diamo quindi la definizione di soluzione debole del problema di Cauchy (2.1) prendendo la soluzione u in un spazio funzionale adeguato per dimostrare in un secondo tempo esistenza e unicità.

Definizione 2.1.2 $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ è detta *soluzione debole* di (1.6) se l'equazione (2.1) è soddisfatta per qualsiasi funzione test ϕ .

Osservazione 2.1.1 Se u soluzione debole di (1.6) è di classe $C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$ allora è anche soluzione in senso classico di (1.6).

Dimostrazione. La funzione u è soluzione in senso debole di (1.6). Quindi $\forall \phi$ funzione test si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T u \phi_t + F(u) \phi_x dx dt = 0.$$

Essendo per ipotesi $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$ e $F(u) \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$ per composizione posso integrare per parti i due addendi e ottenere:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi u \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T u_t \phi dx dt + \int_0^T \phi F(u) \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)_x \phi dt dx.
\end{aligned}$$

Analogamente a prima il primo e il terzo integrale sono nulli perché ϕ ha il supporto compatto contenuto in $\mathbb{R} \times (0, T)$. Ottengo quindi:

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T (u_t + F(u)_x) \phi dx dt, \quad \forall \phi \text{ funzione test}$$

e di conseguenza, data l'arbitrarietà di ϕ ,

$$u_t + F(u)_x = 0.$$

□

Spostiamo ora l'attenzione sul problema di Cauchy (1.7) e vediamo cosa intendiamo come soluzione di un problema ai valori iniziali di questo tipo.

Prima di tutto introduciamo una notazione:

Definizione 2.1.3 *Si dice che una funzione $f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ appartiene a $C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$ se per qualsiasi successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $t_k \in [0, T]$, tale che $t_k \rightarrow t$ per $k \rightarrow +\infty$ si ha:*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x, t_k) - f(x, t)| dx = 0.$$

Ora possiamo introdurre il concetto di soluzione debole di un problema di Cauchy.

Definizione 2.1.4 *$u \in C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ è soluzione del problema di Cauchy (1.7) con dato iniziale $u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ se è soluzione debole di (1.6) e $u(x, 0) = u_0(x) \forall x \in \mathbb{R}$.*

2.2 Condizione di Rankine-Hugoniot

Attraverso la definizione (2.1.2) abbiamo esteso il concetto di soluzione anche a funzioni non continue. Tuttavia vedremo che non tutte le discontinuità sono ammissibili, dato che (2.1) impone severe restrizioni al tipo di discontinuità di una soluzione.

Consideriamo una curva Γ . Supponiamo ora che in un punto $P = (x_0, t_0) \in \Gamma$ la soluzione u abbia una discontinuità di tipo salto:

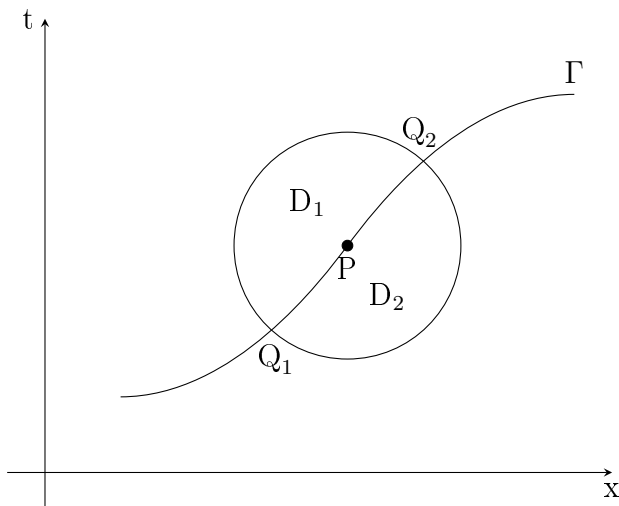
$$\exists \lim_{(x,t) \rightarrow P^-} u(x, t) = u_l < \infty, \quad \exists \lim_{(x,t) \rightarrow P^+} u(x, t) = u_r < \infty.$$

Supponiamo inoltre che u sia C^1 fuori da Γ e che Γ non abbia mai tangente orizzontale in un intorno di P . Per il *teorema della funzione implicita* esiste una palla D di centro P tale che Γ si possa rappresentare in forma parametrica $x = x(t)$ in D . Siamo ora D_1 e D_2 le due parti della palla determinate da Γ (Figura 2.1).

Da (2.1) otteniamo che $\forall \phi \in C_c^\infty(D)$

$$0 = \iint_D u \phi_t + F(u) \phi_x dx dt = \iint_{D_1} u \phi_t + F(u) \phi_x dx dt + \iint_{D_2} u \phi_t + F(u) \phi_x dx dt.$$

Figura 2.1: Condizione di Rankine-Hugoniot



Dato che u è di classe C^1 fuori da Γ , abbiamo che è soluzione in senso classico di (1.6) $\forall (x, t) \notin \Gamma$. Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned} \iint_{D_i} u\phi_t + F(u)\phi_x \, dxdt &= \iint_{D_i} u\phi_t + u_t + F(u)\phi_x + F(u)_x \, dxdt \\ &= \iint_{D_i} (F(u)\phi)_x + (u\phi)_t \, dxdt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Consideriamo ora la funzione $G : D_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come segue:

$$G(x, t) = (F(u(x, t))\phi(x, t), u(x, t)\phi(x, t)).$$

Dato che l'integrando di (2.2) è proprio la divergenza di G e la funzione G è di classe C^1 si può applicare il *Teorema della divergenza* per ottenere:

$$(2.2) = \int_{\partial D_i} (F(u)\phi, u\phi) \cdot (\nu_1, \nu_2) dl = \int_{\partial D_i} \phi(F(u)\nu_1 + u\nu_2) dl.$$

Dove $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è il versore normale uscente da ∂D_i . Perciò, dato che $\phi = 0$ sulla frontiera di D otteniamo:

$$\int_{\partial D_1} \phi(F(u)\nu_1 + u\nu_2) dl = \int_{\Gamma_{Q_1Q_2}} \phi(F(u_l)\nu_1 + u_l\nu_2) dl$$

e

$$\int_{\partial D_2} \phi(F(u)\nu_1 + u\nu_2) dl = - \int_{\Gamma_{Q_1Q_2}} \phi(F(u_r)\nu_1 + u_r\nu_2) dl.$$

Sommando le due precedenti otteniamo:

$$\int_{\Gamma_{Q_1 Q_2}} \phi [(F(u_l) - F(u_r))\nu_1 + (u_l - u_r)\nu_2] dl = 0$$

e dato che l'uguaglianza vale per qualsiasi funzione test ϕ

$$(F(u_l) - F(u_r))\nu_1 + (u_l - u_r)\nu_2 = 0, \quad \forall (x, t) \in \Gamma_{Q_1 Q_2}. \quad (2.3)$$

Osserviamo ora che $\nu = (\nu_1, \nu_2) = \frac{(1, -x'(t))}{\sqrt{1 + (x'(t))^2}}$. Perciò (2.3) implica:

$$F(u_l) - F(u_r) = x'(t)(u_l - u_r).$$

Per semplicità modifichiamo alcune notazioni:

$$\begin{cases} [[u]] = u_l - u_r, \\ [[F(u)]] = F(u_l) - F(u_r), \\ \sigma = x'(t). \end{cases}$$

Da cui otteniamo:

$$[[F(u)]] = \sigma [[u]] \quad (2.4)$$

lungo la curva di discontinuità. (2.4) è detta *condizione di Rankine-Hugoniot*. Osserviamo che se la soluzione u è continua allora la condizione di Rankine-Hugoniot è automaticamente verificata, dato che limite destro e limite sinistro di u coincidono in ogni punto.

Abbiamo appena dimostrato che se u è una soluzione debole di (1.6) allora valgono le condizioni di Rankine-Hugoniot. Tale implicazione si può invertire semplicemente seguendo a ritroso i passi della dimostrazione e se ne deduce che:

Osservazione 2.2.1 *Consideriamo $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ e Γ una curva C^∞ tracciata su $\mathbb{R} \times (0, T)$, tale che u abbia una discontinuità di tipo salto nei punti di Γ . Supponiamo che u sia soluzione in senso classico di (1.6) fuori da Γ e che valgano le condizioni di Rankine-Hugoniot. Allora u è soluzione in senso debole di (1.6).*

2.2.1 Non unicità delle soluzioni deboli

Dopo aver esteso il concetto di soluzione anche a funzioni che siano solamente limitate, senza proprietà di regolarità, iniziamo a considerare il problema dal punto di vista dell'unicità. Osserveremo che se manteniamo come definizione di soluzione quella di soluzione debole data all'inizio del capitolo, perdiamo

automaticamente l'unicità. Inoltre tale problema non è solo di natura tecnica, infatti data una legge di conservazione che modella un problema fisico reale, come per esempio l'equazione di Burgers, si mostrerà la presenza di più soluzioni deboli che la soddisfano. Ovviamente il problema ha in sé una sua rilevanza pratica; infatti il fenomeno considerato evolverà in un modo pre-determinato, perciò si renderà necessario selezionare una di queste soluzioni trovate per interpretare correttamente l'evoluzione del fenomeno.

Esempio 1

Consideriamo nuovamente l'equazione di Burgers e prendiamo come dato iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Osserviamo innanzitutto che con questo dato iniziale non si ha una sovrapposizione delle rette caratteristiche, infatti per $x < 0$ le rette sono parallele all'asse dei tempi, mentre per $x > 0$ hanno coefficiente angolare uguale a 1. Tuttavia tale metodo non ci permette di trovare la soluzione nella zona $0 < x < t$. Proprio in tale settore si ha la mancanza di unicità di soluzioni deboli. Per mostrarlo presentiamo di seguito due soluzioni di (1.10) tali che soddisfano (2.1) e che differiscono proprio in $0 < x < t$.

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & x < t/2 \\ 1 & x > t/2. \end{cases} \quad u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/t & 0 < x < t \\ 1 & x > t. \end{cases}$$

Verifichiamo che u_1 soddisfa (2.1) per qualsiasi funzione test ϕ in $0 < x < t$, infatti al di fuori di questa regione u_1 è C^∞ ed è banalmente soluzione classica di (1.10). Mostriamo perciò che dato $A = \{(x, t) \in \mathbb{R} : 0 < x < t, 0 < t < T\}$

$$\int_A u\phi_t + F(u)\phi_x dx dt = 0, \quad \forall \phi \text{ funzione test.}$$

Se definiamo l'insieme:

$$\bar{A} = \{(x, t) \in \mathbb{R} : t/2 < x < t, 0 < t < T\},$$

risulta evidente che

$$\int_A u\phi_t + F(u)\phi_x dx dt = \int_A u\phi_t + F(u)\phi_x dx dt = \int_{\bar{A}} \phi_t + \frac{1}{2}\phi_x dx dt.$$

Calcoliamo separatamente i due addendi:

$$\int_{\bar{A}} \frac{1}{2}\phi_x dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{t/2}^t \phi_x dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \phi(t, t) - \phi(t/2, t/2) dt,$$

$$\int_{\bar{A}} \phi_t dx dt = \int_0^{T/2} \int_x^{2x} \phi_t dt dx = \int_0^{T/2} \phi(2x, 2x) - \phi(x, x) dx.$$

Perciò con un cambio di variabile si ottiene che:

$$\int_{\bar{A}} \frac{1}{2} \phi_x dx dt = - \int_{\bar{A}} \phi_t dx dt$$

e conseguentemente

$$\int_A u \phi_t + F(u) \phi_x dx dt = 0.$$

Per quanto riguarda $u_2 \in C^0(\mathbb{R} \times [0, T])$, per l'osservazione (2.2.1), dato che le condizioni di Rankine-Hugoniot sono automaticamente verificate in ogni punto essendo u_2 continua, basta dimostrare che è una soluzione in senso classico dell'equazione di Burgers in $0 < x < t$. Difatti:

$$\left(\frac{x}{t}\right)_x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{t}\right)^2 = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t^2} = 0, \quad \forall x : 0 < x < t.$$

Perciò u_1 e u_2 sono due soluzioni deboli dell'equazione di Burgers con condizione iniziale u_0 che differiscono nella regione $0 < x < t$. Osserviamo in particolare che u_1 è una soluzione discontinua chiamata anche *shock*, mentre u_2 è continua ed è chiamata *onda di rarefazione*.

Esempio 2

Consideriamo ancora l'equazione di Burgers (1.10), stavolta con dato iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -1 & x > 0. \end{cases}$$

Con questa condizione iniziale, il problema di Cauchy ha come soluzioni:

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} +1 & 2x < (1 - \alpha)t \\ -\alpha & (1 - \alpha)t < 2x < 0 \\ +\alpha & 0 < 2x < (\alpha - 1)t \\ -1 & (\alpha - 1)t < 2x, \end{cases}$$

per qualsiasi $\alpha \geq 1$. Perciò tale problema di Cauchy ha una quantità più che numerabile di soluzioni deboli.

Capitolo 3

Soluzioni entropiche e teorema di Kruzkov

3.1 Soluzioni entropiche

3.1.1 Soluzione di Kruzkov

Nel capitolo precedente abbiamo osservato che in generale non è possibile garantire l'unicità della soluzione debole di (1.7). E' necessario perciò introdurre una condizione di selezione della soluzione, affinché il problema ai valori iniziali risulti ben posto.

Definizione 3.1.1 (Soluzione di Kruzkov) *Siano date le funzioni $u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e $u \in C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$. La funzione u è detta soluzione di Kruzkov del problema di Cauchy (1.7) se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi funzione test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$, $\phi \geq 0$*

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u - \alpha| \phi_t + \text{sign}(u - \alpha)(F(u) - F(\alpha)) \phi_x \, dx dt \geq 0, \quad (3.1)$$

detta condizione di entropia e

$$u(\cdot, 0) = u_0. \quad (3.2)$$

Proposizione 3.1.1 *Sia $u \in C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ una soluzione di Kruzkov di (1.7). Allora u è una soluzione debole di (1.7).*

Dimostrazione. Basta dimostrare che la condizione di Kruzkov (3.1) implica quella di soluzione debole (2.1). Dato che la (3.1) vale per α qualunque, pongo $\alpha = \sup |u(x, t)|$ e sostituisco:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (\sup |u| - u) \phi_t - ((F(u) - F(\sup |u|)) \phi_x \, dx dt \geq 0, \quad \forall \phi \geq 0.$$

Osserviamo che essendo ϕ a supporto strettamente contenuto in $\mathbb{R} \times [0, T]$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \sup |u| \phi_t \, dx \, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T \sup |u| \phi_t \, dt \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sup |u| \left(\int_0^T \phi_t \, dt \right) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

E analogamente

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sup |u|) \phi_x \, dx \, dt = 0.$$

Otteniamo perciò

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} -u \phi_t - F(u) \phi_x \, dx \, dt \geq 0. \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u \phi_t + F(u) \phi_x \, dx \, dt \leq 0. \quad (3.3)$$

Analogamente sostituisco in (3.1) $\alpha = -\sup |u(x, t)|$ ottenendo:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (u + \sup |u|) \phi_t + [F(u) - F(-\sup |u|)] \phi_x \, dx \, dt \geq 0, \quad \forall \phi \geq 0.$$

Dato che ϕ ha supporto contenuto strettamente in $\mathbb{R} \times [0, T]$, ragionando in modo analogo ottengo:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u \phi_t + F(u) \phi_x \, dx \, dt \geq 0. \quad (3.4)$$

Da cui, considerando (3.3) e (3.4), deduciamo:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u \phi_t + F(u) \phi_x \, dx \, dt = 0, \quad \forall \phi \geq 0. \quad (3.5)$$

Se ϕ non è positiva, possiamo scrivere $\phi = [\phi]^+ - [\phi]^-$, dove con $[\cdot]^+$ e $[\cdot]^-$ si intende la parte positiva e la parte negativa rispettivamente. Non possiamo inserire direttamente tali funzioni in (3.5) dato che non sono C^∞ . Possiamo però regolarizzarle con una successione di mollificatori ottenendo al limite

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} u \phi_t + F(u) \phi_x \, dx \, dt = 0, \quad \forall \phi \text{ funzione test.}$$

□

3.1.2 Soluzione entropica

Prima di procedere introduciamo il concetto di soluzione di Kruzkov seguendo un approccio diverso. Arriviamo a dare una definizione alternativa che ci servirà per dimostrare il *teorema di esistenza* e che si dimostrerà essere equivalente a quella data precedentemente.

Definizione 3.1.2 (Entropia e flusso di entropia) *Consideriamo due funzioni di classe C^∞ , $\eta, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:*

- η è convessa;
- $\eta'(z)F'(z) = Q'(z), \quad z \in \mathbb{R}.$

Allora η e Q sono dette rispettivamente entropia e flusso di entropia di (1.6).

Per motivare questa definizione supponiamo in un primo momento che u sia una soluzione C^∞ di (1.6). Allora

$$\begin{aligned} \eta(u)_t + Q(u)_x &= \eta'(u)u_t + Q'(u)u_x \\ &= \eta'(u)u_t + \eta'(u)F'(u)u_x \\ &= \eta'(u)(u_t + F(u)_x) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Perciò osserviamo che se u è di classe C^∞ , allora $\eta(u)$ è soluzione di una legge di conservazione scalare con flusso $Q(u)$. Tuttavia, le soluzioni che stiamo considerando per la legge di conservazione non sono in generale regolari. L'idea è quindi quella di sostituire l'uguaglianza (3.6) con una disuguaglianza del tipo

$$\eta(u)_t + Q(u)_x \leq 0. \tag{3.7}$$

Infatti, nelle applicazioni, la funzione $\eta(u)$ rappresenta un'energia o l'opposto di un'entropia fisica e $Q(u)$ il suo flusso. Quindi la disuguaglianza precedente afferma che per soluzioni non regolari l'entropia deve decrescere e conseguentemente l'entropia fisica deve crescere. Questo dà luogo alla condizione (3.8) nella definizione seguente, in cui selezioniamo come ammissibili le soluzioni che soddisfano la disuguaglianza (3.7) in senso debole.

Definizione 3.1.3 (Soluzione entropica) *Siano date le funzioni $u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e $u \in C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$. La funzione u è detta soluzione entropica del problema di Cauchy (1.7), se per qualsiasi coppia di entropia e flusso di entropia.*

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(u)\phi_t + Q(u)\phi_x \, dx \, dt \geq 0 \quad \forall \phi \text{ funzione test, } \phi \geq 0. \tag{3.8}$$

e

$$u(\cdot, 0) = u_0. \quad (3.9)$$

Proposizione 3.1.2 $u(x, t)$ è soluzione di Kruzkov se e solo se è soluzione entropica di (1.7) secondo la definizione (3.1.3).

Dimostrazione. Supponiamo che u sia una soluzione entropica. Basta dimostrare che la condizione (3.1) è verificata per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi funzione test $\phi \geq 0$. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $u \rightarrow |u - \alpha|$ è convessa e continua. Dimostriamo che il suo flusso è $(F(u) - F(\alpha))\text{sign}(u - \alpha)$. Sia quindi $\eta = |u - \alpha|$. Osserviamo che è quasi ovunque definita $\eta'(u) = \text{sign}(u - \alpha)$. Grazie alla definizione (3.1.2) calcoliamo il flusso di entropia Q di η :

$$\begin{aligned} Q(u) &= \int_{\alpha}^u Q'(x) dx = \int_{\alpha}^u F'(x)\text{sign}(x - \alpha) dx = \\ &= \begin{cases} F(u) - F(\alpha) & \text{se } u > \alpha \\ 0 & \text{se } u = \alpha \\ -(F(u) - F(\alpha)) & \text{se } u < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Perciò

$$Q(u) = (F(u) - F(\alpha))\text{sign}(u - \alpha).$$

Quindi possiamo usare η e Q come entropia e flusso di entropia nella condizione (3.8), ottenendo esattamente la condizione (3.1) per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ e per qualsiasi funzione test $\phi \geq 0$.

Dimostriamo ora il viceversa. Cioè, supponendo che u soddisfi la condizione di entropia (3.8), vogliamo dimostrare che verifica la (3.1). Prima di tutto sia $a = \|u\|_{\infty}$ e sia $b = -\|u\|_{\infty}$. Osserviamo quindi che data una funzione entropia convessa η e il suo relativo flusso Q , per qualsiasi $\gamma > 0$, esiste una funzione entropia η_{γ} e il flusso corrispondente Q_{γ} tali che:

$$\eta(s) \leq \eta_{\gamma}(s) \leq \eta(s) + \gamma, \quad \text{per } s \in [a, b].$$

e η_{γ} è convessa e lineare a tratti, ossia della forma:

$$\eta_{\gamma}(s) = b_0 + b_1 s + \sum_j a_j |s - k_j|, \quad \text{con } a_j > 0.$$

Per dare ragione di ciò si può considerare una poligonale inscritta nella funzione entropia inferiore con nodi sufficientemente fitti per soddisfare la disuguaglianza precedente. Utilizzando la definizione di entropia (3.1.2) per

ciascuno degli addendi di η_γ , con dei conti analoghi a quelli fatti nella prima parte della proposizione, si ricava il flusso relativo a η_γ

$$Q_\gamma(s) = b_1 F(s) + \sum_j a_j [F(s) - F(k_j)] \text{sign}(s - k_j), \quad s \in [a, b].$$

Tenendo presente la condizione di entropia (3.1) si prova facilmente che la (3.8) è verificata per qualsiasi coppia η_γ, Q_γ . Otteniamo perciò che per qualsiasi $\gamma > 0$

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\gamma(u) \phi_t + Q_\gamma(u) \phi_x \, dx \, dt \geq 0, \quad \forall \phi \text{ funzione test, } \phi \geq 0.$$

Da cui

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\gamma(u) \phi_t + Q_\gamma(u) \phi_x \, dx \, dt \geq 0, \quad \forall \phi \text{ funzione test, } \phi \geq 0.$$

Dato che η_γ e Q_γ convergono uniformemente a η e a Q posso portare il limite dentro l'integrale e ottenere la (3.8).

□

Grazie all'equivalenza appena dimostrata d'ora in poi si indicherà con il termine *soluzione entropica* una funzione u che è soluzione di Kruzkov o che è soluzione entropica secondo la definizione (3.1.3).

3.2 Teorema di Kruzkov: esistenza e unicità

3.2.1 Unicità

Teorema 3.2.1 (Teorema di unicità di Kruzkov) *Esiste al più una soluzione entropica del problema di Cauchy (1.7).*

Dimostrazione. Dato $M > 0$ sia

$$N := N_M = \max_{|u| \leq M} |F'(u)|. \quad (3.10)$$

Definiamo quindi il concetto di *triangolo caratteristico* per $R > 0$:

$$K = \{(x, t) : |x| \leq R - Nt, 0 \leq t \leq T_0 = \min(T, R/N)\}. \quad (3.11)$$

S_τ indicherà i tagli del triangolo caratteristico K con le rette $t = \tau$, cioè $S_\tau = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R - N\tau\}$, $\tau \in [0, T_0]$. Osserviamo innanzitutto che

$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T] \exists K$ un triangolo caratteristico che contiene quel punto. Infatti dati M e (x, t) si può scegliere R sufficientemente grande affinché $(x, t) \in K$.

Appurato ciò, per dimostrare il teorema di unicità di Kruzkov dobbiamo dimostrare che se u e v sono due soluzioni entropiche di (1.7) con la stessa condizione iniziale u_0 , allora coincidono.

Sfruttiamo un claim che sarà dimostrato nella sezione (3.4).

Claim 3.2.2 *Siano $u(x, t)$ e $v(x, t)$ due soluzioni entropiche del problema di Cauchy (1.7) con dati iniziali $u_0(x)$ e $v_0(x)$ rispettivamente, tali che $|u(x, t)| \leq M$ e $|v(x, t)| \leq M$ quasi ovunque in $\mathbb{R} \times [0, T]$. Allora per qualsiasi $t \in [0, T_0]$*

$$\int_{S_t} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{S_0} |u_0(x) - v_0(x)| dx. \quad (3.12)$$

Tale claim implica che per ogni $t \in [0, T_0]$

$$\int_{S_t} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq 0.$$

Da ciò deduciamo che $u = v$ in K , come funzioni in $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$.

Dal momento però che si può scegliere K arbitrariamente grande in modo che contenga un qualsiasi punto di $\mathbb{R} \times [0, T]$, otteniamo:

$$u = v \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, T], \quad \text{come funzioni in } \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T]).$$

□

3.2.2 Esistenza

Teorema 3.2.3 (Teorema di esistenza) *Esiste una soluzione entropica del problema di Cauchy (1.7).*

La dimostrazione verrà proposta nella sezione (3.5) tramite viscosità, considerando l'equazione parabolica:

$$u_t + F(u)_x = \mu u_{xx} \quad \text{in } [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

3.3 Definizioni e lemmi preliminari

Definizione 3.3.1 (Mollificatore) *Un mollificatore è una funzione $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:*

- $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$;
- $\text{supp}(\rho) \subset B(0, 1)$;
- $\rho \geq 0$;
- $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$.

Partendo da ρ definiamo per qualsiasi $h > 0$

$$\rho_h(x) := h^{-1} \rho(h^{-1}x). \quad (3.14)$$

Dalle proprietà di ρ elencate precedentemente possiamo facilmente ricavare le proprietà di ρ_h :

- $\rho_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$;
- $\rho_h(x) \geq 0$;
- $\rho_h(x) = 0$ per $|x| \geq h$;
- $|\rho_h(x)| \leq \frac{\text{const}}{h}$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_h(x) dx = 1$.

Consideriamo ora $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 \dots x_n)$. Definiamo

$$\lambda(x) := \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \geq 0. \quad (3.15)$$

Evidentemente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \rho(x_1) dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} \rho(x_n) dx_n = 1.$$

Inoltre, in analogia con quanto fatto precedentemente, possiamo definire le λ riscalate:

$$\lambda_h(x) := \prod_{i=1}^n \rho_h(x_i) = \frac{1}{h^n} \prod_{i=1}^n \rho(h^{-1}x_i) = \frac{1}{h^n} \lambda(h^{-1}x). \quad (3.16)$$

Consideriamo $v \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $h > 0$ definiamo $v^h(x)$ come la convoluzione di v e λ_h :

$$v^h(x) = (\lambda_h * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h^n} \lambda\left(\frac{x-y}{h}\right) v(y) dy. \quad (3.17)$$

Introduciamo ora il concetto di *punto di Lebesgue*:

Definizione 3.3.2 (Punto di Lebesgue) x_0 è detto punto di Lebesgue della funzione $v(x) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ se esiste $\tilde{v}(x_0)$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \int_{|x-x_0| \leq h} |v(x) - \tilde{v}(x_0)| dx = 0. \quad (3.18)$$

Proposizione 3.3.1 Se x_0 è un punto di Lebesgue di $v(x) \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} v^h(x_0) = \tilde{v}(x_0).$$

Dimostrazione.

$$|v^h(x_0) - \tilde{v}(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h^n} \lambda\left(\frac{x_0 - y}{h}\right) v(y) dy - \tilde{v}(x_0) \right|. \quad (3.19)$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \int_{\|x_0 - y\| \leq h} \lambda\left(\frac{x_0 - y}{h}\right) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda\left(\frac{x_0 - y}{h}\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x_{01} - y_1}{h}\right) dy_1 \dots \int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x_{0n} - y_n}{h}\right) dy_n = h^n. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} (3.19) &= \left| \int_{\|x_0 - y\| \leq h} \frac{1}{h^n} \lambda\left(\frac{x_0 - y}{h}\right) v(y) dy - \tilde{v}(x_0) \frac{1}{h^n} \int_{\|x_0 - y\| \leq h} \lambda\left(\frac{x_0 - y}{h}\right) dy \right| \\ &= \frac{1}{h^n} \left| \int_{\|x_0 - y\| \leq h} \lambda\left(\frac{x_0 - y}{h}\right) (v(y) - \tilde{v}(x_0)) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{h^n} \int_{\|x_0 - y\| \leq h} \left| \lambda\left(\frac{x_0 - y}{h}\right) \right| |v(y) - \tilde{v}(x_0)| dy \\ &\leq \frac{\text{const}}{h^n} \int_{\|x_0 - y\| \leq h} |v(y) - \tilde{v}(x_0)| dy, \quad \forall h > 0. \end{aligned}$$

Dato che x_0 è un punto di Lebesgue, facendo tendere h a zero si ottiene la tesi.

□

Proposizione 3.3.2 *L'insieme dei punti che non sono di Lebesgue per la funzione $v \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$ ha misura di Lebesgue nulla.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si fa riferimento a [4, §8.8].

□

Osserviamo che possiamo definire $\tilde{v}(x)$ per mezzo della definizione (3.3.2) su tutti i punti di Lebesgue. Per la proposizione (3.3.2) risulta che $\tilde{v} = v$ quasi ovunque. Abbiamo perciò che

$$v^h(x) \rightarrow v(x) \quad \text{per } h \rightarrow 0 \quad \text{quasi ovunque.} \quad (3.20)$$

A partire da quest'ultimo risultato dimostriamo il primo lemma che ci servirà per la dimostrazione del teorema di unicità.

Lemma 3.3.3 *Sia $B_r := \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$, $r > 0$. Consideriamo $v(x, t) \in \mathcal{L}^\infty(\bar{B}_r \times [0, T])$ e dato $\sigma \in (0, \min[r, T])$ e $h \in (0, \sigma)$ definiamo:*

$$V_h = \frac{1}{h^2} \int_{A_h} |v(x, t) - v(y, \tau)| \, dx \, dt \, dy \, d\tau. \quad (3.21)$$

Dove

$$A_h := \left\{ (x, t, y, \tau) : \left| \frac{x-y}{2} \right| \leq h, \left| \frac{x+y}{2} \right| \leq r-\sigma, \left| \frac{t-\tau}{2} \right| \leq h, \sigma \leq \frac{t+\tau}{2} \leq T-\sigma \right\}.$$

Allora $\lim_{h \rightarrow 0} V_h = 0$.

Dimostrazione. Sostituiamo:

$$\frac{x+y}{2} = \eta, \quad \frac{x-y}{2} = \chi, \quad \frac{t+\tau}{2} = \alpha, \quad \frac{t-\tau}{2} = \beta.$$

Da cui

$$x = \eta + \chi, \quad y = \eta - \chi, \quad t = \alpha + \beta, \quad \tau = \alpha - \beta.$$

Calcoliamo il determinante del Jacobiano della trasformazione $(x, y, t, \tau) \rightarrow (\eta, \chi, \alpha, \beta)$.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J) = 2^2.$$

Otteniamo perciò:

$$V_h = \frac{2^2}{h^2} \int_{\bar{A}_h} |v(\eta + \chi, \alpha + \beta) - v(\eta - \chi, \alpha - \beta)| \, d\eta \, d\alpha \, d\chi \, d\beta. \quad (3.22)$$

Dove

$$\bar{A}_h := \left\{ (\eta, \alpha, \chi, \beta) : |\eta| \leq r - \sigma, \quad \sigma \leq \alpha \leq T - \sigma, \quad |\beta| \leq h, \quad |\chi| \leq h \right\}.$$

Considero ora la funzione

$$G_h(\eta, \alpha) = \frac{1}{h^2} \iint_{\substack{|\beta| \leq h \\ |\chi| \leq h}} |v(\eta + \chi, \alpha + \beta) - v(\eta - \chi, \alpha - \beta)| d\chi d\beta.$$

Otteniamo che:

$$V_h = 2^2 \iint_{\substack{\sigma \leq \alpha \leq T - \sigma \\ |\eta| \leq r - \sigma}} G_h(\eta, \alpha) d\eta d\alpha.$$

Applicando poi la disuguaglianza triangolare all'integrando dell'espressione di G_h risulta evidente che:

$$|v(\eta + \chi, \alpha + \beta) - v(\eta - \chi, \alpha - \beta)| \leq |v(\eta + \chi, \alpha + \beta) - v(\eta, \alpha)| + |v(\eta, \alpha) - v(\eta - \chi, \alpha - \beta)|.$$

da cui:

$$\begin{aligned} G_h(\eta, \alpha) &\leq \frac{1}{h^2} \iint_{\substack{|\beta| \leq h \\ |\chi| \leq h}} |v(\eta + \chi, \alpha + \beta) - v(\eta, \alpha)| d\chi d\beta \\ &\quad + \frac{1}{h^2} \iint_{\substack{|\beta| \leq h \\ |\chi| \leq h}} |v(\eta - \chi, \alpha - \beta) - v(\eta, \alpha)| d\chi d\beta \\ &\leq \frac{2}{(\sqrt{2}h)^2} \iint_{\|(\eta, \beta)\| \leq h\sqrt{2}} |v(\eta + \chi, \alpha + \beta) - v(\eta, \alpha)| d\chi d\beta \\ &\quad + \frac{2}{(\sqrt{2}h)^2} \iint_{\|(\eta, \beta)\| \leq h\sqrt{2}} |v(\eta - \chi, \alpha - \beta) - v(\eta, \alpha)| d\chi d\beta. \end{aligned}$$

Se consideriamo il quadrato $\bar{B}_{r-\sigma} \times [\sigma, T - \sigma]$, abbiamo, per la proposizione (3.3.2), che quasi tutti i punti di tale quadrato sono di Lebesgue per la funzione $v \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Quindi per la definizione di *punto di Lebesgue* con $n = 2$ e utilizzando le proprietà del limite otteniamo che $G_h(\eta, \alpha) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$ quasi ovunque in $\bar{B}_{r-\sigma} \times [\sigma, T - \sigma]$.

Osserviamo che:

$$|G_h(\eta, \alpha)| \leq \frac{2 \|v\|_\infty}{h^2} \iint_{\substack{|\beta| \leq h \\ |\chi| \leq h}} d\chi d\beta = 8 \|v\|_\infty.$$

Quindi, dato che $|G_h(\eta, \alpha)| \leq 8\|v\|_\infty$ quasi ovunque e $8\|v\|_\infty \in L^1(\bar{B}_{r-\sigma} \times [\sigma, T-\sigma])$, possiamo applicare il *teorema di convergenza dominata* portando il limite dentro l'integrale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_h = 2^2 \iint_{\substack{\sigma \leq \alpha \leq T-\sigma \\ |\eta| \leq r-\sigma}} \lim_{h \rightarrow 0} G_h(\eta, \alpha) d\chi d\alpha = 0.$$

□

Lemma 3.3.4 Consideriamo $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana di costante L nell'intervallo $[-M, M]$ con $M \in \mathbb{R}$.

Allora la funzione $H(u, v) := \text{sign}(u - v)[G(u) - G(v)]$ è lipschitziana di costante \bar{L} nelle variabili u e v , con $u, v \in [-M, M]$.

Dimostrazione. Innanzitutto consideriamo $P_1 = (u_1, v_1) \in [-M, M] \times [-M, M]$ tale che $u_1 \geq v_1$ e $P_2 = (u_2, v_2) \in [-M, M] \times [-M, M]$ tale che $u_2 \geq v_2$. Dimostriamo che per tali punti la funzione H è lipschitziana:

$$\begin{aligned} |H(u_1, v_1) - H(u_2, v_2)| &= |G(u_1) - G(v_1) - G(u_2) + G(v_2)| \\ &\leq |G(u_1) - G(u_2)| + |G(v_1) - G(v_2)| \\ &\leq L|u_1 - u_2| + L|v_1 - v_2| \\ &= L(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|) \\ &\leq \bar{L}\|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Dove l'ultima disuguaglianza vale per l'equivalenza delle distanze. Analogamente si dimostra che H è lipschitziana per $P_1 = (u_1, v_1) \in [-M, M] \times [-M, M]$ tale che $u_1 \leq v_1$ e $P_2 = (u_2, v_2) \in [-M, M] \times [-M, M]$ tale che $u_2 \leq v_2$.

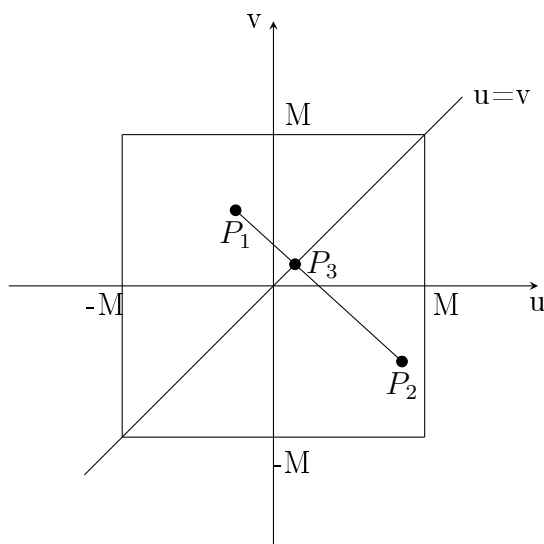
Consideriamo ora $P_1 = (u_1, v_1) \in [-M, M] \times [-M, M]$ tale che $u_1 > v_1$ e $P_2 = (u_2, v_2) \in M \times M$ tale che $u_2 < v_2$ (il caso simmetrico è analogo).

Data $r_{P_1 P_2}(x, y)$ la retta passante per P_1 e P_2 , sia $P_3 = (u_3, v_3)$ il punto di intersezione della retta con la diagonale del quadrato $[-M, M] \times [-M, M]$ (Figura 3.1).

Allora:

$$\begin{aligned} |H(u_1, v_1) - H(u_2, v_2)| &= |G(u_1) - G(v_1) + G(u_2) - G(v_2)| \\ &= |G(u_1) - G(v_1) \pm G(u_3) + G(u_2) - G(v_2) \mp G(u_3)| \\ &\leq |G(u_1) - G(u_3)| + |G(v_1) + G(u_3)| \\ &\quad + |G(u_2) - G(u_3)| + |G(v_2) + G(u_3)| \\ &\leq L|u_1 - u_3| + L|u_2 - u_3| + L|v_1 - u_3| + L|v_2 - u_3| \\ &= L|u_1 - u_2| + L|v_1 - v_2| \\ &\leq \bar{L}\|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

□

Figura 3.1: Dominio di $H(u,v)$ 

3.4 Teorema di Kruzkov: dimostrazione dell'unicità

Con i lemmi precedenti possiamo dimostrare il claim (3.2.2). Per semplificare la notazione indichiamo con $\pi_T := \mathbb{R} \times [0, T]$. Dividiamo quindi la dimostrazione in due passi:

3.4.1 Passo 1

In questa sezione arriveremo a dimostrare che $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$

$$\int_{\pi_T} |u(x, t) - v(x, t)| \phi_t(x, t) + \text{sign}(u(x, t) - v(x, t)) [F(u(x, t)) - F(v(x, t))] \phi_x(x, t) dx dt \geq 0. \quad (3.23)$$

Consideriamo $g(x, t; y, \tau) \geq 0$ una funzione C^∞ a supporto compatto strettamente contenuto in $\pi_T \times \pi_T$. Immaginiamo di fissare le variabili

(y, τ) e scriviamo la disuguaglianza (3.1) con $\alpha = v(y, \tau)$ e $\phi = g(x, t; y, \tau)$; dopodiché integriamo su π_T (nelle variabili (y, τ)) ottenendo la disuguaglianza:

$$\int_{\pi_T \times \pi_T} |u(x, t) - v(\tau, y)| g_t + \text{sign}(u(x, t) - v(y, \tau)) [F(u(x, t)) - F(v(y, \tau))] g_x dx dt dy d\tau \geq 0. \quad (3.24)$$

Ragionando in modo analogo immaginiamo di fissare le variabili (x, t) e scriviamo la disuguaglianza (3.1) con $\alpha = u(x, t)$ e $\phi = g(x, t; y, \tau)$; dopodiché integriamo su π_T (nelle variabili (x, t)) ottenendo la disuguaglianza:

$$\int_{\pi_T \times \pi_T} |v(\tau, y) - u(x, t)| g_\tau + \text{sign}(v(y, \tau) - u(x, t)) [F(v(y, \tau)) - F(u(x, t))] g_y dy d\tau dx dt \geq 0. \quad (3.25)$$

$$[F(v(y, \tau)) - F(u(x, t))] g_y dy d\tau dx dt \geq 0. \quad (3.26)$$

Sommiamo ora (3.24) e (3.26) ottenendo direttamente:

$$\int_{\pi_T \times \pi_T} |u(x, t) - v(\tau, y)| (g_t + g_\tau) + \text{sign}(u(x, t) - v(y, \tau)) [F(u(x, t)) - F(v(y, \tau))] (g_x + g_y) dx dt dy d\tau \geq 0. \quad (3.27)$$

Consideriamo ora una funzione test $\phi(z, s) \in C_c^\infty((-r, r) \times (0, T))$, $\phi \geq 0$. Per definizione

$$\exists \sigma, r : \phi(z, s) = 0 \quad \forall (z, s) \notin \bar{B}_{r-2\sigma} \times [2\sigma, T-2\sigma] \quad (2\sigma \leq \min(T, r)), \quad (3.28)$$

essendo $\bar{B}_{r-2\sigma} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq r - 2\sigma\}$.

Ritorniamo alla (3.27) e scegliamo come g la funzione:

$$\begin{aligned} g(x, t; y, \tau) &= \phi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+\tau}{2}\right) \rho_h\left(\frac{x-y}{2}\right) \rho_h\left(\frac{t-\tau}{2}\right) \\ &= \phi\left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+\tau}{2}\right) \lambda_h\left(\frac{x-y}{2}, \frac{t-\tau}{2}\right), \quad h \leq \sigma. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dove $\rho_h(x) = h^{-1} \rho(h^{-1}x)$. Per semplificare le notazioni poniamo:

$$(\dots) := \left(\frac{x+y}{2}, \frac{t+\tau}{2}\right), \quad (\dot{}) := \left(\frac{x-y}{2}, \frac{t-\tau}{2}\right).$$

Da cui:

$$g(x, t; y, \tau) = \phi(\dots) \lambda_h(\dot{}).$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
g_t + g_\tau &= \frac{1}{2}\phi_s(\dots)\lambda_h(\dot{\cdot}) + (\lambda_h)_s(\dot{\cdot})\phi(\dots) \\
&\quad + \frac{1}{2}\phi_s(\dots)\lambda_h(\dot{\cdot}) - (\lambda_h)_s(\dot{\cdot})\phi(\dots) \\
&= \phi_s(\dots)\lambda_h(\dot{\cdot})
\end{aligned} \tag{3.30}$$

e analogamente $g_x + g_y = \phi_z(\dots)\lambda_h(\dot{\cdot})$. Avendo indicato con ϕ_z e ϕ_s le derivate di ϕ rispetto alla prima e alla seconda variabile (rispettivamente) e con $(\lambda_h)_z$ e $(\lambda_h)_s$ le derivate di λ_h rispetto alla prima e alla seconda variabile rispettivamente.

Vogliamo ora dimostrare che con questa scelta di g e facendo tendere h a zero la disuguaglianza (3.27) implica (3.23):

$$\int_{\pi_T} |u(x, t) - v(x, t)|\phi_s(x, t) + \text{sign}(u(x, t) - v(x, t)) [F(u(x, t)) - F(v(x, t))] \phi_z(x, t) dx dt \geq 0.$$

Osserviamo innanzitutto che con questa scelta di g e causa dei risultati del calcolo delle derivate prime di g , l'integrando di (3.27) può essere rappresentato nella forma:

$$P_h(x, t; y, \tau) := G(x, t; y, \tau, u(x, t), v(y, \tau))\lambda_h(\dot{\cdot}). \tag{3.31}$$

Dove

$$\begin{aligned}
G(x, t; y, \tau, u(x, t), v(y, \tau)) &= |(u(x, t) - v(y, \tau))\phi_s(x, t) \\
&\quad + \text{sign}(u(x, t) - v(y, \tau)) [F(u(x, t)) - F(v(y, \tau))] \phi_z(x, t).
\end{aligned}$$

Perciò, dato che ϕ è di classe C^∞ a supporto compatto strettamente contenuto in $\mathbb{R} \times [0, T]$, la funzione $G(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, u, v)$ è lipschitziana rispetto alle prime quattro variabili. Inoltre, per il lemma (3.3.4), $G(x, t, y, \tau, u, v)$ è lipschitziana anche rispetto alle variabili v e u .

Consideriamo l'insieme:

$$A = \left\{ (x, t; y, \tau) : \frac{|x + y|}{2} \leq r - 2\sigma, \frac{|x - y|}{2} \leq h, 2\sigma \leq \frac{t + \tau}{2} \leq T - 2\sigma, \frac{|t - \tau|}{2} \leq h \right\}.$$

Osserviamo che per la condizione (3.28) e per la definizione di λ_h (3.16)

$$P_h(x, t; y, \tau) = 0, \quad \forall (x, t; y, \tau) \notin A.$$

Sommando e sottraendo possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi_T \times \pi_T} P_h dx dt dy d\tau &= \int_{\pi_T \times \pi_T} \left[G(x, t; y, \tau, u(x, t), v(y, \tau)) \right. \\
&\quad \left. - G(x, t; x, t, u(x, t), v(x, t)) \right] \lambda_h(\cdot) dx dt dy d\tau \\
&+ \int_{\pi_T \times \pi_T} G(x, t; x, t, u(x, t), v(x, t)) \lambda_h(\cdot) dx dt dy d\tau \\
&:= J_1(h) + J_2(h),
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
J_1(h) &= \int_{\pi_T \times \pi_T} \left[G(x, t; y, \tau, u(x, t), v(y, \tau)) \right. \\
&\quad \left. - G(x, t; x, t, u(x, t), v(x, t)) \right] \lambda_h(\cdot) dx dt dy d\tau
\end{aligned}$$

e

$$J_2(h) = \int_{\pi_T \times \pi_T} G(x, t; x, t, u(x, t), v(x, t)) \lambda_h(\cdot) dx dt dy d\tau.$$

Per stimare J_1 osserviamo innanzitutto che per la proprietà (3.16)

$$|\lambda(\cdot)| = \left| \rho_h \left(\frac{x-y}{2} \right) \right| \left| \rho_h \left(\frac{t-\tau}{2} \right) \right| \leq \frac{C}{h^2}.$$

Dopodiché consideriamo l'insieme:

$$\bar{A} = \left\{ (x, t; y, \tau) : \frac{|x+y|}{2} \leq r - \sigma, \frac{|x-y|}{2} \leq h, \sigma \leq \frac{t+\tau}{2} \leq T - \sigma, \frac{|t-\tau|}{2} \leq h \right\}.$$

Evidentemente

$$P_h = G(x, t; y, \tau, u(x, t), v(y, \tau)) \lambda_h(\cdot) = 0, \quad \forall (x, t; y, \tau) \notin \bar{A}.$$

Vogliamo dimostrare che anche

$$G(x, t; x, t, u(x, t), v(x, t)) \lambda_h(\cdot) = 0, \quad \forall (x, t; y, \tau) \notin \bar{A}.$$

Basta provare l'implicazione

$$\begin{aligned}
&(x, t; y, \tau) \notin \bar{A} \\
&\quad \Downarrow \\
&(x, t; y, \tau) \notin \left\{ |x| \leq r - 2\sigma, \frac{|x-y|}{2} \leq h, \sigma \leq t \leq T - 2\sigma, \frac{|t-\tau|}{2} \leq h \right\} := B
\end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\frac{|x - y|}{2} > h \Rightarrow (x, t; y, \tau) \notin B$$

e che

$$\frac{|t - \tau|}{2} > h \Rightarrow (x, t; y, \tau) \notin B.$$

Perciò posso supporre che

$$\frac{|x - y|}{2} \leq h \quad \text{e che} \quad \frac{|t - \tau|}{2} \leq h.$$

Avendo supposto ciò, dimostriamo separatamente le tre implicazioni rimanenti:

- $\frac{|x + y|}{2} \geq r - \sigma \Rightarrow |x| \geq r - 2\sigma;$
- $\frac{t + \tau}{2} \leq \sigma \Rightarrow t \leq 2\sigma;$
- $\frac{t + \tau}{2} \geq T - \sigma \Rightarrow t \geq T - 2\sigma.$

Per la prima osserviamo innanzitutto che:

$$\frac{|x - y|}{2} \leq h \leq \sigma \Rightarrow -\frac{|x - y|}{2} \geq -\sigma.$$

Perciò

$$\frac{|x + y|}{2} - \frac{|x - y|}{2} \geq r - 2\sigma.$$

Da cui

$$\frac{|x + y|}{2} - \frac{|x - y|}{2} \leq \frac{|x| + |y| - (|y| - |x|)}{2} = |x|.$$

Quindi

$$|x| \geq r - 2\sigma.$$

Le due rimanenti si dimostrano in modo analogo. Perciò quando stimiamo J_1 possiamo integrare solo su \bar{A} :

$$\begin{aligned} |J_1(h)| &\leq \int_{\bar{A}} |G(x, t; y, \tau, u(x, t), v(y, \tau)) \\ &\quad - G(x, t; x, t, u(x, t), v(x, t))| |\lambda_h(\cdot)| dx dt dy d\tau \\ &\leq \int_{\bar{A}} [L_1 h + L_2 h + L_3 |v(y, \tau) - v(x, t)|] \frac{C}{h^2} dx dt dy d\tau \\ &= \frac{C}{h} (L_1 + L_2) \int_{\bar{A}} dx dt dy d\tau + \frac{C}{h^2} L_3 \int_{\bar{A}} |v(y, \tau) - v(x, t)| dx dt dy d\tau \\ &= \frac{C}{h} (L_1 + L_2) \text{const}(\sigma, T, r) h^2 + \frac{C}{h^2} L_3 \int_{\bar{A}} |v(y, \tau) - v(x, t)| dx dt dy d\tau. \end{aligned}$$

Perciò per il lemma (3.3.3) $J_1(h) \rightarrow 0$, per $h \rightarrow 0$.

Dimostriamo ora che J_2 non dipende da h . Prima di tutto osserviamo che, dato che ρ_h ha il supporto contenuto in $[-h, h]$ e l'integrale su \mathbb{R} è 1:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{-h}^{+h} \lambda_h(x, t) dx dt = \int_{-h}^{+h} \rho_h(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \rho_h(x) dx \right) dt = 1. \quad (3.32)$$

Effettuiamo poi una sostituzione nell'espressione di J_2 :

$$x = \eta, \quad \frac{x - y}{2} = \chi, \quad t = \alpha, \quad \frac{t - \tau}{2} = \beta.$$

Da cui

$$x = \eta, \quad y = \eta - 2\chi, \quad t = \alpha, \quad \tau = \alpha - 2\beta.$$

Calcoliamo il determinante del Jacobiano della trasformazione $(x, y, t, \tau) \rightarrow (\eta, \chi, \alpha, \beta)$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J) = 2^2.$$

Perciò

$$J_2 = 2^2 \int_{\pi_T} G(\eta, \alpha; \eta, \alpha, u(\eta, \alpha), v(\eta, \alpha)) \left(\int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}} \lambda_h(\chi, \beta) d\chi d\beta \right) d\eta d\alpha.$$

Dato che $T \geq \sigma \geq h$ e $\lambda_h(\chi, \beta) = 0$ per $|\beta| \geq h$ ottengo:

$$\begin{aligned} J_2 &= 2^2 \int_{\pi_T} G(\eta, \alpha; \eta, \alpha, u(\eta, \alpha), v(\eta, \alpha)) \left(\int_{-h}^h \int_{\mathbb{R}} \lambda_h(\chi, \beta) d\chi d\beta \right) d\eta d\alpha \\ &= 2^2 \int_{\pi_T} G(x, t; x, t, u(x, t), v(x, t)) dx dt. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\pi_T \times \pi_T} P_h dx dt dy d\tau = 2^2 \int_{\pi_T} G(x, t; x, t, u(x, t), v(x, t)) dx dt. \quad (3.33)$$

Perciò passando al limite per $h \rightarrow 0$ si osserva che (3.27) implica (3.23).

3.4.2 Passo 2

Dimostriamo ora il claim. Consideriamo ora un triangolo caratteristico K e definiamo la funzione μ definita come segue:

$$\mu(t) = \int_{S_t} |u(x, t) - v(x, t)| dx. \quad (3.34)$$

Osserviamo che dato che $u, v \in C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$ tale funzione è continua. Definiamo ora:

$$\alpha_h(s) = \int_{-\infty}^s \rho_h(s) ds. \quad (3.35)$$

Prendiamo $\sigma, \tau \in (0, T_0)$ tali che $\sigma < \tau$. E definiamo:

$$\phi = [\alpha_h(t - \sigma) - \alpha_h(t - \tau)] \xi(x, t), \quad h < \min(\sigma, T_0 - \tau),$$

dove

$$\xi = \xi_\epsilon(x, t) = 1 - \alpha_\epsilon(|x| + Nt - R + \epsilon), \quad \epsilon > 0.$$

Osserviamo innanzitutto che dato $(x, t) \notin K$:

$$|x| \geq R - Nt \Rightarrow |x| + Nt - R + \epsilon \geq \epsilon \Rightarrow \xi_\epsilon(x, t) = 0.$$

Dato invece $(x, t) \in K$ abbiamo:

$$\xi_t = -N\rho_h(|x| + Nt - R + \epsilon) \quad e \quad N|\xi_x| = |-N\rho(|x| + Nt - R + \epsilon)|.$$

Da cui

$$0 = \xi_t + N|\xi_x| \geq \xi_t + \frac{F(u) - F(v)}{u - v} \xi_x. \quad (3.36)$$

L'ultima disuguaglianza vale perché

$$N = \max_{|u| \leq M} |F'(u)|$$

e dato che per il *Teorema di Lagrange*

$$\exists \chi \in (u, v) : \frac{F(u) - F(v)}{u - v} = F'(\chi),$$

otteniamo la disuguaglianza precedente.

A questo punto sostituiamo la funzione test ϕ in (3.23):

$$\begin{aligned} & \int_{\pi_T} |u(x, t) - v(x, t)| \left\{ [\rho_h(t - \sigma) - \rho_h(t - \tau)] \xi_\epsilon(x, t) \right. \\ & + (\xi_\epsilon)_t(x, t) [\alpha_h(t - \sigma) - \alpha_h(t - \tau)] \left. \right\} \\ & + \text{sign}(u(x, t) - v(x, t)) [F(u(x, t)) - F(v(x, t))] \\ & \quad [\alpha_h(t - \sigma) - \alpha_h(t - \tau)] (\xi_\epsilon)_x(x, t) dx dt \\ & \geq 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Osserviamo che essendo per ipotesi $\sigma < \tau$

$$\alpha_h(t - \sigma) - \alpha_h(t - \tau) \geq 0.$$

Inoltre dimostriamo che (semplificando le notazioni per semplicità):

$$\xi_t |u - v| + \text{sign}(u - v) [F(u) - F(v)] \xi_x \leq 0.$$

Se $u = v$ la disuguaglianza precedente è vera, altrimenti otteniamo:

$$\xi_t + \frac{\text{sign}(u - v)}{|u - v|} [F(u) - F(v)] \xi_x \leq 0,$$

che è proprio la disuguaglianza (3.36).

Quindi (3.37) implica:

$$\int_{\pi_T} |u(x, t) - v(x, t)| [\rho_h(t - \sigma) - \rho_h(t - \tau)] \xi_\epsilon(x, t) dx dt \geq 0.$$

Essendo $\xi = 0$ per $(x, t) \notin K$ possiamo riscrivere la disuguaglianza precedente come:

$$\int_0^{T_0} \int_{S_t} |u(x, t) - v(x, t)| [\rho_h(t - \sigma) - \rho_h(t - \tau)] \xi_\epsilon(x, t) dx dt \geq 0. \quad (3.38)$$

Dimostriamo ora che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_\epsilon(|x| + Nt - R + \epsilon) = 0 \quad \text{quasi ovunque in } K.$$

Basta quindi dimostrare che

$$\forall (x, t) \in \overset{\circ}{K} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_\epsilon(|x| + Nt - R + \epsilon) = 0.$$

Osserviamo che $|x| + Nt - R < 0$, dato che $(x, t) \in \overset{\circ}{K}$. Quindi:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_\epsilon(|x| + Nt - R + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-k+\epsilon} \rho_\epsilon(s) ds, \quad \text{con } k > 0.$$

Inoltre

$$\int_{-\infty}^{-k+\epsilon} \rho_\epsilon(s) ds = 0 \quad \text{se} \quad -k + \epsilon \leq -\epsilon \leftrightarrow \epsilon < k/2.$$

Quindi il limite è uguale a zero.

Perciò facendo tendere ϵ a zero in (3.38) otteniamo:

$$\int_{\pi T_0} [\rho_h(t - \sigma) - \rho_h(t - \tau)] \left(\int_{S_t} |u(x, t) - v(x, t)| dx \right) dt \geq 0.$$

Consideriamo ora $h \leq \min(\sigma, T_0 - \sigma)$. Per tale h abbiamo:

$$\begin{aligned} \mu(\tau) - \mu(\sigma) &\leq \left| \mu(\tau) - \mu(\sigma) + \int_0^{T_0} [\rho_h(t - \sigma) - \rho_h(t - \tau)] \mu(t) dt \right| & (3.39) \\ &= \left| \int_0^{T_0} \rho_h(t - \sigma) \mu(t) dt - \mu(\sigma) - \left(\int_0^{T_0} \rho_h(t - \tau) \mu(t) dt - \mu(\tau) \right) \right| \\ &\leq \left| \int_0^{T_0} \rho_h(t - \sigma) \mu(t) dt - \mu(\sigma) \right| + \left| \int_0^{T_0} \rho_h(t - \tau) \mu(t) dt - \mu(\tau) \right|. \end{aligned}$$

Consideriamo il primo addendo:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{T_0} \rho_h(t - \sigma) \mu(t) dt - \mu(\sigma) \right| &= \left| \int_0^{T_0} \rho_h(t - \sigma) [\mu(t) - \mu(\sigma)] dt \right| \\ &\leq \frac{\text{const}}{h} \int_{\sigma-h}^{\sigma+h} |\mu(t) - \mu(\sigma)| dt. \end{aligned}$$

Per il secondo addendo è possibile fare una stima analoga.

Dato che per una funzione continua ogni punto è punto di Lebesgue ed essendo μ continua otteniamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{const}}{h} \int_{\sigma-h}^{\sigma+h} |\mu(t) - \mu(\sigma)| dt = 0.$$

Ragionando poi in modo analogo per il punto τ possiamo ritornare a (3.39) e dedurre che

$$\mu(\tau) \leq \mu(\sigma).$$

Per concludere osserviamo che:

$$|u(x, \sigma) - v(x, \sigma)| \leq |u(x, \sigma) - u_0(x)| + |v(x, \sigma) - v_0(x)| + |u_0(x) - v_0(x)|.$$

Quindi

$$\mu(\tau) \leq \int_{S_\sigma} |u(x, \sigma) - u_0(x)| dx + \int_{S_\sigma} |v(x, \sigma) - v_0(x)| dx + \int_{S_\sigma} |v_0(x) - u_0(x)| dx.$$

Per $\sigma \rightarrow 0$ il primo e il secondo addendo tendono a zero perché $u, v \in C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$. Ottengo quindi:

$$\int_{S_t} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{S_0} |u_0(x) - v_0(x)| dx.$$

3.5 Teorema di esistenza: metodo di approssimazione di viscosità

L'obiettivo è costruire una soluzione entropica di (1.7) come limite per $\mu \rightarrow 0$ delle soluzioni della famiglia di equazioni paraboliche:

$$u_t + F(u)_x = \mu u_{xx} \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, T] \quad (3.40)$$

con $\mu > 0$. Notiamo che l'equazione (3.40) non è necessariamente associata ad un problema fisico reale, perciò μu_{xx} può essere chiamata *viscosità artificiale*. Inoltre se consideriamo un dato iniziale $u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, allora esiste un'unica soluzione $u_\mu \in C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$, tale che u_μ sia C^∞ per $t > 0$, del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = \mu u_{xx} & \text{in } \mathbb{R} \times [0, T] \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{in } \mathcal{L}^1. \end{cases} \quad (3.41)$$

3.5.1 Passo 1

Teorema 3.5.1 *Sia u_μ la soluzione del problema di Cauchy (3.41). Supponiamo che esista famiglia $\{\mu_k\}$ tale che $\mu_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$, per la quale $\{u_{\mu_k}\}$ converga a una qualche funzione u quasi ovunque su $\mathbb{R} \times [0, T]$ e $\|u_{\mu_k}\|_\infty$ sia limitata uniformemente in k . Allora u è una soluzione entropica del problema di Cauchy (1.7).*

Dimostrazione. Basta dimostrare che u soddisfa la condizione di entropia (3.8). Consideriamo una qualsiasi funzione entropia η convessa e il relativo flusso Q e moltiplichiamo (3.40) per $\eta'(u_\mu)$ ottenendo:

$$(u_\mu)_t \eta'(u_\mu) + F(u_\mu)_x \eta'(u_\mu) = \eta'(u_\mu) \mu (u_\mu)_{xx}. \quad (3.42)$$

Osserviamo ora che per definizione di entropia e flusso di entropia:

$$F(u_\mu)_x \eta'(u_\mu) = F'(u_\mu)(u_\mu)_x \eta'(u_\mu) = Q'(u_\mu)(u_\mu)_x = Q(u_\mu)_x.$$

Inoltre

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u_\mu) = \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} (\eta'(u_\mu)(u_\mu)_x) \right) = \mu \eta''(u_\mu) ((u_\mu)_x)^2 + \mu \eta'(u_\mu) (u_\mu)_{xx}$$

Perciò la (3.42) diventa:

$$\eta(u_\mu)_t + Q(u_\mu)_x = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u_\mu) - \mu \eta''(u_\mu) ((u_\mu)_x)^2.$$

A questo punto moltiplichiamo entrambi i membri per una funzione test $\phi \geq 0$ e integriamo su $\mathbb{R} \times [0, T]$:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi \eta(u_\mu)_t + \phi Q(u_\mu)_x \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u_\mu) - \phi \mu \eta''(u_\mu) ((u_\mu)_x)^2 \, dx \, dt. \quad (3.43)$$

Integriamo ora per parti tutti gli addendi separatamente sfruttando le proprietà del supporto delle funzioni test:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi \eta(u_\mu)_t \, dx \, dt &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi_t \eta(u_\mu) \, dx \, dt, \\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi Q(u_\mu)_x \, dx \, dt &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi_x Q(u_\mu) \, dx \, dt, \\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u_\mu) \, dx \, dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi_{xx} \eta(u_\mu) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che l'ultimo addendo di (3.43) è ≤ 0 dato che η è convessa, perciò considerando i risultati precedenti vale la disuguaglianza:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi_t \eta(u_\mu) + \phi_x Q(u_\mu) \, dx \, dt \geq -\mu \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi_{xx} \eta(u_\mu) \, dx \, dt.$$

Consideriamo quindi le soluzioni $\{u_{\mu_k}\}$ dell'ipotesi. Per tali funzioni è valida la disuguaglianza precedente per qualsiasi k . Osserviamo che $\|\phi_t\|_\infty < \infty$ e $\|\phi_x\|_\infty < \infty$, perché ϕ è C^∞ a supporto compatto strettamente contenuto in $\mathbb{R} \times [0, T]$.

Inoltre dato che $\{u_{\mu_k}\}$ è limitata uniformemente in k , $\|u_{\mu_k}\|_\infty < M_1$ e tale M_1 non dipende da k . Perciò dato che η e Q sono C^∞ , allora $\|\eta(u_{\mu_k})\|_\infty < M_2$ e $\|Q(u_{\mu_k})\|_\infty < M_3$ per qualsiasi k . Pertanto indicando con S il supporto di ϕ abbiamo:

$$\|\phi_t \eta(u_\mu) + \phi_x Q(u_\mu)\|_\infty < M \mathbf{1}_S \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times [0, T]).$$

Un discorso completamente analogo può essere fatto anche per $\phi_{xx} \eta(u_\mu)$, perciò facendo tendere entrambi i membri della disuguaglianza per $k \rightarrow \infty$, possiamo portar dentro il limite negli integrali e ottenere:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(u) \phi_t + Q(u) \phi_x \, dx \, dt \geq 0 \quad \forall \phi \text{ funzione test, } \phi \geq 0.$$

□

3.5.2 Passo 2

Teorema 3.5.2 *Siano u_μ e \bar{u}_μ due soluzioni di (3.41) con dato iniziale u_0 e \bar{u}_0 in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Supponiamo inoltre che le due soluzioni assumano valori in un intervallo compatto $[a, b]$. Allora per qualsiasi $t > 0$:*

$$\int_{\mathbb{R}} [u_\mu(x, t) - \bar{u}_\mu(x, t)]^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}} [u_0(x) - \bar{u}_0(x)]^+ dx \quad (3.44)$$

e

$$\|u_\mu(\cdot, t) - \bar{u}_\mu(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0(\cdot) - \bar{u}_0(\cdot)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}. \quad (3.45)$$

Inoltre se

$$u_0(x) \leq \bar{u}_0(x) \quad \text{quasi ovunque in } \mathbb{R}, \quad (3.46)$$

allora

$$u_\mu(x, t) \leq \bar{u}_\mu(x, t) \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, T]. \quad (3.47)$$

In particolare l'immagine di u_μ e \bar{u}_μ è contenuta in $[a, b]$.

Dimostrazione. Per semplificare la notazione scriviamo al posto di u_μ e \bar{u}_μ , u e \bar{u} rispettivamente. Dalla teoria sulle equazioni paraboliche sappiamo che se $u_0, \bar{u}_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ allora $u(\cdot, t), \bar{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ e anche le derivate fatte rispetto allo spazio di $u(\cdot, t), \bar{u}(\cdot, t)$ appartengono a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Consideriamo $\epsilon > 0$ e definiamo la funzione $\eta_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$\eta_\epsilon(w) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\infty < w \leq 0 \\ \frac{w^2}{4\epsilon} & \text{per } 0 < w \leq 2\epsilon \\ w - \epsilon & \text{per } 2\epsilon < w < \infty. \end{cases} \quad (3.48)$$

Osserviamo che dato che u e \bar{u} soddisfano (3.40) allora otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta_\epsilon(u - \bar{u}) &+ \frac{\partial}{\partial x} \{ \eta'_\epsilon(u - \bar{u}) [F(u) - F(\bar{u})] \} \\ &- \eta''_\epsilon(u - \bar{u}) [F(u) - F(\bar{u})] (u_x - \bar{u}_x) \\ &= \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta_\epsilon(u - \bar{u})) - \mu \eta''_\epsilon(u - \bar{u}) (u_{xx} - \bar{u}_{xx})^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Per verificare ciò basta considerare separatamente in tre casi nella definizione di η_ϵ e calcolare derivate prime e seconde in ciascuno dei casi, tenendo conto che u e \bar{u} soddisfano la (3.40).

Fissamo ora $0 < s < t < T$ e integriamo la precedente su $\mathbb{R} \times (s, t)$. Per il secondo otteniamo:

$$\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \{ \eta'_\epsilon(u - \bar{u}) [F(u) - F(\bar{u})] \} dx dt = \int_s^t \left| \eta'_\epsilon(u - \bar{u}) [F(u) - F(\bar{u})] \right|_{-\infty}^{+\infty} dt.$$

Perciò dato che

$$\eta'_\epsilon(u - \bar{u}) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\infty < u - \bar{u} \leq 0 \\ \frac{u - \bar{u}}{2\epsilon} & \text{per } 0 < u - \bar{u} \leq 2\epsilon \\ 1 & \text{per } 2\epsilon < u - \bar{u} < \infty \end{cases}$$

e che $u(\cdot, t), \bar{u}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, l'integrale precedente è nullo. E analogamente, dato che $u_x(\cdot, t), \bar{u}_x(\cdot, t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta_\epsilon(u - \bar{u})) dx dt = \mu \int_s^t \left| \eta'_\epsilon(u - \bar{u})(u_x - \bar{u}_x) \right|_{-\infty}^{+\infty} dt = 0.$$

Osserviamo poi che

$$\mu \eta''_\epsilon(u - \bar{u})(u_{xx} - \bar{u}_{xx})^2 \geq 0.$$

Perciò, per queste considerazioni (3.49) implica

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \eta_\epsilon(u(x, t) - \bar{u}(x, t)) dx - \int_{\mathbb{R}} \eta_\epsilon(u(x, s) - \bar{u}(x, s)) dx \\ & \leq \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \eta''_\epsilon(u - \bar{u}) [F(u) - F(\bar{u})] (u_x - \bar{u}_x) dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Osserviamo che:

$$\eta''_\epsilon(u - \bar{u})(F(u) - F(\bar{u})) = \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{1}_{[0, 2\epsilon]}(u - \bar{u})(F(u) - F(\bar{u})).$$

Dato che $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ abbiamo che $F(u) - F(\bar{u}) \leq M$ quasi ovunque.

Osserviamo che $\frac{1}{2\epsilon} \mathbf{1}_{[0, 2\epsilon]}(u - \bar{u})(F(u) - F(\bar{u})) \neq 0$ solo se $0 < u - \bar{u} \leq 2\epsilon$.

Consideriamo quindi (x, t) tali che $0 < u - \bar{u} \leq 2\epsilon$. Per tali (x, t) abbiamo che:

$$\frac{1}{2\epsilon} \mathbf{1}_{[0, 2\epsilon]}(u - \bar{u})(F(u) - F(\bar{u})) \leq \frac{|F(u) - F(\bar{u})|}{u - \bar{u}} \leq L, \quad \text{per quasi ogni } (x, t).$$

L'ultima disuguaglianza vale dato che $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\|u\|_\infty < \infty$.

Con un ragionamento analogo anche $\|\eta_\epsilon(u - \bar{u})\|_\infty < \infty$ uniformemente

rispetto a ϵ .

Inoltre

$$\eta_\epsilon''(u - \bar{u})(F(u) - F(\bar{u})) = \frac{1}{2\epsilon} \mathbb{1}_{[0, 2\epsilon]}(u - \bar{u})(F(u) - F(\bar{u})) \rightarrow 0, \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0$$

e

$$\eta_\epsilon(u - \bar{u}) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\infty < u - \bar{u} \leq 0 \\ \frac{(u - \bar{u})^2}{4\epsilon} & \text{per } 0 < u - \bar{u} \leq 2\epsilon \\ u - \bar{u} - \epsilon & \text{per } 2\epsilon < u - \bar{u} < \infty \end{cases} \rightarrow [u - \bar{u}]^+, \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0.$$

Perciò applicando il *teorema di convergenza dominata* a tutti gli integrali di (3.50) otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}} [u(x, t) - \bar{u}(x, t)]^+ dx - \int_{\mathbb{R}} [u(x, s) - \bar{u}(x, s)]^+ dx \leq 0.$$

Facendo poi tendere s a zero e applicando nuovamente il *teorema di convergenza dominata* abbiamo dimostrato la prima parte del teorema:

$$\int_{\mathbb{R}} [u(x, t) - \bar{u}(x, t)]^+ dx - \int_{\mathbb{R}} [u_0(x) - \bar{u}_0(x)]^+ dx \leq 0.$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema applichiamo nuovamente il procedimento scambiando u con \bar{u} . Otteniamo la disuguaglianza:

$$\int_{\mathbb{R}} [\bar{u}(x, t) - u(x, t)]^+ dx - \int_{\mathbb{R}} [\bar{u}_0(x) - u_0(x)]^+ dx \leq 0.$$

Sommando ora le due disuguaglianze e ricordando che $[-x]^+ = [x]^-$ e che $[x]^+ + [x]^- = |x|$ otteniamo la tesi:

$$\|u_\mu(\cdot, t) - \bar{u}_\mu(\cdot, t)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0(\cdot) - \bar{u}_0(\cdot)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}.$$

Osserviamo che (3.46) implica (3.47) in maniera ovvia a causa del risultato (3.44).

Per dimostrare che l'immagine di u e di \bar{u} è contenuta in $[a, b]$ consideriamo come condizione iniziale $\bar{u}_0(x) \equiv b$. L'unica soluzione di (3.40) con questa condizione iniziale è $\bar{u}(x, t) \equiv b$. Perciò per la proprietà di monotonia appena dimostrata si deduce che $u(x, t) \leq b$. Consideriamo ora come condizione iniziale $u_0(x) \equiv a$. Con un ragionamento analogo otteniamo $\bar{u}(x, t) \geq a$. Infine scambiando u con \bar{u} deduciamo la tesi.

□

3.5.3 Passo 3

Teorema 3.5.3 Sia u_μ una soluzione di (3.41) con $u_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Supponiamo inoltre che u_0 assuma valori nell'intervallo compatto $[a, b]$ e che:

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)| dx \leq \omega(|y|), \quad y \in \mathbb{R},$$

per una qualche funzione non decrescente $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ tale che $\omega(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$. Allora esiste una costante C che dipende solamente dall'intervallo $[a, b]$, tale che per qualsiasi $t > 0$ valgono le disuguaglianze:

$$\int_{\mathbb{R}} |u_\mu(x+y, t) - u_\mu(x, t)| dx \leq \omega(|y|), \quad y \in \mathbb{R}, \quad (3.51)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} |u_\mu(x, t+h) - u_\mu(x, t)| dx \leq C(h^{2/3} + \mu h^{1/3}) \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} + 2\omega(h^{1/3}), \quad h > 0.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che la funzione ω tale che

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)| dx \leq \omega(|y|), \quad y \in \mathbb{R},$$

esiste sempre per la continuità uniforme delle traslazioni, dato che il dato iniziale $u_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Fissiamo $t > 0$ e osserviamo che per qualsiasi $y \in \mathbb{R}$ la funzione $\bar{u}_\mu(x, t) = u_\mu(x+y, t)$ è soluzione di (3.41) con condizione iniziale $\bar{u}_0(x) = u_0(x+y)$. Usiamo ora la disuguaglianza (3.45) dimostrata nel teorema precedente, applicandola alle funzioni u e \bar{u} appena definite:

$$\int_{\mathbb{R}} |u_\mu(x+y, t) - u_\mu(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)| dx.$$

Da cui segue direttamente (3.51).

Fissiamo ora $h > 0$. Senza ledere la generalità possiamo assumere che $F(0) = 0$. A questo punto moltiplichiamo (3.40) per $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^∞ limitata e integriamo l'equazione risultante sulla striscia $\mathbb{R} \times (t, t+h)$:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) [u_\mu(x, t+h) - u_\mu(x, t)] dx = \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}} \mu \phi(x) u_{xx}(x, \tau) - \phi(x) F(u(x, \tau))_x dx d\tau.$$

Integriamo per parti il secondo membro. Per l'ultima parte del teorema (3.5.2) l'immagine di u_μ è contenuta in $[a, b]$. Otteniamo perciò:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)[u_\mu(x, t+h) - u_\mu(x, t)] dx = \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}} \mu \phi(x)_{xx} u(x, \tau) + \phi(x)_x F(u(x, \tau)) dx d\tau. \quad (3.52)$$

Poniamo

$$v(x) = u_\mu(x, t+h) - u_\mu(x, t).$$

A questo punto vorremmo porre $\phi = \text{sign } v(x)$, tuttavia abbiamo ipotizzato che ϕ sia $C^\infty(\mathbb{R})$, perciò dobbiamo prima mollificarla.

Consideriamo un mollificatore riscalo:

$$\rho_h(x) = h^{-1/3} \rho(h^{-1/3}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dove ρ è il mollificatore della definizione (3.3.1). Definiamo

$$\phi(x) = (\rho_h * \text{sign } v)(x) = \int_{\mathbb{R}} h^{-1/3} \rho\left(\frac{x-z}{h^{1/3}}\right) \text{sign } v(z) dz.$$

Osserviamo che:

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho_h * \text{sign } v)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho_h * \text{sign } v \right) (x).$$

Perciò

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) \right| \leq h^{-1/3} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \rho\left(\frac{x-z}{h^{1/3}}\right) \right| dx = h^{-2/3} \int_{-h^{1/3}}^{h^{1/3}} \left| \rho'\left(\frac{x-z}{h^{1/3}}\right) \right| dx.$$

Da cui

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) \right| \leq C_1 h^{-1/3},$$

e analogamente:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) \right| \leq C_2 h^{-2/3}.$$

Inoltre utilizzando (3.45) con $\bar{u} \equiv 0$ otteniamo:

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0(\cdot)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}.$$

Perciò sostituendo ϕ appena definita in (3.52) e usando le maggiorazioni appena dimostrate otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)v(x) dx \leq \mu C_1 h^{-2/3} \int_t^{t+h} \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} + C_2 h^{-1/3} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}} |F(u(x, \tau))| dx dt. \quad (3.53)$$

Per quanto riguarda il secondo addendo osserviamo che:

$$\frac{|F(u_\mu(x, \tau))|}{|u_\mu(x, \tau)|} = \frac{|F(u_\mu(x, \tau)) - F(0)|}{|u_\mu(x, \tau) - 0|}.$$

Perché avevamo posto $F(0) = 0$. Osserviamo ora che per l'ultima parte del teorema (3.5.2) l'immagine di u_μ è contenuta in $[a, b]$. Perciò dato che F è C^∞ otteniamo la disuguaglianza voluta:

$$\frac{|F(u_\mu(x, \tau)) - F(0)|}{|u_\mu(x, \tau) - 0|} \leq L.$$

Proseguendo con la stima:

$$(3.53) \leq \mu C_1 h^{1/3} \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} + C_2 h^{2/3} L \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} \leq C(\mu h^{1/3} + h^{2/3}) \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}, \quad (3.54)$$

con C costante che dipende solamente da $[a, b]$.

Osserviamo ora che:

$$v(z)\text{sign } v(z) - |v(z)| = 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} |v(x)| - v(x)\text{sign } v(z) &= |v(x)| - |v(z)| + [v(z) - v(x)] \text{sign } v(z) \\ &\leq |v(x) - v(z)| + [v(z) - v(x)] \text{sign } v(z) \\ &\leq 2|v(x) - v(z)|. \end{aligned}$$

Grazie a ciò, dalla definizione di ϕ otteniamo:

$$|v(x)| - \phi(x)v(x) = \int_{\mathbb{R}} -h^{-1/3} \rho \left(\frac{x-z}{h^{1/3}} \right) \text{sign } v(z)v(x) dz + |v(x)|.$$

Dato che ρ_h ha massa uguale a 1:

$$\begin{aligned} |v(x)| - \phi(x)v(x) &= \int_{\mathbb{R}} h^{-1/3} \rho \left(\frac{x-z}{h^{1/3}} \right) \left[|v(x)| - \text{sign } v(z)v(x) \right] dz \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} h^{-1/3} \rho \left(\frac{x-z}{h^{1/3}} \right) |v(x) - v(z)| dz. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Facciamo un cambio di variabile. Sia

$$\xi = \frac{x - z}{h^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad dz = -h^{1/3} d\xi.$$

Perciò otteniamo:

$$(3.55) = 2 \int_{\mathbb{R}} \rho(\xi) |v(x) - v(x - h^{1/3}\xi)| d\xi = 2 \int_{|\xi| < 1} \rho(\xi) |v(x) - v(x - h^{1/3}\xi)| d\xi.$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo stimare

$$\int_{\mathbb{R}} |v(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \phi(x) v(x) dx + 2 \int_{|\xi| < 1} \int_{\mathbb{R}} \rho(\xi) |v(x) - v(x - h^{1/3}\xi)| dx d\xi$$

Per l'ultimo addendo possiamo sviluppare i calcoli per ottenere:

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| < 1} \int_{\mathbb{R}} \rho(\xi) |v(x) - v(x - h^{1/3}\xi)| dx d\xi &= \int_{|\xi| < 1} \rho(\xi) \int_{\mathbb{R}} |v(x) - v(x - h^{1/3}\xi)| dx d\xi = \\ &= \int_{|\xi| < 1} \rho(\xi) \int_{\mathbb{R}} |u_{\mu}(x, t + h) - u_{\mu}(x, t) - u(x - h^{1/3}\xi, t + h) + u_{\mu}(x - h^{1/3}\xi)| dx d\xi \\ &\leq \int_{|\xi| < 1} \rho(\xi) 2\omega(|h^{1/3}\xi|) d\xi \leq 2\omega(|h^{1/3}|) \int_{|\xi| < 1} \rho(\xi) d\xi = 2\omega(|h^{1/3}|). \end{aligned}$$

Perciò, utilizzando (3.54), otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}} |v(x)| dx \leq C(\mu h^{1/3} + h^{2/3}) \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} + 4\omega(h^{1/3}).$$

□

3.5.4 Passo 4

In questo ultimo passo dimostriamo il teorema di esistenza (3.2.3).

Consideriamo la famiglia $\{u_{\mu}\}$. Per il teorema (3.5.3) abbiamo che:

$$\lim_{\|(y,h)\| \rightarrow 0} \|u_{\mu}(x + y, t + h) - u_{\mu}(x, t)\|_{\mathcal{L}^1} = 0 \quad \text{uniformemente in } \mu.$$

Inoltre, per il teorema (3.5.2), la famiglia $\{u_{\mu}\}$ è equilimitata.

Perciò per il *teorema di Riesz-Fréchet-Kolmogorov* la famiglia $\{u_{\mu}\}$ ha chiusura compatta in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times [0, T])$. Di conseguenza per qualsiasi successione $\{u_{\mu_k}\}$

tale che $\mu_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, esiste una sottosuccessione convergente in \mathcal{L}^1 a una funzione u appartenente alla chiusura di $\{u_\mu\}$. Per semplicità evitiamo di rinominare tale successione.

A questo punto, possiamo estrarre una sottosuccessione di $\{u_{\mu_k}\}$ (chiamiamola per comodità nuovamente $\{u_{\mu_k}\}$) tale che converga ad u quasi ovunque in $\mathbb{R} \times [0, T]$ e $\|u_{\mu_k}\|_{\mathcal{L}^\infty} < M$ uniformemente rispetto a k . Per il teorema (3.5.1) u è una soluzione entropica di (1.7) e, dal momento che abbiamo dimostrato che tale soluzione è unica, allora la famiglia $\{u_\mu\}$ deve convergere a u per $\mu \rightarrow 0$.

Per concludere la dimostrazione dobbiamo dimostrare che la funzione limite $u \in C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R})) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$. Innanzitutto osserviamo che $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$, perché

$$\|u_\mu\|_{\mathcal{L}^\infty} < M \quad \text{uniformemente rispetto a } \mu.$$

Quindi dato che u_μ converge quasi ovunque a u otteniamo subito

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty} < M.$$

Per dimostrare la continuità osserviamo che per il teorema (3.5.3)

$$\int_{\mathbb{R}} |u_\mu(x, t+h) - u_\mu(x, t)| dx \leq C(h^{2/3} + \mu h^{1/3}) \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} + 2\omega(h^{1/3}), \quad h > 0.$$

Perciò facendo tendere μ a zero e sfruttando il *teorema di convergenza dominata* ottengo:

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, t+h) - u(x, t)| dx \leq C(h^{2/3} + \mu h^{1/3}) \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} + 2\omega(h^{1/3}), \quad h > 0.$$

Perciò $u \in C([0, T], \mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$.

Bibliografia

- [1] Joel Smoller: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1983.
- [2] H. Brezis: *Analisi funzionale*, Liguori editore.
- [3] Lawrence C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [4] W. Rudin: *Analisi Reale e Complessa*, Bollati Boringhieri, 1974.
- [5] Denis Serre: *Systems of Conservation Laws*, Cambridge University Press, 1999.
- [6] S.N. Kruzkov: *First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables*, Mat. Sbornik Tom 81 (123)(1970), No. 2.
- [7] Alberto Bressan: *Leggi di Conservazione*, Bollettino UMI, La matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol. VI-A, 415-439.
- [8] C.M. Dafermos: *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, 2000.