



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Struttura quasi-BV delle soluzioni
entropiche di leggi di conservazione
multidimensionali**

Relatore: Prof. Gianluca Crippa

Candidato: Marcello Carioni

Anno Accademico 2010/2011

Indice

1	Funzioni a variazione limitata e insiemi di perimetro finito	6
1.1	Definizione e prime proprietà	6
1.2	Insiemi di perimetro finito	9
1.2.1	Struttura degli insiemi di perimetro finito	11
1.3	Funzioni a variazione limitata in dimensione uno	17
1.4	Struttura di funzioni BV in dimensione N	25
1.4.1	Continuità e differenziabilità approssimata	25
1.4.2	Teorema di Federer-Vol’pert e teorema di Calderon-Zygmund	27
1.4.3	Decomposizione della derivata di una funzione BV in più variabili spaziali	39
2	Leggi di conservazione: struttura di soluzioni BV	41
2.1	Introduzione e prerequisiti	41
2.2	BV-stabilità	43
3	Struttura di una soluzione non BV: enunciato del teorema e definizioni preliminari	46
3.1	Presentazione del problema	46
3.2	Considerazioni sulla non-degenerazione del flusso	47
3.3	Enunciato del teorema e lemmi preliminari	48
4	Caratterizzazione degli split states	56
4.1	Split states e successioni di blow-up	56
4.2	Split states senza dissipazione di entropia	62
4.3	Split states speciali: ν ha supporto in un iperpiano	65
4.4	Split states speciali: ν ha supporto in metà iperpiano	70
4.5	Classificazione degli split states generici	73
4.5.1	Rettificabilità di J	74
4.5.2	Blow-up in un iperpiano	80
4.5.3	Rettificabilità di ∂J	84

4.5.4	Blow-up in metà iperpiano	93
5	Dimostrazione del teorema	100
5.1	J è rettificabile	102
5.1.1	Passo 1	104
5.1.2	Passo 2	106
5.1.3	Passo 3	108
5.2	J è l'insieme di salto	110
A	Complementi di teoria della misura	114
A.1	Teorema di disintegrazione	114
A.2	Teoremi di ricoprimento	114
A.3	Teoremi di Radon-Nikodym e di Besicovitch	115
A.4	Densità di misure	116
A.5	Teorema di rappresentazione di Riesz	117
A.6	Convergenza debole* e risultati di compattezza per misure di Radon	117
	Bibliografia	119

Introduzione

Lo scopo di questo lavoro di tesi è lo studio della regolarità della soluzione di una legge di conservazione scalare multidimensionale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x \cdot f(u) = 0 \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

dove $u(t, x)$ è la funzione incognita e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è il flusso.

La teoria generale sulle leggi di conservazione ha avuto un grande impulso in questi ultimi anni sia per l'importanza che queste EDP hanno nel modellizzare fenomeni fisici sia per le complesse teorie matematiche che risulta naturale applicare al loro studio.

Il mattone fondamentale di tutto questo lavoro è sicuramente il teorema di Kruzkov [8] che ha permesso di dare un risultato di esistenza e unicità del problema di Cauchy relativo alla legge di conservazione scalare multidimensionale (1). Dopo questo primo passo i matematici si sono concentrati da un lato a studiare i sistemi di leggi di conservazioni e dall'altro a tentare di dimostrare risultati di regolarità per le soluzioni di una legge di conservazione scalare multidimensionale. Dal secondo filone è nata l'esigenza di cominciare a lavorare con funzioni a variazione limitata; infatti direttamente del teorema di Kruzkov discende che le leggi di conservazione scalari sono BV-stabili, cioè la soluzione è una funzione a variazione limitata se supponiamo che lo sia anche il dato iniziale. Risulta quindi evidente che lo spazio funzionale BV sia quello più adatto quando si tratta questo tipo di EDP.

Rientra in quest'ottica la prima parte della tesi. Il primo capitolo, infatti, consiste in un'ampia panoramica sulle funzioni a variazione limitata. Vengono dimostrate le proprietà più importanti di tale spazio funzionale e parallelamente si porta avanti la trattazione sugli insiemi a perimetro finito, cioè insiemi tali che la loro funzione caratteristica sia una funzione BV. Sono inoltre proposti i risultati che riguardano la struttura di funzioni a variazione limitata: è approssimativamente continua al di fuori dell'insieme di discontinuità che si dimostra essere \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile e ammette traccia in ogni punto di tale insieme.

Nel secondo capitolo si presenta la legge di conservazione scalare multidimensionale e dopo una breve panoramica sui risultati classici di Kruzkov si dimostra la BV-stabilità. Risulta quindi immediato applicare i risultati del primo capitolo direttamente alla soluzione della legge di conservazione, in modo da poter caratterizzarne completamente la struttura.

Da queste osservazioni sembra che, ad una prima analisi, non si possa dire nulla sulla struttura della soluzione se il dato iniziale non è una funzione BV ma appartiene solo a \mathcal{L}^∞ . Ciò appariva un dato di fatto anche perchè se si considera l'equazione del trasporto che è un caso particolare di una legge di conservazione, si può notare come non vi sia alcun miglioramento della regolarità della soluzione rispetto a quella del dato iniziale.

Nel 2003, tuttavia, De Lellis, Otto e Westickemberg pubblicarono un articolo dal titolo *Structure of Entropy Solutions for Scalar Conservation Laws* [5] in cui dimostrarono che, sotto l'ipotesi che il flusso sia sufficientemente non-lineare, la soluzione di una legge di conservazione scalare multidimensionale ha una struttura quasi-BV. Tale risultato è estremamente interessante, perchè si riesce ad aumentare la regolarità della soluzione di un EDP semplicemente ponendo ipotesi di non-degenerazione al flusso.

Nel terzo capitolo della tesi vengono poste le basi per enunciare questo teorema e si provano alcuni risultati preliminari per la dimostrazione. In particolare lo strumento fondamentale è la formulazione cinetica della legge di conservazione introdotta per la prima volta da Lions, Perthame e Tadmor in [9]. L'idea è quella di riscrivere in maniera equivalente la legge di conservazione (1) nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi(v, u(t, x)) + f'(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u(t, x)) = \frac{\partial \mu}{\partial v}, \quad (2)$$

dove $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ e

$$\chi(v, u) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < v \leq u, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

molto simile alle formulazioni cinetiche delle leggi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia in teoria cinetica.

L'altro strumento fondamentale che viene introdotto in questo capitolo è il procedimento di blow-up che già era stato usato per studiare gli insiemi a perimetro finito. L'idea è costruire una famiglia di soluzioni di (1) $u^{y,r} = u(y + rx)$ e di misure $\mu^{y,r}(B \times A) = \frac{1}{r^{N-1}}\mu(B \times (y + rA))$ in modo che l'equazione cinetica (2) sia ancora soddisfatta. Passando poi al limite per $r \downarrow 0$ (per qualche sottosuccessione) si può studiare l'equazione che si

ottiene.

Fondamentale in questo senso è il capitolo successivo. Infatti si osserva che da un procedimento di blow-up si può ottenere una configurazione dell'equazione cinetica più facile da studiare. Tale configurazione viene detta split state ed in termini matematici si tratta di una tripla $(u, h, \nu) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N) \times BV(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ tale che l'equazione cinetica possa essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi(v, u(t, x)) + f'(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u(t, x)) = h(v) \nu.$$

Tutto il quarto capitolo è dedicato alla caratterizzazione degli split states e pone le basi per la dimostrazione vera e propria del teorema che occupa per intero il quinto capitolo.

Nella prima parte si mostra attraverso criteri standard di teoria geometrica della misura che l'insieme di discontinuità J definito come

$$J := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} > 0 \right\}, \quad (3)$$

è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile.

Nella seconda parte invece si dimostrano i risultati di regolarità della soluzione. In particolare si osserva che al di fuori di J la soluzione u ha la proprietà di vanishing mean oscillation (VMO), leggermente più debole rispetto alla continuità approssimata tipica delle funzioni BV e che u ammette l'esistenza della traccia in ogni punto di J .

Capitolo 1

Funzioni a variazione limitata e insiemi di perimetro finito

Il primo capitolo della tesi è dedicato alle funzioni BV e agli insiemi di perimetro finito. Per una trattazione maggiormente approfondita si fa riferimento a [7] e a [1].

1.1 Definizione e prime proprietà

In questa sezione introdurremo le funzioni a variazione limitata, o funzioni BV, in dimensione N . In particolare vedremo le proprietà fondamentali di tale spazio funzionale che saranno poi usate diffusamente nei capitoli successivi.

Definizione 1.1.1 *Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto e sia $u \in \mathcal{L}^1(U)$. Diremo che $u \in BV(U)$ se*

$$\sup \left\{ \int_U u \operatorname{div} \varphi \, dx \mid \varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty. \quad (1.1)$$

E analogamente

Definizione 1.1.2 *Data $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$, diremo che $u \in BV_{loc}(U)$ se per ogni aperto $V \subset\subset U$*

$$\sup \left\{ \int_U u \operatorname{div} \varphi \, dx \mid \varphi \in C_c^1(V, \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty. \quad (1.2)$$

Dopo aver introdotto i concetti preliminari vediamo un teorema di caratterizzazione delle funzioni $BV_{loc}(U)$ che ci permetterà di dare una definizione equivalente di funzioni a variazione limitata.

Teorema 1.1.1 Sia $u \in BV_{loc}(U)$. Esiste allora una misura di Radon μ definita su U e una funzione μ -misurabile $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ con $|\sigma(x)| = 1$ μ -a.e. tale che

$$\int_U u \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_U \varphi \cdot \sigma \, d\mu$$

per qualsiasi $\varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Definiamo il funzionale $L : C_c^1(U, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(\varphi) := - \int_U u \operatorname{div} \varphi \, dx.$$

Dato che $u \in BV_{loc}(U)$ si ha che per qualsiasi aperto $V \subset\subset U$

$$C(V) := \sup\{L(\varphi) : \varphi \in C_c^1(V, \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1\} < \infty,$$

quindi

$$|L(\varphi)| \leq C(V) \|\varphi\|_{\mathcal{L}^\infty}. \quad (1.3)$$

Vogliamo ora estendere L a $C_c(U, \mathbb{R}^N)$. Per far ciò consideriamo una generica funzione $\varphi \in C_c(U, \mathbb{R}^N)$ e chiamiamo K il suo supporto. Allora esiste un aperto V tale che $K \subset V \subset\subset U$ ed esiste una successione $\{\varphi_k\} \subset C_c^1(V, \mathbb{R}^N)$ tale che $\varphi_k \rightarrow \varphi$ uniformemente su V . Estendiamo quindi L come

$$\bar{L}(\varphi) := \lim_{k \rightarrow \infty} L(\varphi_k).$$

Tale limite esiste e non dipende dalla scelta della successione φ_k . Perciò \bar{L} è l'unica estensione di L a $C_c(U, \mathbb{R}^N)$ e si ha

$$\sup\{\bar{L}(\varphi) : \varphi \in C_c(U, \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1, \operatorname{supp} \varphi \subset K\} < \infty,$$

per qualsiasi $K \subset U$ compatto. Applicando il teorema di rappresentazione di Riesz (Teorema A.5.1) abbiamo dimostrato la tesi. □

Definiamo ora una misura di Radon come

$$Du = \sigma \mu.$$

Otteniamo quindi dal teorema precedente che

$$\int_U u \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_U \varphi \cdot \sigma \, d\mu = - \int_U \varphi \cdot d(Du). \quad (1.4)$$

Perciò la misura di Radon Du è proprio la derivata distribuzionale di u in U . Questo risultato ci permette dare una definizione equivalente di funzione BV nel modo che segue.

Proposizione 1.1.2 Una funzione $u \in \mathcal{L}^1(U)$ è a variazione limitata se e solo se la sua derivata distribuzionale Du è una misura su \mathbb{R}^N con variazione totale finita in U .

Dimostrazione. Sia $u \in \mathcal{L}^1(U)$ a variazione limitata. Allora per (1.4) la sua derivata debole Du è una misura di Radon. Proviamo che ha variazione totale finita in U . Definiamo prima di tutto il concetto di variazione di una funzione u in un insieme U . Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ e $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$ allora la variazione di u in U è

$$V(u, U) = \sup \left\{ \int_U u \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1 \right\}. \quad (1.5)$$

Quindi

$$\begin{aligned} V(u, U) &= \sup \left\{ \int_U u \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_U \varphi \cdot d(Du) : \varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1 \right\} \\ &= |Du|(U). \end{aligned}$$

Dato che $V(u, U) < \infty$ essendo u a variazione limitata si ha che

$$|Du|(U) < \infty.$$

Il viceversa è analogo. □

Lo spazio $BV(U)$, cioè lo spazio delle funzioni a variazione limitata risulta essere uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|u\|_{BV(U)} = \|u\|_{\mathcal{L}^1(U)} + |Du|(U).$$

Vediamo alcune delle proprietà più importanti delle funzioni a variazione limitata.

Proposizione 1.1.3 Sia $u \in BV(U)$. Allora la funzione $u \rightarrow |Du|(U)$ è semicontinua inferiormente in BV rispetto alla topologia di $\mathcal{L}_{loc}^1(U)$.

Dimostrazione. Se $u \in BV(U)$ allora $|Du|(U) = V(u, U)$. Perciò basta dimostrare che la funzione $u \rightarrow V(u, U)$ è semicontinua inferiormente in BV rispetto alla topologia di $\mathcal{L}_{loc}^1(U)$.

Sia $(u_h) \subset BV(U)$ tali che $u_h \rightarrow u$ in $\mathcal{L}_{loc}^1(U)$, allora per il lemma di Fatou

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_U u_h \operatorname{div} \varphi \, dx \geq \int_U u \operatorname{div} \varphi \, dx$$

per qualsiasi $\varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^N)$. Perciò passando all'estremo superiore abbiamo dimostrato la tesi.

□

Vediamo infine, senza dimostrazione, un teorema di densità che ci servirà per approssimare funzioni a variazione limitata con funzioni di classe C^∞ .

Teorema 1.1.4 *Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto e sia $u \in BV(U)$. Allora esiste una successione di funzioni $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset BV(U) \cap C^\infty(U)$ tale che*

- $u_k \rightarrow u$ in $\mathcal{L}^1(U)$ e
- $|Du_k|(U) \rightarrow |Du|(U)$ per $k \rightarrow \infty$.

1.2 Insiemi di perimetro finito

Definizione 1.2.1 *Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^N misurabile rispetto alla misura di Lebesgue. Per qualsiasi $U \subset \mathbb{R}^N$ il perimetro di E in U indicato con $P(E, U)$ è la variazione di $\mathbf{1}_E$ in U , cioè:*

$$P(E, U) := \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1 \right\}$$

Diremo che E è di perimetro finito in U se $P(E, U) < \infty$.

Osserviamo che la classe degli insiemi di perimetro finito contiene quella degli insiemi con frontiera C^1 in U tali che $\mathcal{H}^{N-1}(U \cap \partial E) < \infty$. Infatti per il teorema di Gauss-Green si ha:

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{U \cap \partial E} \nu_E \cdot \varphi \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^N),$$

essendo ν_E la normale uscente da E .

Da tale formula si osserva che nelle ipotesi precedenti si ha che $P(E, U) = \mathcal{H}^{N-1}(U \cap \partial E)$.

Teorema 1.2.1 *Per qualsiasi insieme E di perimetro finito in U la derivata distribuzionale della funzione caratteristica $D\mathbf{1}_E$ è una misura di Radon in U . Inoltre $P(E, U) = |D\mathbf{1}_E|(U)$ e vale la formula:*

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_U \nu_E \cdot \varphi \, d|D\mathbf{1}_E| \quad \forall \varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^N), \quad (1.6)$$

dove ν_E è definito in maniera univoca da $D\mathbf{1}_E = \nu_E |D\mathbf{1}_E|$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathbf{1}_E \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$. Perciò dato che $P(E, U)$ è finito e P è una funzione crescente in U si ha che $\mathbf{1}_E \in BV_{loc}(U)$. Perciò

$$|D\mathbf{1}_E|(A) = P(E, A) \leq P(E, U) \quad \forall A \subset\subset U \text{ aperto.}$$

Perciò $D\mathbf{1}_E$ è una misura di Radon finita su U e $D\mathbf{1}_E = P(E, U)$.

□

Vediamo ora, senza dimostrazione, alcuni teoremi classici enunciati in ambiente BV. Questi strumenti ci serviranno nelle sezioni successive per caratterizzare la struttura degli insiemi a perimetro finito e della derivata di una funzione BV.

Prima diamo la definizione di esponente coniugato a $1 \leq p \leq N$:

$$p^* := \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{se } p < N \\ \infty & \text{se } p = N. \end{cases}$$

Teorema 1.2.2 (Disuguaglianze di Poincarè) *Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto, connesso tale che ∂U sia Lipschitz. Allora*

$$\|u - u_U\|_{\mathcal{L}^p(U)} \leq C|Du|(U) \quad \forall u \in BV(U), \quad 1 \leq p \leq 1^*,$$

per qualche costante C dipendente solo da U . E inoltre

$$\|u - u_{B_\rho(x)}\|_{\mathcal{L}^p(B_\rho(x))} \leq \gamma \rho^{N/p} \frac{|Du|(B_\rho(x))}{\rho^{N-1}} \quad \forall u \in BV(B_\rho(x)), \quad 1 \leq p \leq 1^*.$$

Dove con la notazione u_A intendiamo la media di u sull'insieme A .

Teorema 1.2.3 (Formula di Coarea) *Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ e sia $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$. Allora*

$$V(u, U) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\{x \in U : u(x) > t\}, U) dt.$$

In particolare se $u \in BV(U)$ l'insieme $\{u > t\}$ ha perimetro finito in U per \mathcal{L}^1 -a.e. $t \in \mathbb{R}$ e

$$|Du|(B) = \int_{-\infty}^{\infty} |D\mathbf{1}_{\{u>t\}}|(B) dt, \quad Du(B) = \int_{-\infty}^{\infty} D\mathbf{1}_{\{u>t\}}(B) dt$$

per qualsiasi $B \in \mathcal{B}(U)$.

Vediamo ora una versione della disuguaglianza isoperimetrica in versione locale per funzioni caratteristiche di insiemi di perimetro finito.

Teorema 1.2.4 (Disuguaglianza isoperimetrica) *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme a perimetro finito. Per qualsiasi $x \in \mathbb{R}^N$ e $\rho > 0$ esiste $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\min\{(\mathbf{1}_E)_{B_\rho(x)}, 1 - (\mathbf{1}_E)_{B_\rho(x)}\} \leq \gamma \frac{P(E, B_\rho(x))}{\omega_N \rho^{N-1}}.$$

1.2.1 Struttura degli insiemi di perimetro finito

Diamo alcune definizioni che ci serviranno in seguito per caratterizzare la struttura degli insiemi di perimetro finito.

Definizione 1.2.2 *Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ misurabile rispetto alla misura di Hausdorff k -dimensionale. Diremo che U è k -rettificabile se esiste una successione di funzioni Lipschitz $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ tali che*

$$U \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^k).$$

Definizione 1.2.3 *Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ misurabile rispetto alla misura di Hausdorff k -dimensionale. Diremo che U è numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile se esiste una successione di funzioni Lipschitz $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ tali che*

$$\mathcal{H}^k \left(U \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^k) \right) = 0.$$

Definizione 1.2.4 *Diremo inoltre che $U \subset \mathbb{R}^N$ è \mathcal{H}^k -rettificabile se è numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile e $\mathcal{H}^k(U) < \infty$.*

Si può dimostrare che la proprietà di un insieme U di essere numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile è equivalente a richiedere che U possa essere ricoperto \mathcal{H}^k -a.e. con grafici Lipschitziani di dimensione k . In realtà quando dimostreremo il teorema principale useremo questa come definizione di insieme numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile che risulterà più facilmente trattabile a livello geometrico.

Dopo aver definito il concetto di insieme rettificabile vogliamo introdurre la nozione di spazio tangente per un insieme con questa proprietà.

Definizione 1.2.5 Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile. Sia $\{U_i\}$ una partizione (a meno di un insieme \mathcal{H}^k -trascurabile) di U in grafici Lipschitz di dimensione k . Per \mathcal{H}^k -a.e. $x \in U$ possiamo definire lo spazio tangente approssimato ad U in $x \in U_i$ come lo spazio tangente ad U_i definito nella maniera usuale. Chiameremo quindi $\text{Tan}^k(U, x)$ lo spazio tangente approssimato di U definito per \mathcal{H}^k -a.e. $x \in U$.

Si può dimostrare che la definizione di spazio tangente approssimato è ben data (cioè non dipende dalla partizione U_i scelta).

Diciamo ora cosa intendiamo per orientazione di un insieme generico U .

Definizione 1.2.6 Sia $U \subset \mathbb{R}^N$. Diremo che U è orientato da una funzione Borel $\nu : U \rightarrow \mathbb{S}^k$ se $\text{Tan}^k(U, x) = \nu^\perp(x)$ per \mathcal{H}^k -a.e. $x \in U$.

Di conseguenza si osserva che ogni insieme numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile può essere orientato.

Menzioniamo inoltre un teorema di caratterizzazione molto importante per gli insiemi rettificabili che unisce i concetti di rettificabilità di un insieme e la sua densità (vedi Sezione A.4 in appendice).

Teorema 1.2.5 (Besicovitch-Marstrand-Mattila) Sia $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ con $\mathcal{H}^k(U) < \infty$. Allora U è \mathcal{H}^k -rettificabile se e solo se $\Theta_k(U, x) = 1$ per \mathcal{H}^k -a.e. $x \in U$.

L'implicazione veramente profonda di questo teorema è quella che consente di dimostrare che un insieme è \mathcal{H}^k -rettificabile dimostrando che la densità dell'insieme è 1 \mathcal{H}^k -quasi ovunque.

Introduciamo ora un concetto di frontiera proprio degli insiemi a perimetro finito, che non è di natura topologica, ma è più legato alla derivata della funzione caratteristica dell'insieme vista come misura. Risulterà chiaro in seguito come tale definizione è molto più naturale in questo contesto.

Definizione 1.2.7 Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile secondo la misura di Lebesgue e sia U il più grande aperto tale che E è localmente di perimetro finito in U . Chiameremo frontiera ridotta $\mathcal{F}E$ l'insieme dei punti $x \in \text{supp}|D\mathbf{1}_E| \cap U$ tali che il limite

$$\tilde{\nu}_E(x) := \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{D\mathbf{1}_E(B_\rho(x))}{|D\mathbf{1}_E|(B_\rho(x))}$$

esiste in \mathbb{R}^N e soddisfa $|\tilde{\nu}_E(x)| = 1$. La funzione $\tilde{\nu}_E : \mathcal{F}E \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ è chiamata la normale interna generalizzata di E .

Osserviamo che $\mathcal{F}E$ è un boreliano e che $\tilde{\nu}_E : \mathcal{F}E \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ è una funzione Borel-misurabile.

Mostriamo ora come la normale interna generalizzata $\tilde{\nu}_E$ appena definita coincide con la densità di $|D\mathbf{1}_E|$ rispetto a $D\mathbf{1}_E$ che abbiamo chiamato ν_E . Per il Teorema A.3.2 si ha che

$$D\mathbf{1}_E = \tilde{\nu}_E |D\mathbf{1}_E|.$$

Di conseguenza ν_E e $\tilde{\nu}_E$ coincidono $|D\mathbf{1}_E|$ -a.e.

D'ora in avanti chiameremo ν_E la normale interna generalizzata uniformando le notazioni.

Il prossimo passo è dimostrare che $\mathcal{F}E$ è $(N-1)$ -rettificabile e che $|D\mathbf{1}_E|$ coincide con $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \mathcal{F}E$. Da questo risultato, che è proprio il famoso teorema di De Giorgi segue, grazie a (1.6), la seguente formula di Gauss-Green generalizzata per gli insiemi di perimetro finito in U

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\mathcal{F}E} \nu_E \cdot \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \quad \forall \varphi \in C_c(U; \mathbb{R}^N). \quad (1.7)$$

L'unica differenza con la formula di Gauss-Green classica è che la normale e il bordo sono intesi in un ambiente di spazio di misura e non in senso topologico. In particolare $\mathcal{F}E$ non è chiuso e ν_E non è continua in generale. Questo appena descritto è parte del teorema di De Giorgi che enunciamo senza dimostrazione.

Teorema 1.2.6 (De Giorgi) *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile secondo Lebesgue. Allora $\mathcal{F}E$ è numerabilmente $(N-1)$ -rettificabile e $|D\mathbf{1}_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \mathcal{F}E$. Inoltre per qualsiasi $x_0 \in \mathcal{F}E$ l'insieme $(E - x_0)/\rho$ converge localmente in misura in \mathbb{R}^N per $\rho \downarrow 0$ al semispazio H^- ortogonale a $\nu_E(x_0)$ e contenente $\nu_E(x_0)$. Inoltre*

$$\operatorname{Tan}^{N-1}(\mathcal{F}E, x) = \nu_E^\perp(x) \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } x \in \mathcal{F}E.$$

Diamo ora una definizione che ci permetterà di studiare meglio le proprietà del bordo di un insieme E a perimetro finito.

Definizione 1.2.8 (Punti di densità t e frontiera essenziale) *Per qualsiasi $t \in [0, 1]$ e per qualsiasi $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile secondo Lebesgue indichiamo con E^t l'insieme:*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^N : \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} = t \right\}$$

di tutti i punti aventi densità t .

Denotiamo con $\partial^ E$ la frontiera essenziale di E , cioè l'insieme $\mathbb{R}^N \setminus (E^0 \cup E^1)$ dei punti la cui densità non è né 0 né 1.*

Gli insiemi E^0 e E^1 possono essere pensati come l'interno e l'esterno dell'insieme E e questo motiva il nome di frontiera essenziale. E' immediato osservare che gli insiemi E^t sono boreliani.

Teorema 1.2.7 (Federer) *Sia E un insieme di perimetro finito in U , allora*

$$\mathcal{F}E \subset E^{1/2} \subset \partial^*E \quad e \quad \mathcal{H}^{N-1}(U \setminus (E^0 \cup \mathcal{F}E \cup E^1)) = 0.$$

*In particolare dalla prima inclusione e dalla seconda formula segue che E ha densità 0, 1 o 1/2 in \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $x \in U$, e \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $x \in \partial^*E \cap U$ appartiene a $\mathcal{F}E$.*

Dimostrazione. Osserviamo che dal Teorema 1.2.6 se $x \in \mathcal{F}E$ si ha che $\frac{E-x}{\rho}$ converge localmente in misura al semispazio H^- . Con H^- intenderemo il semispazio ortogonale a $\nu_E(x)$ e contenente $\nu_E(x)$. Perciò attraverso un cambio di variabile si ha che $\frac{E \cap B_\rho(x)}{\rho^N}$ converge localmente in misura a $H^- \cap B_1(0)$. Osserviamo che

$$|(H^- \cap B_1(0))| = \frac{1}{2}\omega_N,$$

essendo ω_N la misura di Lebesgue della sfera N -dimensionale di raggio unitario.

Da cui si ottiene facilmente che

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} = 1/2.$$

Perciò $x \in E^{1/2}$ e quindi $\mathcal{F}E \subset E^{1/2}$.

Vogliamo ora dimostrare che

$$P(E, B_\rho(x)) = o(\rho^{N-1}) \implies x \in E^0 \cup E^1. \quad (1.8)$$

Per far ciò indichiamo con $\alpha(\rho)$ la funzione $|E \cap B_\rho(x)|/|B_\rho(x)|$. Applicando il Teorema 1.2.4 all'insieme a perimetro finito E si ottiene

$$\min \{(\chi_E)_{B_\rho(x)}, 1 - (\chi_E)_{B_\rho(x)}\} \leq \gamma \frac{P(E, B_\rho(x))}{\omega_N \rho^{N-1}}. \quad (1.9)$$

Nel nostro caso $\alpha(\rho) = (\chi_E)_{B_\rho(x)}$, quindi per ipotesi abbiamo che $\min\{\alpha(\rho), 1 - \alpha(\rho)\}$ è infinitesima per $\rho \downarrow 0$, quindi o $\alpha(\rho) \rightarrow 0$ o $\alpha(\rho) \rightarrow 1$. Così facendo abbiamo dimostrato l'affermazione (1.8).

Ora per il Teorema 1.2.6 si ha $P(E, B_\rho(x)) = \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{F}E \cap B_\rho(x))$.
Per la contronominale di (1.8), abbiamo che dato $x \in \partial^*E \cap U$

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{F}E \cap B_\rho(x))}{\rho^{N-1}} > 0. \quad (1.10)$$

Perciò $x \in \partial^*E \cap U$ è contenuto in un insieme in cui la $(N-1)$ -dimensionale densità superiore di $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \mathcal{F}E$ è strettamente positiva.

Da (A.5) in appendice abbiamo che

$$\Theta_{N-1}(\mathcal{F}E, x) = 0 \quad \text{per} \quad \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{F}E,$$

cioè

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{F}E \cap B_\rho(x))}{\rho^{N-1}} = 0 \quad \text{per} \quad \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{F}E, \quad (1.11)$$

perciò confrontando (1.10) e (1.11) si ha che \mathcal{H}^{N-1} -a.e. punti di $x \in \partial^*E \cap U$ appartengono a $\mathcal{F}E$. Da cui segue la tesi.

□

Dal teorema di Federer segue che nella formula di Gauss Green posso sostituire $\mathcal{F}E$ con ∂^*E o con $E^{1/2}$, infatti si ha che

$$P(E, U) = \mathcal{H}^{N-1}(U \cap \partial^*E) = \mathcal{H}^{N-1}(U \cap E^{1/2}).$$

Inoltre posso riscrivere la formula di Coarea usando la frontiera essenziale:

$$|Du|(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{N-1}(B \cap \partial^*\{u > t\}) dt \quad \forall B \in \mathcal{B}(U). \quad (1.12)$$

Vediamo infine una proposizione che pone in relazione le proprietà il perimetro di un insieme e la misura di Hausdorff del suo bordo topologico.

Proposizione 1.2.8 *Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto, tale che $\mathcal{H}^{N-1}(\partial U) < \infty$. Allora U ha perimetro finito in \mathbb{R}^N e $|D\mathbf{1}_U| \leq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial U$. Inoltre vale l'uguaglianza se U ha frontiera Lipschitz.*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità possiamo assumere che U sia limitato. Per definizione di misura di Hausdorff, per qualsiasi $\delta > 0$ e per qualsiasi $\epsilon > 0$, possiamo trovare una famiglia finita (perchè U limitato) di chiusi $\{C_i\}_{i \in I}$ di diametro $2r_i < \delta$, la cui unione contiene ∂U e tale che

$$\sum_i \omega_{N-1} r_i^{N-1} < \mathcal{H}_\delta^{N-1}(\partial U) + \epsilon < \mathcal{H}^{N-1}(\partial U) + \epsilon. \quad (1.13)$$

Indichiamo con $\{B_i\}_{i \in I}$ la famiglia di palle chiuse di raggio $2r_i$ centrate in un punto arbitrario $x_i \in C_i$. Ovviamente l'unione delle palle B_i contiene ∂U . Perciò definita U_δ come l'unione di U con le palle B_i si ha che $\partial U_\delta \subset \bigcup_i \partial B_i$. Perciò da (1.13) otteniamo che U_δ ha perimetro finito in \mathbb{R}^N e

$$P(U_\delta, \mathbb{R}^N) \leq \sum_i \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_i) \leq C_N(\mathcal{H}^{N-1}(\partial U) + \delta).$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} |U_\delta \setminus U| &\leq \left| \bigcup_i B_i \right| \leq \sum_i \omega_N r_i^N \leq C_N \left(\sum_i \omega_{N-1} r_i^{N-1} \right) \left(\sum_i r_i \right) \\ &\leq (\mathcal{H}^{N-1}(\partial U) + \delta) \left(\sum_i r_i \right). \end{aligned}$$

Perciò ricordando che $2r_i < \delta$ e facendo tendere δ a zero, si ottiene che

$$\lim_{\delta \downarrow 0} |U_\delta \setminus U| = 0.$$

Di conseguenza

$$P(U, \mathbb{R}^N) \leq \liminf_{\delta \downarrow 0} P(U_\delta, \mathbb{R}^N) \leq C_N \mathcal{H}^{N-1}(\partial U) < \infty.$$

Per il teorema di De Giorgi $|D\mathbf{1}_U| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \mathcal{F}U$, perciò la disuguaglianza che si voleva dimostrare segue dalla ovvia inclusione $\mathcal{F}U \subset \partial U$.

Supponiamo ora che U abbia frontiera Lipschitz. Allora per qualsiasi $x \in \partial U$ esiste $\bar{r} > 0$ e un cono C tale che per qualsiasi $r < \bar{r}$, $(x + C) \cap B_r(x)$ sia contenuto in U e $(x - C) \cap B_r(x)$ sia contenuto in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{U}$ (o viceversa). Proviamo che $\partial U \subset \partial^* U$. Osserviamo che per qualsiasi $r < \bar{r}$ e $x \in \partial U$ si ha

$$|(x + C) \cap B_r(x)| \leq |U \cap B_r(x)| \leq |B_r(x) \cap (\mathbb{R}^N \setminus (x - C))|,$$

perciò

$$0 < \lim_{r \downarrow 0} \frac{|U \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} < 1$$

e quindi per definizione $x \in \partial^* U$.

Ora come conseguenza del teorema di Federer sappiamo che

$$P(E, U) = \mathcal{H}^{N-1}(U \cap \partial^* U).$$

Perciò abbiamo che per qualsiasi $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial U)(A) &\leq (\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* U)(A) \\ &= \mathcal{H}^{N-1}(A \cap \partial^* U) \\ &= P(U, A) \\ &= |D\mathbf{1}_U|(A), \end{aligned}$$

che era ciò che volevamo dimostrare. □

1.3 Funzioni a variazione limitata in dimensione uno

Introduciamo ora il concetto di funzione a variazione limitata in una dimensione che ci permetterà di puntualizzare le differenze fra il caso monodimensionale e il caso N -dimensionale e di introdurre alcuni concetti che poi saranno fondamentali per studiare i teoremi di struttura sulle funzioni BV.

Definizione 1.3.1 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $I = (a, b)$. Data una qualsiasi funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ la variazione puntuale $pV(u, I)$ di u in I è definita da:*

$$pV(u, I) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| : n \geq 2, a < t_1 < \dots < t_n < b \right\}.$$

Dato invece $U \subset \mathbb{R}$ aperto la variazione puntuale $pV(u, U)$ è definita da $\sum_I pV(u, I)$, indicizzando con I le varie componenti connesse di U

Dalla definizione segue direttamente che qualsiasi funzione u tale con variazione puntuale finita in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è limitata dato che la sua oscillazione può essere stimata con $pV(u, I)$ e qualsiasi funzione monotona limitata ha variazione puntuale finita uguale a $|u(b_-) - u(a_+)|$. Proviamo quindi una proprietà tipica delle funzioni BV in una variabile legata alla possibilità di applicare la decomposizione di Hahn alla sua derivata.

Proposizione 1.3.1 *Sia $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $pV(u, I) < \infty$. Allora u può essere rappresentata come la differenza di due funzioni monotone.*

Dimostrazione. Prendiamo $I = (a, b)$ e sia

$$g(t) := \sup \left\{ \sum_i^{N-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)|, a < t_1 < \dots < t_{N-1} \leq t \right\}.$$

Definiamo le seguenti funzioni:

$$u^+(t) := \frac{g(t) + u(t)}{2} \quad u^-(t) := \frac{g(t) - u(t)}{2}.$$

Osserviamo che si ha subito che $u^+(t) - u^-(t) = u(t)$. Perciò rimane solo da dimostrare che u^\pm siano monotone.

Dimostriamo che $u^+(t)$ è crescente. Sia $b > \bar{t} > t$ e osserviamo che

$$g(\bar{t}) = g(t) + \sup \left\{ \sum_i^{N-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)|, t \leq t_1 < \dots < t_{N-1} \leq \bar{t} \right\}.$$

Perciò dato che

$$\sup \left\{ \sum_i^{N-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)|, t \leq t_1 < \dots < t_{N-1} \leq \bar{t} \right\} \geq u(\bar{t}) - u(t)$$

si ha che u^+ è crescente. Analogamente si dimostra che anche u^- è crescente.

□

Osserviamo ora che la quantità $pV(u, I)$ che abbiamo definito è sensibile alle variazioni u anche in un singolo punto, perciò ha senso definire la variazione essenziale $eV(u, U)$ come:

$$eV(u, U) := \inf \{ pV(v, U) : v = u \text{ } \mathcal{L}^1\text{-a.e. in } U \}. \quad (1.14)$$

Diremo che $u \in BV(U)$ se $eV(u, U) < \infty$. Vediamo ora come questa definizione sia in realtà la stessa definizione che abbiamo dato all'inizio se consideriamo il caso 1-dimensionale:

Teorema 1.3.2 *Per qualsiasi $u \in \mathcal{L}^1(U)$ l'estremo inferiore nella precedente è un minimo e la variazione $V(u, U)$, definita in (1.5), coincide con la variazione essenziale $eV(u, U)$.*

Dimostrazione. Cominciamo supponendo che $U = I = (a, b)$ e dimostriamo la prima disuguaglianza $V(u, I) \leq eV(u, I)$. Basta quindi provare che $V(u, I) \leq pV(v, I)$ per qualsiasi v nella stessa classe di equivalenza di u .

Costruiamo ora una successione di funzioni nel modo che segue. Definiamo al variare di $h \in \mathbb{N}$ una famiglia di punti $\{x_i^h\}_{-n_h \leq i \leq n_h}$ tali che

$$x_{-n_h}^h = a, \quad x_{n_h}^h = b, \quad 0 < x_{i+1}^h - x_i^h \leq \frac{1}{h} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \cap [-n_h + 1, n_h - 2]$$

e tali che $x_{-n_h+1}^h \downarrow a$ e $x_{n_h-1}^h \uparrow b$.

Definiamo quindi la successione di funzioni siffatta:

$$v_h(t) = \sum_{i=-n_h}^{n_h-1} v(y_i^h) \mathbf{1}_{(x_i^h, x_{i+1}^h]}(t)$$

che per una qualsiasi scelta di $y_i^h \in (x_i^h, x_{i+1}^h)$ converge a v in \mathcal{L}_{loc}^1 . Osserviamo quindi che

$$\begin{aligned} V(v_h, I) &= \sup \left\{ \sum_{i=-n_h}^{n_h-1} v(y_i^h) \int_{x_i^h}^{x_{i+1}^h} \varphi' dt : \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}), |\varphi| \leq 1, \text{supp } \varphi \subset I \right\} \\ &\leq \sum_{i=-n_h}^{n_h-1} |v(y_{i+1}^h) - v(y_i^h)| \leq pV(v, I). \end{aligned}$$

Assumiamo ora che $pV(v, I)$ sia finito, altrimenti la tesi è immediata. Allora possiamo passare al limite per $h \rightarrow \infty$ e usando la semicontinuità inferiore della variazione totale in $\mathcal{L}_{loc}^1(I)$ (Proposizione 1.1.3) per ottenere

$$V(u, I) = V(v, I) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} V(v_h, I) \leq pV(v, I).$$

Proviamo ora la disuguaglianza opposta, cioè $eV(u, I) \leq V(u, I)$. Non è restrittivo assumere che $V(u, I) < \infty$, perciò per la Definizione 1.1.1 $u \in BV(I)$ e di conseguenza $|Du|(I) = V(u, I)$. Definiamo ora la funzione $w(t) = Du((a, t))$. Per una conseguenza del teorema di Fubini applicato alle misure si ha che $Dw = Du$ e quindi $D(w - u) = 0$. Per la teoria generale sulle distribuzioni si ha quindi che $u - w = c$ in $\mathcal{D}'(I)$. Perciò dato che u e w appartengono a $\mathcal{L}^1(I)$ si ha che $u(t) - w(t) = c$ per \mathcal{L}^1 -a.e. $t \in I$. Questo prova che $w + c$ appartiene alla stessa classe di equivalenza di u . Osserviamo ora che

$$\sum_{i=1}^{n-1} |w(t_{i+1}) - w(t_i)| = \sum_{i=1}^{n-1} |Du([t_i, t_{i+1}))| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |Du|([t_i, t_{i+1})) \leq |Du|(I),$$

per qualsiasi (t_1, \dots, t_n) partizione di I . In particolare se passiamo all'estremo superiore si ha

$$eV(u, I) \leq pV(w + c, I) = pV(w, I) \leq |Du|(I) = V(u, I).$$

Infine se U è un aperto generico di \mathbb{R} si ha che $eV(u, U) = \sum_I eV(u, I)$, dato che U ha al massimo un quantità numerabile di componenti connesse. Perciò per addività $V(u, U)$ e $eV(u, U)$ coincidono.

□

Se $u \in BV(U)$ si ha $V(u, U) = |Du|(U) < \infty$. Inoltre, dato che dal teorema precedente abbiamo $V(u, U) = eV(u, U)$, esiste \bar{u} nella classe di equivalenza di u tale che:

$$pV(\bar{u}, U) = eV(u, U) = V(u, U). \quad (1.15)$$

Definizione 1.3.2 *Chiameremo ogni rappresentante della classe di u con la proprietà (1.15) un buon rappresentante.*

Diamo ora una caratterizzazione dei buoni rappresentanti e alcune proprietà fondamentali che risulteranno utili successivamente. Dato che tali proprietà sono di natura locale possiamo restringerci agli intervalli.

Teorema 1.3.3 *Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ e $u \in BV(I)$. Indichiamo con A l'insieme degli atomi di Du . Valgono allora i seguenti fatti:*

1. *Esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$u^l(t) := c + Du((a, t)), \quad u^r(t) := c + Du((a, t]) \quad t \in I$$

sono buoni rappresentanti di u . Ogni altra funzione $\bar{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$ è un buon rappresentante di u se e solo se

$$\bar{u} \in \{\alpha u^l(t) + (1 - \alpha)u^r(t) : \alpha \in [0, 1]\} \quad \forall t \in I.$$

2. *Ogni buon rappresentante \bar{u} è continuo in $I \setminus A$ e ha una discontinuità di tipo salto in ogni punto di A :*

$$\bar{u}(t_-) = u^l(t) = u^r(t_-), \quad \bar{u}(t_+) = u^l(t_+) = u^r(t) \quad \forall t \in A.$$

3. *Ogni buon rappresentante \bar{u} è differenziabile \mathcal{L}^1 -a.e. in I . La derivata \bar{u}' è la densità di Du rispetto a \mathcal{L}^1 .*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato nel teorema precedente che u^l è un buon rappresentante di u per un certo $c \in \mathbb{R}$. Con un argomento analogo si può mostrare che anche u^r è un buon rappresentante. Per dimostrare che qualsiasi funzione \bar{u} che soddisfa la precedente è un buon rappresentante si usa la seguente stima elementare:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |\bar{u}(t_{i+1}) - \bar{u}(t_i)| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |u^l(t_{i+1}) - u^l(t_i)| + \sum_{i=1}^{n-1} |u^l(t_i) - u^r(t_i)| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} |u^l(t_{i+1}) - u^r(t_{i+1})|. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Osserviamo che per definizione $u^l = u^r$ in $I \setminus A$. Perciò dalla (1.16) otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |\bar{u}(t_{i+1}) - \bar{u}(t_i)| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |Du(t_{i+1} - t_i)| + \sum_{i=1}^{n-1} |Du(t_i)| + \sum_{i=1}^{n-1} |Du(t_i + 1)| \\ &\leq |Du|(I) + 2|Du|(A) < \infty. \end{aligned}$$

Da cui si ottiene

$$pV(\bar{u}, I) \leq |Du|(I) + 2|Du|(A) < \infty.$$

Perciò \bar{u} ammette limite destro e sinistro in I . E inoltre, dato che u^l e u^r sono continui a sinistra e continui a destra (rispettivamente) si ha

$$\lim_{s \uparrow t} \bar{u}(s) = \lim_{s \uparrow t} u^l(s) = u^l(t), \quad \lim_{s \downarrow t} \bar{u}(s) = \lim_{s \downarrow t} u^r(s) = u^r(t)$$

per qualsiasi $t \in I$. Si ha quindi che

$$\bar{u}(t) \in \{\alpha \bar{u}(t_-) + (1 - \alpha) \bar{u}(t_+) : \alpha \in [0, 1]\} \quad \forall t \in I.$$

Fissiamo ora $\{t_i\}_{i \in J} \in (a, b)$. Per un argomento di convessità esiste $\beta : J \rightarrow \{\pm\}$ tale che

$$\sum_{i \in J} |\bar{u}(t_{i+1}) - \bar{u}(t_i)| \leq \sum_{i \in J} |\bar{u}(t_{i+1, \beta(i+1)}) - \bar{u}(t_{i, \beta(i)})|.$$

Perciò dato che $\bar{u}(t_{i, \beta(i)})$ può essere approssimato dai valori di u in punti in cui la funzione u è continua abbiamo dimostrato che \bar{u} è un buon rappresentante.

Proviamo ora il viceversa. Consideriamo $pV(\bar{u}, \cdot)$ come funzione di $J \subset I$. Tale funzione è internamente regolare e superadditiva cioè

$$J \supset \bigcup_{i=1}^p J_i, \quad J_i \cap J_k = \emptyset \text{ se } i \neq k \implies pV(\bar{u}, J) \geq \sum_{i=1}^p pV(\bar{u}, J_i).$$

Proviamo che \bar{u} è un buon rappresentante in qualsiasi intervallo $J = (c, d) \subset I$. Inoltre dato che A è al massimo numerabile e pV è internamente regolare, per provare la disuguaglianza $pV(\bar{u}, J) \leq |Du|(J)$ possiamo assumere che c e d non appartengano ad A . Perciò sfruttando questo fatto nell'ultima disuguaglianza e ricordando che \bar{u} è un buon rappresentante si ha

$$\begin{aligned} pV(\bar{u}, J) &\leq pV(\bar{u}, I) - pV(\bar{u}, (a, c)) - pV(\bar{u}, (d, b)) \\ &\leq |Du|((a, b)) - |Du|((a, c)) - |Du|((d, b)) = |Du|((c, d)) < \infty. \end{aligned}$$

Perciò, dalla Proposizione 1.3.1, \bar{u} può essere rappresentata da una differenza di funzioni monotone e inoltre i limiti destro e sinistro di \bar{u} esistono in ogni punto di I . Dato che \bar{u} è un rappresentante di u allora valgono le seguenti (dove abbiamo indicato con $u(t_-)$ e $u(t_+)$ i limiti destro e sinistro di u rispettivamente):

$$\begin{aligned}\bar{u}(t_-) &= \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_{t-\rho}^t \bar{u}(\tau) d\tau = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_{t-\rho}^t u^l(\tau) d\tau = u^l(t) \quad \forall t \in I, \\ \bar{u}(t_+) &= \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} \bar{u}(\tau) d\tau = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u^r(\tau) d\tau = u^r(t) \quad \forall t \in I.\end{aligned}$$

Consideriamo perciò la disuguaglianza

$$|\bar{u}(t - \rho) - \bar{u}(t)| + |\bar{u}(t) - \bar{u}(t + \rho)| \leq pV(\bar{u}, B_{2\rho}(t)) = |Du|(B_{2\rho}(t)).$$

Passiamo quindi al limite facendo tendere ρ a zero. Otteniamo

$$|u^l(t) - \bar{u}(t)| + |\bar{u}(t) - u^r(t)| \leq |u^l(t) - u^r(t)|.$$

Da cui, essendo la disuguaglianza opposta della disuguaglianza triangolare, si ha

$$|u^l(t) - \bar{u}(t)| + |\bar{u}(t) - u^r(t)| = |u^l(t) - u^r(t)|$$

che implica direttamente la tesi.

(2) è conseguenza diretta di (1), infatti per definizione u^r e u^l sono continui e coincidono in ogni punto di $I \setminus A$. Per quello che abbiamo appena dimostrato ogni altro buon rappresentante ha le medesime proprietà. Perciò i limiti sinistri e destri di un buon rappresentante sono gli stessi di u^l e u^r .

Per quanto riguarda (3) sia v la densità di Du rispetto a \mathcal{L}^1 e sia quindi $(Du)_s = Du - v\mathcal{L}^1$ la parte singolare di Du .

Proviamo che ogni buon rappresentante \bar{u} è differenziabile in ogni punto di Lebesgue t di v tale che $|(Du)_s|(B_\rho(t)) = o(\rho)$. Per il teorema di differenziazione di Lebesgue con la misura di Radon $|(Du)_s|$ e la funzione $f = 1 \in \mathcal{L}^1(I, |(Du)_s|)$ si ha che per \mathcal{L}^1 -a.e. $t \in I$

$$o(\rho) = \int_{B_\rho(t)} d|(Du)_s| = |(Du)_s|(B_\rho(t)).$$

Perciò dalla definizione di u^l otteniamo:

$$\begin{aligned}(u^l)'_+(t) &= \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{u^l(t + \rho) - u^l(t)}{\rho} = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{Du([t, t + \rho])}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} v(\tau) d\tau + \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{Du_s([t, t + \rho])}{\rho} = v(t).\end{aligned}$$

Con calcoli simili si dimostra poi che la derivata sinistra di u^l è proprio $v(t)$. La differenziabilità di ogni altro buon rappresentante \bar{u} segue immediatamente dalla differenziabilità di u^l e dalla stima

$$|\bar{u}(t) - u^l(t)| \leq |Du|(\{t\}) = |(Du)_s|(\{t\}).$$

□

Vediamo ora come grazie al teorema precedente è possibile costruire una biezione fra $BV(a, b)$ e le coppie (c, μ) dove $c \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathcal{M}(a, b)$.

Teorema 1.3.4 *Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato. Allora la funzione lineare $(c, \mu) \rightarrow u(t) = c + \mu((a, t))$ è un isomorfismo fra gli spazi di Banach $\mathbb{R} \times \mathcal{M}(a, b)$ e $BV(a, b)$.*

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione $T(c, \mu)(t) = c + \mu((a, t))$. Osserviamo che T è lineare e che $T(c, \mu) \in BV(a, b)$. Infatti

$$|D_t T(c, \mu)(t)|(a, b) = |D_t \mu((a, t))|(a, b) = |\mu|((a, b)) < \infty,$$

dato che $\mu \in \mathcal{M}(a, b)$. Inoltre

$$\begin{aligned} \|T(c, \mu)\|_{BV} &= \|T(c, \mu)\|_{\mathcal{L}^1} + |\mu|((a, b)) = \int_a^b |c + \mu((a, t))| dt + |\mu|((a, b)) \\ &\leq |c|(b-a) + |\mu|((a, b))(b-a) + |\mu|((a, b)) \\ &= |c|(b-a) + (b-a+1)|\mu|((a, b)). \end{aligned}$$

Perciò T è un operatore continuo. Dimostriamo ora che è iniettivo. Infatti supponiamo che $T(c, \mu) = 0$. Allora anche $D_t(T(c, \mu))(t) = 0$, cioè $D_t \mu((a, t))(A) = 0$ per qualsiasi $A \in \mathcal{B}(a, b)$. Da cui segue che $|\mu|(A) = 0$ per qualsiasi $A \in \mathcal{B}(a, b)$ e quindi $\mu = 0$. Ritornando poi alla definizione di T si deduce subito che anche $c = 0$. Dal Teorema 1.3.3 abbiamo che T è suriettiva, perciò per il teorema dell'applicazione aperta T è un isomorfismo.

□

Osserviamo che possiamo riformulare le definizioni di u^l e u^r senza la costante c nel modo seguente:

$$u^l(s) - u^l(t) = Du([t, s]), \quad u^r(s) - u^r(t) = Du((t, s]) \quad a < t < s < b \quad (1.17)$$

che può essere interpretato come il teorema fondamentale del calcolo integrale in ambiente BV.

Consideriamo ora una misura generica definita su $U \subset \mathbb{R}$ aperto. Sia inoltre $A = \{t \in U : \mu(t) \neq 0\}$, cioè l'insieme degli atomi di μ . Per il teorema di Radon-Nikodym possiamo scrivere $\mu = \mu^a + \mu^s$, dove μ^a è la parte assolutamente continua e μ^s è la parte singolare.

Definiamo a questo punto $\mu^j = \mu^s \llcorner A$ e $\mu^c = \mu^s \llcorner (U \setminus A)$. In questo modo otteniamo:

$$\mu = \mu^a + \mu^s = \mu^a + \mu^j + \mu^c.$$

Tale decomposizione è unica e dato che le misure sono mutuamente ortogonali si ha anche $|\mu| = |\mu^a| + |\mu^j| + |\mu^c|$. Sempre per il teorema di decomposizione di Lebesgue possiamo rappresentare μ^s come la restrizione di μ all'insieme \mathcal{L}^1 -trascurabile:

$$S := \left\{ t \in U : \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{|\mu|(B_\rho(t))}{\rho} = \infty \right\}$$

contenente A .

Possiamo perciò descrivere queste tre misure in modo più costruttivo come segue:

$$\mu^a = \mu \llcorner (U \setminus S), \quad \mu^j = \mu \llcorner A, \quad \mu^c = \mu \llcorner (S \setminus A).$$

Vogliamo ora applicare questa decomposizione alla derivata di una funzione BV. Diamo prima una definizione che fa riferimento alla decomposizione di una misura appena vista.

Definizione 1.3.3 *Data $u \in BV(U)$, diremo che u è una funzione di salto se $Du = (Du)_j$, ossia se Du è una misura puramente atomica. Diremo invece che u è una funzione di Cantor se $Du = (Du)_c$ ossia se Du è una misura singolare senza atomi.*

Corollario 1.3.5 *Sia $U = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato. Allora data una funzione $u \in BV(U)$, essa può essere rappresentata da $u^a + u^j + u^c$, dove $u^a \in W^{1,1}(U)$, u^j è una funzione di salto e u^c è una funzione di Cantor. Le tre funzioni sono univocamente individuate a meno di una costante additiva e si ha*

$$\begin{aligned} |Du|(U) &= |Du^a|(U) + |Du^j|(U) + |Du^c|(U) \\ &= \int_a^b |\bar{u}'| dt + \sum_{t \in A} |\bar{u}(t_+) - \bar{u}(t_-)| + |Du^c|(U). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $u \in BV(U)$, allora per il Teorema 1.3.4 esiste $c \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathcal{M}((a, b))$ tali che $u = c + \mu((a, t))$. Possiamo applicare la decomposizione

vista precedentemente alla misura μ ed ottenere che $\mu = \mu^a + \mu^j + \mu^c$ e conseguentemente

$$u = c + \mu^a((a, t)) + \mu^j((a, t)) + \mu^c((a, t)).$$

Perciò definendo $u^a := \mu^a((a, t))$, $u^j := \mu^j((a, t))$ e $u^c := \mu^c((a, t))$ abbiamo la tesi.

Per dimostrare la seconda parte della proposizione osserviamo che

$$|Du^a|(U) = \int_a^b |\bar{u}'| dt$$

per il punto (3) del Teorema 1.3.3 per qualsiasi \bar{u} buon rappresentante di u . Inoltre per il punto (2) del Teorema 1.3.3 e per (1.17) si ha

$$|Du^j|(U) = \sum_{t \in A} |\bar{u}(t_+) - \bar{u}(t_-)|,$$

per qualsiasi \bar{u} buon rappresentante di u .

Da queste osservazioni segue immediatamente la tesi. □

1.4 Struttura di funzioni BV in dimensione N

In questa sezione vedremo le proprietà strutturali di una funzione a variazione limitata in più variabili. In particolare nei teoremi che seguiranno mostreremo la regolarità che possiamo richiedere ad una funzione BV al di fuori dell'insieme di discontinuità. Inoltre dimostreremo che tale insieme è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile secondo la Definizione 1.2.3 e che in ogni suo punto esiste la traccia della funzione BV.

Inoltre grazie a questi risultati di struttura dimostreremo un teorema di decomposizione per la derivata di una funzione BV in dimensione N analogo a quello in dimensione 1. Per far ciò però abbiamo bisogno di ridefinire la nozione di continuità e di differenziabilità in modo più naturale per lo spazio funzionale BV in cui stiamo lavorando.

1.4.1 Continuità e differenziabilità approssimata

Esistono esempi di funzioni BV in più variabili e in $W^{1,p}$ ($p \leq N$) discontinue in un insieme di misura (di Lebesgue) positiva (per ogni rappresentante nella classe). Perciò apparentemente non c'è speranza di avere buoni rappresentanti come in dimensione uno. E' perciò necessario indebolire la nozione

di continuità e di differenziabilità. Tale nozione viene introdotta seguendo l'idea che non sia necessario trascurare gli insiemi di misura nulla (secondo Lebesgue), ma anche insiemi con densità nulla. Lavoreremo con funzioni a valori vettoriali in \mathbb{R}^m .

Definizione 1.4.1 *Sia $u \in [\mathcal{L}_{loc}^1(U)]^m$. Diciamo che u ha limite approssimato in $x \in U$ se esiste $z \in \mathbb{R}^m$ tale che*

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - z| dy = 0. \quad (1.18)$$

L'insieme S_u dei punti tali per cui questa proprietà non vale è chiamato l'insieme di approssimata discontinuità. Inoltre per qualsiasi $x \in U \setminus S_u$, il valore $z \in \mathbb{R}^m$, univocamente determinato dalla precedente è chiamato limite approssimato di u in x e verrà denotato con $\tilde{u}(x)$.

Diremo che u è approssimativamente continua in x se $x \notin S_u$ e $\tilde{u}(x) = u(x)$, ossia se x è un punto di Lebesgue di u . Osserviamo che l'insieme dei punti tali per cui il limite approssimato esiste non dipende dal rappresentante scelto nella classe di equivalenza di u . Invece la proprietà di essere approssimativamente continua dipende dal valore di u in quel punto, perciò tale definizione dipende dal rappresentante scelto.

Osservazione 1.4.1 *Sia $u \in [\mathcal{L}_{loc}^1(U)]^m$. Allora S_u è un boreliano trascurabile rispetto a \mathcal{L}^N e $\tilde{u} : U \setminus S_u \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una funzione Borel-misurabile coincidente \mathcal{L}^N -a.e. in $U \setminus S_u$ con u .*

Seguendo lo stesso spirito della definizione precedente vogliamo definire il concetto di punto di salto approssimato tra due valori a e b lungo una direzione ν . Introduciamo la seguente notazione:

$$B_\rho^+(x, \nu) := \{y \in B_\rho(x) : (y - x) \cdot \nu > 0\}$$

e analogamente definiamo $B_\rho^-(x, \nu)$.

Definizione 1.4.2 *Sia $u \in [\mathcal{L}_{loc}^1(U)]^m$ e $x \in U$. Diciamo che x è un punto di salto approssimato di u se esistono $a, b \in \mathbb{R}^m$ e $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$ tali che $a \neq b$ e*

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \int_{B_\rho^+(x)} |u(y) - a| dy = 0, \quad \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{B_\rho^-(x)} |u(y) - b| dy = 0. \quad (1.19)$$

La tripla (a, b, ν) , univocamente determinata dalla precedente a meno di una permutazione di (a, b) e del cambio di segno di ν verrà denotata con $(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x))$.

L'insieme dei punti di salto approssimati verrà indicato da J_u .

Osservazione 1.4.2 Sia $u \in [\mathcal{L}_{loc}^1(U)]^m$. L'insieme J_u è un boreliano contenuto in S_u ed esistono funzioni Borel-misurabili

$$(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x)) : J_u \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^{N-1}$$

tali che la (1.19) sia soddisfatta per qualsiasi $x \in J_u$.

Analogamente possiamo definire la differenziabilità approssimata come segue (per semplicità consideriamo solo il caso in cui u sia a valori scalari, dato che per il nostro studio sarà sufficiente considerare questo caso):

Definizione 1.4.3 Sia $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$ e sia $x \in U \setminus S_u$. Diremo che u è approssimativamente differenziabile in x se esiste $L \in \mathbb{R}^N$ tale che:

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \int_{B_\rho(x)} \frac{|u(y) - \tilde{u}(x) - L \cdot (y - x)|}{\rho} dy = 0. \quad (1.20)$$

Se u è approssimativamente differenziabile in x , il vettore L determinato univocamente dalla precedente è chiamato differenziale approssimato di u in x e sarà denotato con $\nabla u(x)$.

L'insieme dei punti di differenziabilità approssimata di u verrà invece denotato da \mathcal{D}_u .

Osservazione 1.4.3 Sia $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$, allora l'insieme $\mathcal{D}_u \subset U$ dei punti in cui u è approssimativamente differenziabile è un boreliano di U e la funzione $\nabla_u : \mathcal{D}_u \rightarrow \mathbb{R}^N$ è Borel-misurabile.

1.4.2 Teorema di Federer-Vol'pert e teorema di Calderon-Zygmund

Il teorema di struttura per le funzioni a variazione limitata e la decomposizione della derivata di una funzione BV si basano su due teoremi principali: il Teorema di Federer-Vol'pert e il teorema di Calderon-Zygmund. Il primo permette di caratterizzare l'insieme di salto J_u di una funzione BV e di trovare una scrittura esplicita per $Du \llcorner J_u$, il secondo invece ci dà informazioni sulla parte assolutamente continua rispetto a \mathcal{L}^N di Du .

Prima di affrontare la dimostrazione di questi due teoremi vediamo alcuni lemmi preliminari.

Lemma 1.4.1 Sia $\{E_h\} \subset \mathcal{B}(U)$ una sequenza di insiemi tali che sia $\{P(E_h, U)\}$ sia $\{|E_h|\}$ sono infinitesimi per $h \rightarrow \infty$. Allora

$$\mathcal{H}^{N-1} \left(\bigcap_{h=0}^{\infty} \{x \in U : \Theta_N^*(E_h, x) \geq \alpha\} \right) = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

Dimostrazione. Sia $U' \subset\subset U$ un aperto. Sia inoltre $\sigma = \text{dist}(U', \partial U)$ e $\alpha \in (0, 1)$. Dato $p > 2/\alpha$ e posto $\delta = (p|E|/\omega_N)^{1/N}$ proviamo la seguente stima

$$H_{2\delta}^{N-1}(U' \cap E^\alpha) \leq \frac{2\gamma\zeta\omega_{N-1}}{\omega_N\alpha} P(E, U), \quad (1.21)$$

supponendo che $\delta < \sigma$. In (1.21), γ e ζ sono costanti, $E \subset U$ è un boreliano, e l'insieme E^α è definito come

$$E^\alpha := \{x \in \mathbb{R}^N : \Theta_N^*(x, E) \geq \alpha\}.$$

Sia $x \in U' \cap E^\alpha$, allora

$$\limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} \geq \alpha,$$

perciò per una successione di ρ arbitrariamente piccoli

$$\frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} \geq \frac{\alpha}{2}. \quad (1.22)$$

Osserviamo inoltre che per la nostra scelta di δ abbiamo che esiste $\bar{\rho}$ tale che per qualsiasi $\rho < \bar{\rho}$ si ha

$$\frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} \leq \frac{|E|}{\omega_N\delta^N} = \frac{1}{p} < \frac{\alpha}{2}. \quad (1.23)$$

Di conseguenza grazie a (1.22) e (1.23) si ha che esiste $\rho \in (0, \delta)$ tale che $|E \cap B_\rho(x)| = \alpha|B_\rho(x)|/2$. Per il Teorema 1.2.4 si ha

$$\min\{(\mathbf{1}_E)_{B_\rho(x)}, 1 - (\mathbf{1}_E)_{B_\rho(x)}\} \leq \gamma \frac{P(E, B_\rho(x))}{\omega_N\rho^{N-1}},$$

per qualsiasi $x \in \mathbb{R}^N$ e per qualsiasi $\rho > 0$.

Se la applichiamo alla nostra situazione otteniamo che

$$2\gamma P(E, B_\rho(x)) \geq \omega\alpha\rho^{N-1}. \quad (1.24)$$

Utilizziamo ora il teorema di ricoprimento di Besicovitch (Teorema A.2.1) che adattato alla nostra situazione asserisce che esiste un insieme al più numerabile di indici I tale che

$$E \subset \bigcup_{i \in I} B_{\rho_i}(x_i)$$

in modo tale che ρ_i e x_i verifichino (1.24) e che ogni punto di \mathbb{R}^N appartenga al più a ζ palle $B_{\rho_i}(x_i)$. Utilizziamo questo ricoprimento per stimare la misura di Hausdorff di $U' \cap E^\alpha$:

$$\begin{aligned} H_{2\delta}^{N-1}(U' \cap E^\alpha) &\leq \omega_{N-1} \sum_{i \in I} \rho_i^{N-1} \leq \frac{2\gamma\omega_{N-1}}{\omega_N\alpha} \sum_i P(E, B_{\rho_i}(x_i)) \\ &\leq \frac{2\gamma\zeta\omega_{N-1}}{\omega_N\alpha} P(E, U). \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato (1.21). Osserviamo che $\bigcap_{i=0}^{\infty} (E_i)^\alpha \subset (E_h)^\alpha$ per qualsiasi $h \in \mathbb{N}$, perciò applicando la (1.21) all'insieme E_h si ha

$$\mathcal{H}_{2\delta_h}^{N-1} \left(U' \cap \bigcap_{i=0}^{\infty} (E_i)^\alpha \right) \leq \mathcal{H}_{2\delta_h}^{N-1}(U' \cap (E_h)^\alpha) \leq \frac{2\gamma\zeta\omega_{N-1}}{\omega_N\alpha} P(E_h, U),$$

dove $\delta_h = (p|E_h|/\omega_N)^{1/N}$.

Facendo tendere h a $+\infty$ e U' a U abbiamo la tesi. □

Lemma 1.4.2 *Per qualsiasi $u \in BV(U)$ l'insieme:*

$$L := \left\{ x \in U : \limsup_{\rho \downarrow 0} \int_{B_\rho(x)} |u(y)|^{1^*} dy = \infty \right\}$$

è \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile.

Dimostrazione. Sia

$$D := \left\{ x \in U : \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{|Du|(B_\rho(x))}{\rho^{N-1}} = \infty \right\}.$$

Osserviamo che D è \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile per la (A.1), conseguenza del Teorema A.4.1. Per il teorema della media integrale possiamo trovare $t_h \in (h, h+1)$ tale che

$$P(\{u > t_h\}, U) \leq \int_h^{h+1} P(\{u > t\}, U) dt \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Poniamo $E_h = \{u > t_h\}$. Osserviamo che dato che $u \in \mathcal{L}^1(U)$ la successione $\{|E_h|\}$ è infinitesima e inoltre dalla formula di Coarea (Teorema 1.2.3) otteniamo

$$\sum_{h=0}^{\infty} P(E_h, U) \leq \int_0^{\infty} P(\{u > t\}, U) dt = |Du|(U) < \infty,$$

cioè la serie $\sum_h P(E_h, U)$ è convergente.

Denotiamo con E'_h l'insieme di tutti i punti $x \in U$ tali che E_h ha densità superiore uguale a 1 in x . Per il Lemma 1.4.1 si ha che $\mathcal{H}^{N-1}(\bigcap_h E'_h) = 0$. Vogliamo dimostrare che $L \subset D \cup \bigcap_h E'_h$. Sia $x \notin (D \cap \bigcap_h E'_h)$, vediamo che $x \notin L$. Sia c_ρ il valor medio di u su $B_\rho(x)$. Per la disuguaglianza di Poincarè (Teorema 1.2.2) si ha

$$\rho^{-N} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - c_\rho|^{1^*} dy \leq \gamma^{N/(N-1)} \left[\frac{|Du|(B_\rho(x))}{\rho^{N-1}} \right]^{1^*}.$$

Osserviamo ora che

$$\int_{B_\rho(x)} |u(y)|^{1^*} dy \leq C \left(\int_{B_\rho(x)} |u(y) - c_\rho|^{1^*} dy + \int_{B_\rho(x)} |c_\rho|^{1^*} dy \right).$$

Perciò dato che $x \notin D$, per dimostrare che $x \notin L$ basta dimostrare che c_ρ è limitato per $\rho \downarrow 0$. Supponiamo per assurdo che esista una successione infinitesima $\{\rho_i\}$ tale che $c_{\rho_i} \rightarrow \infty$ per $i \rightarrow \infty$ e sia $v_i(y) = u(x + \rho_i y) - c_{\rho_i}$. Osserviamo che

$$\int_{B_1(0)} v_i(y) dy = \int_{B_\rho(x)} u(y) dy - c_{\rho_i} = 0,$$

perciò applichiamo la disuguaglianza di Poincarè (Teorema 1.2.2) in \mathcal{L}^1 alla funzione v_i per ottenere

$$\int_{B_1(0)} |v_i(y)| dy \leq c |Dv_i|(B_1) = c \frac{|Du|(B_{\rho_i}(x))}{\rho_i^{N-1}},$$

che essendo $|Du|(B_{\rho_i}(x))/\rho_i^{N-1}$ limitato ci dice che la famiglia $\{v_i\}$ è limitata in $\mathcal{L}^1(B_1(0))$. Inoltre osserviamo che

$$\int_{B_1(0)} |v_i(y+h) - v_i(y)| dy \leq |h| |Dv_i|(B_1(0)) = |h| \frac{|Du|(B_{\rho_i}(x))}{\rho_i^{N-1}},$$

che per la stessa ragione tende a zero uniformemente rispetto ad i per $|h| \rightarrow 0$. Possiamo perciò usare il teorema di Frechet-Kolmogorov e dire che $\{v_i\}$ è relativamente compatto in $\mathcal{L}^1(B_1(0))$. Di conseguenza, a patto di estrarre una sottosuccessione, $\{v_i\}$ converge \mathcal{L}^N -a.e. a qualche funzione $w \in \mathcal{L}^1(B_1(0))$. In particolare $u(x, \rho_i y) = c_{\rho_i} + v_i(y)$ tende a ∞ per \mathcal{L}^N -a.e. $y \in B_1(0)$.

Osserviamo ora che

$$\omega_N = \lim_{i \rightarrow \infty} |\{y \in B_1 : u(x + \rho_i y) > t_h\}| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_i^N} |\{u > t_h\} \cap B_{\rho_i}(x)|.$$

Di conseguenza la densità in x di tutti gli insiemi $\{u > t_h\}$ è 1, perciò siamo arrivati ad un assurdo, perchè abbiamo dedotto che $x \notin \bigcap_h E'_h$.

□

Lemma 1.4.3 *Sia $u \in BV(U)$. Allora $|Du| \geq |u^+ - u^-| \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_u$ e per qualsiasi boreliano $B \subset U$ valgono le seguenti implicazioni:*

$$\mathcal{H}^{N-1}(B) = 0 \implies |Du|(B) = 0, \quad (1.25)$$

$$\mathcal{H}^{N-1}(B) < \infty, \quad B \cap S_u = \emptyset \implies |Du|(B) = 0. \quad (1.26)$$

Dimostrazione. Sia $x \in J_u$. Per la Definizione 1.19 si ha che le funzioni riscalate $u_\rho(y) = u(x + \rho y)$ convergono in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ a

$$w_x(y) = \begin{cases} u^+(x) & \text{se } y \cdot \nu_u(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{se } y \cdot \nu_u(x) < 0. \end{cases}$$

Quindi per la semicontinuità inferiore dell'applicazione $u \rightarrow |Du|$ dimostrata nella Proposizione 1.1.3 si ha

$$\liminf_{\rho \downarrow 0} \frac{|Du|(B_\rho(x))}{\omega_{N-1} \rho^{N-1}} = \liminf_{\rho \downarrow 0} \frac{|Du_\rho|(B_1(0))}{\omega_{N-1}} \geq \frac{|Dw_x|(B_1(0))}{\omega_{N-1}} = |u^+(x) - u^-(x)|.$$

Perciò il Teorema A.4.1 in appendice si ha

$$|Du| \geq |u^+ - u^-| \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_u.$$

Dimostriamo ora (1.25). Se $u = \mathbf{1}_E$ per qualche insieme $E \subset U$, allora per il Teorema 1.2.6 si ha che $|Du| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \mathcal{F}E$. Perciò l'implicazione (1.25) è immediatamente dimostrata. Supponiamo invece che $u \in BV(U)$. Allora la (1.25) segue direttamente dalla formula di Coarea nella forma seguente:

$$|Du|(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{N-1}(B \cap \partial^* \{u > t\}) dt.$$

Per dimostrare (1.26) proviamo prima di tutto che per qualsiasi x tale che esista il limite approssimato di u , possiamo trovare al massimo un $t \in \mathbb{R}$, che chiameremo t_x tale che $x \in \partial^* \{u > t\}$. Infatti, prendiamo $t > t_x$, allora si ha che se $u(y) > t$ vale la seguente:

$$\frac{|u(y) - t_x|}{t - t_x} = \frac{(u(y) - t) + (t - t_x)}{t - t_x} \geq 1.$$

Perciò, dato che in x esiste il limite approssimato di u si ha

$$|\{u > t\} \cap B_\rho(x)| \leq \frac{1}{t - t_x} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - t_x| dy = o(\rho^N).$$

Di conseguenza l'insieme $\{u > t\}$ ha densità 0 in x . Analogamente se $t < t_x$ si prova che l'insieme $\{u > t\}$ ha densità 1 in x e di conseguenza $x \notin \partial^*\{u > t\}$. Sia ora $B \in \mathcal{B}(U)$ tale che $\mathcal{H}^{N-1}(B) < \infty$ e $B \cap S_u = \emptyset$. Applicando prima la formula di Coarea e poi il teorema di Fubini alle misure \mathcal{H}^{N-1} e \mathcal{L}^1 otteniamo

$$\begin{aligned} |Du|(B) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{N-1} \llcorner B(\partial^*\{u > t\}) dt \\ &= \int_B \mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} : x \in \partial^*\{u > t\}\}) d\mathcal{H}^{N-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

□

Presentiamo inoltre un teorema sull'esistenza della traccia su insiemi numerabilmente rettificabili per funzioni BV. Questo risultato è interessante di per sè, dato che ci consentirà di assicurare che una funzione BV ammette traccia sul suo insieme di discontinuità. Inoltre ci permetterà di dimostrare il teorema di Federer-Vol'pert per caratterizzare la derivata di una funzione a variazione limitata. Faremo riferimento alle definizioni a inizio capitolo sugli spazi tangenti di insiemi numerabilmente rettificabili e sulla loro orientazione.

Teorema 1.4.4 *Sia $u \in BV(U)$ e sia $\Gamma \subset U$ un insieme numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile orientato secondo la normale ν . Allora per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $x \in \Gamma$ esistono $u_\Gamma^+(x)$ e $u_\Gamma^-(x)$ tali che:*

$$\begin{cases} \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{B_\rho^+(x, \nu(x))} |u(y) - u_\Gamma^+| dy = 0 \\ \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{B_\rho^-(x, \nu(x))} |u(y) - u_\Gamma^-| dy = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Inoltre $Du \llcorner \Gamma = (u_\Gamma^+ - u_\Gamma^-) \otimes \nu \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \Gamma$.

Dimostrazione.

PASSO 1

In questo passo dimostreremo l'esistenza della traccia.

Sia $u = \mathbf{1}_E$ per qualche insieme di perimetro finito in U . Dal Teorema 1.2.7 si ha che \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $x \in U$ appartiene a $E^0 \cup \mathcal{F}E \cup E^1$. Dalla Definizione 1.2.8, se $x \in E^0$ possiamo prendere $u_\Gamma^\pm(x) = 0$ e analogamente se $x \in E^1$ possiamo prendere $u_\Gamma^\pm(x) = 1$. Consideriamo quindi i punti $x \in \mathcal{F}E$. Per il Teorema 1.2.6 le funzioni caratteristiche degli insiemi riscaldati $(E - x)/\rho$ convergono in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ alla funzione caratteristica del semispazio ortogonale a $\nu_E(x)$ e contenente $\nu_E(x)$. Perciò per il Teorema 1.2.6 si ha

$$\nu_E(x) = \pm \nu(x) \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } x \in \mathcal{F}E \cap \Gamma.$$

Se $\nu_E(x) = \nu(x)$ la tesi è verificata definendo $u_\Gamma^+(x) = 1$ e $u_\Gamma^-(x) = 0$. Se invece $\nu_E(x) = -\nu(x)$ la tesi è verificata definendo $u_\Gamma^+(x) = 0$ e $u_\Gamma^-(x) = 1$. Osserviamo ora che per linearità la tesi vale anche per le funzioni BV semplici, ossia per le funzioni $\mathcal{L}^1(U)$ tali che esistano n numeri z_1, \dots, z_n ed n insiemi di perimetro finito in U , (E_1, \dots, E_n) , tali che $u = \sum_i z_i \mathbf{1}_{E_i}$. Dato che ogni funzione a variazione limitata può essere approssimata in \mathcal{L}^∞ da una successione di funzioni BV semplici si ha la tesi per ogni funzione $u \in BV(U)$ limitata.

Dimostriamo ora il caso generale. Sia quindi $u \in BV(U)$. Definiamo la successione di funzioni $u_h = h \wedge (u \vee -h)$, che rappresentano le troncate di u nell'immagine. Si osserva facilmente che $u_h \in BV(U)$. Sia $L \subset U$ l'insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile del Lemma 1.4.2. Denotiamo con $M_h \subset \Gamma$ l'insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile in cui le tracce $(u_h)_\Gamma^\pm$ non sono definite. Mostriamo che u_Γ^\pm esiste per qualsiasi $x \in \Gamma \setminus (L \cup \bigcup_h M_h)$.

Osserviamo infatti che per qualsiasi $A \subset U$ compatto

$$\begin{aligned} \int_A |(u_h)_\Gamma^+(x)| dx &\leq \int_A \int_{B_\rho^+(x, \nu(x))} |(u_h)_\Gamma^+(x) - u_h(y)| dy dx \\ &\quad + \int_A \int_{B_\rho^+(x, \nu(x))} |u_h(x)| dy dx, \end{aligned}$$

per qualsiasi $\rho > 0$. Dato che $|u_h| \leq |u|$ si ha

$$\begin{aligned} \int_A |(u_h)_\Gamma^+(x)| dx &\leq \int_A \int_{B_\rho^+(x, \nu(x))} |(u_h)_\Gamma^+(x) - u_h(y)| dy dx \\ &\quad + \int_A \int_{B_\rho^+(x, \nu(x))} |u(x)| dy dx. \end{aligned}$$

Applicando ora la disuguaglianza di Holder al secondo addendo e dato che $x \notin L$, passando al limite per $\rho \rightarrow 0$ si ottiene che $(u_h)_\Gamma^+(x)$ è limitato in $\mathcal{L}_{loc}^1(U)$. Analogamente si dimostra che la stessa proprietà vale per $(u_h)_\Gamma^-(x)$. Perciò esistono due sottosuccessioni $\{(u_{h(k)})_\Gamma^\pm(x)\}$ convergenti in $\mathcal{L}_{loc}^1(U)$ ai numeri reali z^\pm . Per semplicità notazionale indicheremo tali sottosuccessioni con lo stesso indice delle successioni originali.

Osserviamo che vale la seguente stima:

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho^\pm(x, \nu(x))} |u(y) - z^\pm| dy &\leq \int_{B_\rho^\pm(x, \nu(x))} |u(y) - u_h(y)| dy \\ &\quad + \int_{B_\rho^\pm(x, \nu(x))} |u_h(y) - (u_h)_\Gamma^\pm(x)| dy \\ &\quad + \frac{\omega_N \rho^N}{2} |(u_h)_\Gamma^\pm(x) - z^\pm|. \end{aligned}$$

Dividendo entrambi i membri per ρ^N e passando al limite per $\rho \rightarrow 0$ ricordando la definizione di u_h otteniamo:

$$\begin{aligned} \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho^N} \int_{B_\rho^\pm(x, \nu(x))} |u(y) - z^\pm| dy &\leq \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{2}{\rho^N} \int_{B_\rho(x, \nu(x))} |u(y)| \mathbf{1}_{\{|u|>h\}} dy \\ &+ \frac{\omega_N}{2} |(u_h)_\Gamma^\pm(x) - z^\pm| \end{aligned}$$

e applicando la disuguaglianza di Holder

$$\leq \frac{2}{h^{1/(N-1)}} \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{\rho^N} \int_{B_\rho(x)} |u(y)|^{1^*} dy + \frac{\omega_N}{2} |(u_h)_\Gamma^\pm(x) - z^\pm|.$$

Perciò passando al limite per $k \rightarrow \infty$ si ha che ponendo $u_\Gamma^\pm(x) = z^\pm$, tali numeri soddisfano la (1.27).

PASSO 2

In questo passo otterremo la rappresentazione di $Du|_\Gamma$ attraverso un argomento di blow-up basato sulla rettificabilità di Γ .

Osserviamo che dato che possiamo localizzare tale risultato per i compatti possiamo assumere che $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma) < \infty$ e che entrambe le tracce u_Γ^+ e u_Γ^- sono definite in ogni punto $x \in \Gamma$.

Definiamo $D_1u := Du|_\Gamma$ e $D_2u := Du - D_1u$. Da (1.25) sappiamo che $D_1u \ll \mathcal{H}^{N-1}|_\Gamma$ perciò per il teorema di differenziazione di Besicovitch (Teorema A.3.2) dobbiamo solo provare che

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{D_1u(B_\rho(x))}{\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma \cap B_\rho(x))} = (u_\Gamma^+(x) - u_\Gamma^-(x))\nu(x)$$

per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $x \in \Gamma$ tale che il limite esiste.

Osserviamo che per il Teorema 1.2.5 si ha

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma \cap B_\rho(x))}{\omega_{N-1}\rho^{N-1}} = 1 \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } x \in \Gamma,$$

inoltre per (A.4) in appendice

$$|D_2u|(B_\rho(x)) = o(\rho^{N-1}) \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } x \in \Gamma.$$

Perciò basta provare l'esistenza di una successione infinitesima $\{\rho_i\} \subset (0, \infty)$ tale che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{Du(B_{\rho_i})}{\omega_{N-1}\rho_i^{N-1}} = (u_\Gamma^+(x) - u_\Gamma^-(x))\nu(x) \quad (1.28)$$

per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $x \in \Gamma$.

Osserviamo che l'insieme degli $x \in \Gamma$ tale che $|Du|(B_\rho(x))/\rho^{N-1}$ non è limitato per $\rho \downarrow 0$ è un insieme \mathcal{H}^{N-1} trascurabile per (A.3). Perciò basta dimostrare la (1.28) per qualsiasi $x \in \Gamma$ tale che $|Du|(B_\rho(x))/\rho^{N-1}$ è limitato per $\rho \downarrow 0$. Sia quindi $x \in \Gamma$ con questa proprietà. Per la definizione di u_Γ^\pm la famiglia delle funzioni riscalate $u_\rho(y) = u(x + \rho y)$ converge in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ a

$$w_x(y) = \begin{cases} u_\Gamma^+(x) & \text{se } y \cdot \nu(x) > 0 \\ u_\Gamma^-(x) & \text{se } y \cdot \nu(x) < 0. \end{cases}$$

Vogliamo dimostrare che $\{Du_\rho\}$ converge debolmente* in $B_1(0)$ a Dw_x per $\rho \downarrow 0$. Osserviamo che $|Du_\rho|(B_1(0)) = |Du|(B_\rho(x))/\rho^{N-1}$ è limitato per $\rho \downarrow 0$. Perciò $Du_\rho|_{B_1(0)}$ è debolmente* compatto. Di conseguenza esiste una sottosuccessione $\{\tau_k\}$ tale che $\{Du_{\tau_k}\}$ converge debolmente* in $B_1(0)$ a una misura vettoriale μ definita su $B_1(0)$. Rimane da dimostrare che $\mu = Dw_x$ in $B_1(0)$, infatti passando al limite per $k \rightarrow \infty$ in

$$\int_{B_1(0)} u_{\tau_k} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = - \int_{B_1(0)} \varphi dD_i u_{\tau_k} \quad \forall \varphi \in C_c^1(B_1(0)), \quad i = 1 \dots N$$

si ottiene

$$\int_{B_1(0)} w_x \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = - \int_{B_1(0)} \varphi d\mu_i \quad \forall \varphi \in C_c^1(B_1(0)), \quad i = 1 \dots N,$$

che è quello che volevamo dimostrare.

Consideriamo ora una successione infinitesima $\{\eta_k\} \subset (0, \infty)$ tale che $|Du_{\eta_k}|$ convergente debolmente* a una misura σ in $B_1(0)$. Sia $t \in (0, 1)$ tale che $\sigma(\partial B_t) = 0$ e $\rho_i = t\eta_i$. Si ha quindi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{Du(B_{\rho_i}(x))}{\omega_{N-1}\rho_i^{N-1}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{Du^{\eta_i}(B_t)}{\omega_{N-1}t^{N-1}} = \frac{Dw_x(B_t)}{\omega_{N-1}t^{N-1}}.$$

Dal fatto che $Dw_x = (u_\Gamma^+ - u_\Gamma^-)\nu(x)\mathcal{H}^{N-1}|_{\nu^\perp(x)}$ e che $\mathcal{H}^{N-1}(B_t \cap \nu^\perp(x)) = \omega_{N-1}t^{N-1}$ si deduce facilmente la tesi. □

Grazie al teorema di De Giorgi e di Federer abbiamo visto che la frontiera essenziale $\partial^* E$ di un insieme E avente perimetro finito in U è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile e \mathcal{H}^{N-1} -a.e punto di $\partial^* E$ appartiene a $\mathcal{F}E$. In particolare se spostiamo la nostra attenzione alle funzioni BV ponendo $u = \mathbf{1}_E$ otteniamo subito che l'insieme di discontinuità approssimata S_u (ossia $\partial^* E$ in questo caso) è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile e \mathcal{H}^{N-1} -a.e. punto di S_u è un punto di salto approssimato. Questo fatto è vero in generale in tutto $BV(U)$ come prova il seguente teorema:

Teorema 1.4.5 (Federer-Vol’pert) Per qualsiasi $u \in BV(U)$ l’insieme di discontinuità approssimata S_u è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile. Inoltre $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus J_u) = 0$ e $Du \llcorner J_u = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_u$.

Dimostrazione. Prima di tutto proviamo che S_u è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile. Per la formula di Coarea (Teorema 1.2.3) si ha

$$V(u, U) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\{x \in U : u(x) > t\}, U) dt.$$

Perciò se $u \in BV(U)$ l’insieme $\{u > t\}$ ha perimetro finito in U per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi esiste $D \subset \mathbb{R}$ denso in \mathbb{R} tale che $\{u > t\}$ è di perimetro finito in U per ogni $t \in D$. Proviamo che

$$S_u \setminus L \subset \bigcup_{t \in D} \partial^* \{u > t\},$$

dove L è l’insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile del Lemma 1.4.2, cioè:

$$L := \left\{ x \in U : \limsup_{\rho \downarrow 0} \int_{B_\rho(x)} |u(y)|^{1^*} dy = \infty \right\}.$$

Dato che la frontiera essenziale di insiemi di perimetro finito è \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile questa inclusione prova la rettificabilità di S_u .

Sia $x \notin L$ e supponiamo per assurdo che x non appartenga all’unione precedente, ossia x è un punto di densità 0 o un punto di densità 1 di $\{u > t\}$ per qualsiasi $t \in D$.

Osserviamo che dato $t \in D \cap (0, \infty)$

$$\chi_{\{u > t\}} \leq \frac{|u(x)|}{t},$$

perciò

$$t \frac{|\{u > t\} \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} \leq \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{B_\rho(x)} |u(y)| dy.$$

Quindi dato che il secondo membro non dipende da t si ha che per t sufficientemente grande x deve essere un punto di densità 0 di $\{u > t\}$. Analogamente se $t \in D \cap (-\infty, 0)$ e $-t$ è sufficientemente grande x è un punto di densità 1 per $\{u > t\}$. Questo prova che

$$z := \sup\{t \in D : \{u > t\} \text{ ha densità 1 in } x\}$$

è un numero reale. Quindi per definizione di estremo superiore $\{u > t\}$ ha densità 0 in x per qualsiasi $t \in D$, $t > z$. Inoltre dato che D è denso in \mathbb{R}

tale proprietà è vera per qualsiasi insieme $\{u > t\}$ con $t > z$. Un argomento analogo prova che $\{u < t\}$ ha densità 0 in x per qualsiasi $t < z$.

Ora si vuole provare che $z = \tilde{u}(x)$ secondo la Definizione 1.4.1. A questo scopo definiamo $E_\epsilon = \{|u - z| > \epsilon\}$ e stimiamo

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x)} |u - z| dy &\leq \epsilon \omega_N \rho^N + \int_{E_\epsilon \cap B_\rho(x)} |u - z| dy \\ &\leq \epsilon \omega_N \rho^N + |E_\epsilon \cap B_\rho(x)|^{1/N} \left(\int_{B_\rho(x)} |u - z|^{1^*} dy \right)^{1/1^*}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Proviamo ora che $|E_\epsilon \cap B_\rho(x)| = o(\rho^N)$. Per semplicità sia $E_\epsilon^1 = \{u > z + \epsilon\}$ e $E_\epsilon^2 = \{u < z - \epsilon\}$, da cui $E_\epsilon = E_\epsilon^1 \cup E_\epsilon^2$. Per quello detto precedentemente E_ϵ^1 e E_ϵ^2 hanno densità 0 in x , perciò

$$\frac{|E_\epsilon^1 \cap B_\rho(x)|}{\rho^N} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{|E_\epsilon^2 \cap B_\rho(x)|}{\rho^N} \rightarrow 0.$$

Da cui si ha quello che volevamo dimostrare.

Ora dividendo entrambi i membri della (1.29) per $\omega_N \rho^N$ ricordando che $x \notin L$ otteniamo

$$\limsup_{\rho \downarrow 0} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - z| dy \leq \epsilon.$$

Dato che ϵ è arbitrario questo prova che $x \notin S_u$.

Proviamo ora che $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus J_u) = 0$.

Dato che $\Gamma = S_u$ è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile possiamo fissare una orientazione $\bar{\nu}$ di S_u secondo la Definizione 1.2.6 per ottenere dal teorema dell'esistenza della traccia (Teorema 1.4.4) due limiti approssimati u_Γ^+ e u_Γ^- definiti \mathcal{H}^{N-1} quasi ovunque in Γ . Dalla definizione di J_u ogni punto in cui sia u_Γ^+ sia u_Γ^- esistono è un punto di salto approssimato con

$$(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x)) := (u_\Gamma^+(x), u_\Gamma^-(x), \bar{\nu}(x)).$$

Notiamo inoltre che $u^+(x) \neq u^-(x)$ dato che $x \in S_u$. Questo prova che $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus J_u) = 0$ ed anche l'ultima parte della tesi.

□

Prima di arrivare al teorema di struttura per una funzione BV ci manca da dimostrare il teorema di Calderon-Zygmund, prima del quale presentiamo un lemma preliminare.

Lemma 1.4.6 *Sia $u \in BV(B_r(x))$ e supponiamo che u abbia limite approssimato in x . Allora*

$$\int_{B_r(x)} \frac{|u(y) - \tilde{u}(x)|}{|y - x|} dy \leq \int_0^1 \frac{|Du|(B_{tr}(x))}{t^N} dt.$$

Dimostrazione. Assumiamo che $x = 0$, dato che negli altri casi la dimostrazione è analoga. Supponiamo inoltre che $u \in C^\infty(B_r(0))$. Allora per $\rho \in (0, 1)$ si ha la seguente disuguaglianza:

$$\frac{|u(y) - u(\rho y)|}{|y|} \leq \int_\rho^1 |\nabla u|(ty) dt.$$

Integrando la precedente e usando il teorema di Fubini si ha

$$\int_{B_r(0)} \frac{|u(y) - u(\rho y)|}{|y|} dy \leq \int_\rho^1 \int_{B_r(0)} |\nabla u|(ty) dy dt = \int_\rho^1 t^{-N} |Du|(B_{tr}) dt. \quad (1.30)$$

Sia ora $u \in BV(B_r(0))$. Per il Teorema 1.1.4 esiste una successione di funzioni $(u_k) \subset C^\infty(B_r(0)) \cap BV(B_r(0))$ tale che $u_k \rightarrow u$ in $\mathcal{L}^1(B_r(0))$ e $|Du_k|(B_{tr}(0)) \rightarrow |Du|(B_{tr}(0))$ per a.e. $t \in (\rho, 1)$. Tali u_k essendo C^∞ soddisfano la (1.30), perciò passando al limite per $k \rightarrow \infty$ si ha che (1.30) vale per qualsiasi $u \in BV(B_r)$.

Ora dato che $0 \notin S_u$ si ha

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \int_{B_r} |u(\rho y) - \tilde{u}(0)| dy = \lim_{\rho \downarrow 0} \rho^{-N} \int_{B_{\rho r}} |u(z) - \tilde{u}(0)| dz = 0.$$

Perciò esiste una successione infinitesima $(\rho_i) \subset (0, 1)$ tale che $u(\rho_i y)$ converge a $\tilde{u}(0)$ per \mathcal{L}^N -a.e. $y \in B_r$. Perciò ponendo $\rho = \rho_i$ in (1.30) e passando al limite per $i \rightarrow \infty$ applicando il lemma di Fatou, si ha la tesi.

□

Teorema 1.4.7 (Calderon-Zygmund) *Una funzione $u \in BV(U)$ è approssimativamente differenziabile in quasi ogni punto di U . Inoltre il differenziale approssimato ∇u è la densità della parte di Du assolutamente continua rispetto a \mathcal{L}^N .*

Dimostrazione. Sia $Du = D^a u + D^s u$ la decomposizione di Radon-Nikodym di Du rispetto a \mathcal{L}^N e sia $v \in [\mathcal{L}^1(U)]^N$ la densità di $D^a u$ rispetto a \mathcal{L}^N . Proveremo che u è approssimativamente differenziabile in ogni $x_0 \in U \setminus (S_u \cup S_v)$ tale che $|D^s u|(B_\rho(x_0)) = o(\rho^N)$ per $\rho \downarrow 0$. Dalla Proposizione 1.4.1 si

ha subito che $S_u \cup S_v$ è trascurabile rispetto a \mathcal{L}^N , inoltre per il teorema di differenziazione di Besicovitch $D^s u = Du \llcorner E$ essendo E l'insieme trascurabile rispetto a \mathcal{L}^N . Dato che $|D^s u|(B_\rho(x)) = |Du \llcorner E|(B_\rho(x)) \leq |Du|(B_\rho(x))$ si ha, per il teorema di differenziazione di Lebesgue, che $|D^s u|(B_\rho(x)) = o(\rho^N)$ quasi ovunque rispetto a \mathcal{L}^N . Quindi quasi ogni punto $x_0 \in U$ ha le proprietà sopra elencate.

Per provare la differenziabilità approssimata in ogni punto x_0 con queste proprietà applichiamo il Lemma 1.4.6 alla funzione

$$\omega(x) = u(x) - \tilde{u}(x_0) - \tilde{v}(x_0) \cdot (x - x_0)$$

osservando che $\tilde{\omega}(x_0) = 0$.

Si ottiene

$$r^{-N} \int_{B_r(x_0)} \frac{|u(x) - \tilde{u}(x_0) - \tilde{v}(x_0) \cdot (x - x_0)|}{|x - x_0|} dx \leq \sup_{t \in (0,1)} \frac{|D\omega|(B_{tr}(x_0))}{(tr)^N}.$$

Dato che $D\omega = [v - \tilde{v}(x_0)] \mathcal{L}^N + D^s u$ grazie alla scelta iniziale di x_0 otteniamo

$$|D\omega|(B_\rho(x_0)) = \int_{B_\rho(x_0)} |v(x) - \tilde{v}(x_0)| dx + |D^s u|(B_\rho(x_0)) = o(\rho^N).$$

Facendo tendere $r \downarrow 0$ nella disuguaglianza precedente otteniamo la differenziabilità approssimata di u in x_0 e l'uguaglianza $\nabla u(x_0) = \tilde{v}(x_0)$.

□

1.4.3 Decomposizione della derivata di una funzione BV in più variabili spaziali

Grazie ai risultati precedenti dimostriamo ora il teorema di decomposizione della derivata di una funzione BV in più variabili spaziali. A differenza del caso 1-dimensionale non possiamo garantire che la funzione stessa si decomponga in una parte assolutamente continua, una parte di salto e una cantoriana, ma continua a valere l'analogo teorema sulla decomposizione della derivata.

Dal teorema di Radon-Nikodym possiamo scrivere $Du = D^a u + D^s u$ essendo $D^a u$ la parte assolutamente continua di Du rispetto a \mathcal{L}^N e $D^s u$ la parte singolare di Du rispetto a \mathcal{L}^N . Vogliamo ora dividere $D^s u$ in due parti: la parte di salto $D^j u$ e la parte di Cantor $D^c u$. Chiameremo inoltre $D^a u + D^c u$ la parte diffusa della derivata Du e la indicheremo con $\tilde{D}u$.

Vediamo le definizioni formali.

Definizione 1.4.4 *Data $u \in BV(U)$ le misure*

$$D^j u := D^s u \llcorner J_u, \quad D^c u := D^s u \llcorner (U \setminus S_u)$$

sono chiamate rispettivamente la parte di salto e la parte di Cantor della derivata.

Ricordiamo che Du si annulla sull'insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile $S_u \setminus J_u$. Perciò otteniamo subito la seguente decomposizione di Du :

$$Du = D^a u + D^s u = D^a u + D^j u + D^c u = \tilde{D}u + D^j u.$$

Dal teorema di Calderon-Zygmund sappiamo che $D^a u = \nabla u \mathcal{L}^N$, dove ∇u è il differenziale approssimato di u . Dato che J_u è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile orientato nella direzione di salto ν_u la derivata $D^j u$ può essere determinata tramite ν_u e i limiti approssimati u^\pm nel modo seguente:

$$D^j u(B) = \int_{B \cap J_u} (u^+(x) - u^-(x)) \otimes \nu_u(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x) \quad \forall B \in \mathcal{B}(U).$$

Capitolo 2

Leggi di conservazione: struttura di soluzioni BV

2.1 Introduzione e prerequisiti

In questo capitolo applicheremo i risultati generali del capitolo precedente sulla struttura di una funzione BV allo studio della legge di conservazione scalare multidimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x \cdot f(u) = 0 \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

dove $u(t, x)$ è la funzione incognita e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, denominato flusso della legge di conservazione, è una funzione sufficientemente regolare (per ora non discuteremo sulle ipotesi di regolarità del flusso, dato che non è il punto che ci interessa approfondire in questo ambito).

In particolare vogliamo studiare il problema di Cauchy relativo a tale equazione differenziale con il dato iniziale (cioè la funzione u all'istante $t = 0$ in un qualche senso) u_0 in un dato spazio funzionale.

Dalla teoria generale sulle leggi di conservazione si ha che anche se il dato iniziale u_0 è sufficientemente regolare la soluzione può perdere regolarità ad un certo istante di tempo. Il che significa che se andiamo a cercare soluzioni regolari (anche solo continue) non abbiamo la certezza di trovarne una. Si considererà, perciò da qui in avanti il problema in senso distribuzionale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x \cdot f(u) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n). \quad (2.2)$$

Il problema di andare a ricercare le soluzioni di questa EDP in uno spazio così ampio è che è possibile mostrare con semplici esempi che la soluzione distribuzionale del problema di Cauchy non è più unica. Per superare questa

difficoltà dobbiamo modificare il nostro concetto di soluzione chiedendo che un insieme di funzioni non lineari della soluzione u siano dissipate lungo il flusso. Imponiamo perciò la condizione di entropia che nel caso di leggi di conservazione scalari multidimensionali può essere scritta nella forma di una famiglia di disuguaglianze differenziali:

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \nabla \cdot q(u) \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \quad (2.3)$$

per qualsiasi $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^∞ e per qualsiasi $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ convessa tali che

$$q' = \eta' f'. \quad (2.4)$$

Con questo concetto di soluzione Kruzkov dimostrò nel suo articolo l'esistenza e l'unicità di soluzioni entropiche con dato iniziale $u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ [8]. Avendo risolto il problema di unicità ed esistenza della soluzione, viene spontaneo ora studiare la regolarità della soluzione entropica. In particolare, dato che avremo sicuramente a che fare con soluzioni potenzialmente discontinue, ha senso chiedersi che struttura avranno gli shocks della soluzione (cioè le regioni di discontinuità), qual'è la regolarità al di fuori degli shocks e se la soluzione ammette traccia in corrispondenza dei punti di shocks.

Il primo risultato che si può facilmente dimostrare è che se supponiamo che la soluzione abbia i punti di shocks localizzati in un iperpiano $\Gamma \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ e che ammetta limiti (nella direzione ortogonale a Γ) in un punto $(t, x) \in \Gamma$ vale la condizione di Rankine Hugoniot per ogni $(t, x) \in \Gamma$:

$$-s[u^+ - u^-] + [f(u^+) - f(u^-)] \cdot \nu = 0. \quad (2.5)$$

Dove $(-s, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1}$ è il vettore normale a Γ e u^\pm sono i limiti della soluzione in corrispondenza di (t, x) .

Chiaramente però, tale risultato non ci dice nulla sulla struttura della regione di shock, sulla regolarità della soluzione al di fuori di Γ e sulla traccia di u su Γ quando non abbiamo ipotesi di regolarità che ci garantiscono l'esistenza del limite puntuale di u .

Dobbiamo perciò scegliere il dato iniziale in uno spazio più piccolo di \mathcal{L}^∞ in cui lavorava Kruzkov. L'ideale a questo proposito è scegliere $u_0 \in BV(\mathbb{R}^N)$. Infatti dimostreremo che le soluzioni di una legge di conservazione sono BV-stabili, cioè se il dato iniziale appartiene a $BV(\mathbb{R}^N)$, allora la soluzione apparterrà a $BV(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$. Questo fatto ci permetterà di rispondere alle precedenti domande grazie ai risultati generali sulla struttura di una funzione BV.

2.2 BV-stabilità

Per dimostrare che la soluzione di una legge di conservazione scalare multi-dimensionale con dato iniziale BV è ancora BV ci serve una proposizione preliminare di natura funzionale che ci permetterà poi di utilizzare i risultati già provati da Kruzkov.

Proposizione 2.2.1

$$\|u\|_{BV(\mathbb{R}^N)} \approx \|u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} + \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \|u(\cdot + h) - u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)}. \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima di tutto che esiste una costante C tale che

$$|Du|(\mathbb{R}^N) \leq C \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \|u(\cdot + h) - u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Sia $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si ha quindi $|Du|(\mathbb{R}^N) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx$. Osserviamo inoltre che:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} |h|^{-1} \|u(\cdot + h) - u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Fissiamo $\epsilon > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\sup_{|h| \leq \delta} |h|^{-1} \|u(\cdot + h) - u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} \geq \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} - \epsilon.$$

Perciò

$$\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{|h| \leq \delta} |h|^{-1} \|u(\cdot + h) - u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} + \epsilon \leq \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \|u(\cdot + h) - u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} + \epsilon.$$

Da cui

$$\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \|u(\cdot + h) - u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Viceversa dimostriamo che esiste una costante \tilde{C} tale che

$$\sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \|u(\cdot + h) - u\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C} |Du|(\mathbb{R}^N).$$

Consideriamo sempre $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si ha:

$$u(x + h) - u(x) = \int_0^1 \nabla u(x + th) \cdot h dt,$$

per qualsiasi $h \in \mathbb{R}$.

Perciò

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x + h) - u(x)| dx \leq |h| |Du|(\mathbb{R}^N).$$

Da cui, grazie ad un argomento di densità, si ha la tesi.

□

Dimostriamo ora che le soluzioni entropiche di una legge di conservazione scalare sono BV-stabili. Per provare ciò useremo il fatto che le soluzioni entropiche generano un semigruppò di contrazione in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. Cioè, date u e v due soluzioni entropiche di una legge di conservazione scalare con dati iniziali u_0 e v_0 rispettivamente e continue rispetto alla variabile temporale, allora:

$$\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.7)$$

Da cui scegliendo come u la soluzione identicamente nulla si ha:

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} \quad \forall t \geq 0.$$

Perciò utilizzando la proposizione precedente otteniamo:

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{BV(\mathbb{R}^N)} &= \|u(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} + \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \|u(t, \cdot + h) - u(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)} + \sup_{h \neq 0} |h|^{-1} \|u_0(\cdot + h) - u_0\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Da cui, essendo $u_0 \in BV(\mathbb{R}^N)$ si ha che $u(t, \cdot) \in BV(\mathbb{R}^N)$ per qualsiasi $t > 0$.

Vogliamo ora estendere il risultato alla soluzione $u : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Per far ciò però dobbiamo considerare il risultato localmente, perchè non abbiamo nessun controllo sulla limitatezza di f . Sia perciò $u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Allora per il risultato precedente si ha che $u(t, \cdot) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap BV_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Per (2.1) si ha che fissato un aperto $V \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx = - \int_{\mathbb{R}^{N+1}} f(u) \cdot \nabla_x \varphi dt dx \quad (2.8)$$

per qualsiasi $\varphi \in C_c^1(V)$.

Osserviamo che, dato che $f \in C^\infty$, $f_i(u(t, \cdot)) \in BV_{loc}(\mathbb{R}^N)$ per qualsiasi $t > 0$ e $i = 1 \dots N$. Perciò

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} f_i(u(t, x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx dt < \infty \quad \forall \varphi \in C_c^1(V) \text{ con } |\varphi| \leq 1,$$

uniformemente rispetto a φ .

Di conseguenza dalla (2.8), dato che V era generico, otteniamo direttamente che $u \in BV_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$.

Abbiamo quindi dimostrato che le soluzioni entropiche di una legge di conservazione sono BV-stabili. Perciò una soluzione entropica di una legge di

conservazione con dato iniziale in BV ha le proprietà caratteristiche delle funzioni BV che abbiamo presentato nel capitolo iniziale. In particolare tale soluzione è approssimativamente continua al di fuori di S_u che per il Teorema 1.4.5 è un insieme numerabilmente \mathcal{H}^N -rettificabile. Inoltre per il Teorema 1.4.4 esiste la traccia della soluzione u in ogni punto di questo insieme.

Capitolo 3

Struttura di una soluzione non BV: enunciato del teorema e definizioni preliminari

3.1 Presentazione del problema

L'obiettivo che ci poniamo ora è studiare le proprietà di regolarità di una soluzione entropica quando il dato iniziale non è a variazione limitata. Nel capitolo precedente abbiamo visto come la BV-stabilità della legge di conservazione permette di caratterizzare la struttura di una soluzione entropica se il dato iniziale è una funzione BV. Tuttavia, dato che il teorema di Kruzkov garantisce esistenza e unicità della soluzione anche quando il dato iniziale appartiene a \mathcal{L}^∞ , ha senso chiedersi se e in quale caso è possibile assicurare una certa regolarità della soluzione con ipotesi meno restrittive sul dato iniziale.

In particolare dimostreremo in questo capitolo e nel successivo che sotto appropriate ipotesi di non-degenerazione del flusso (imporremo cioè che sia sufficientemente non lineare) la soluzione avrà caratteristiche simili a una funzione a variazione limitata, pur non avendo regolarità funzionale BV.

Prima di vedere i dettagli del teorema diamo alcune definizioni.

Dato che nella trattazione che seguirà non distingueremo mai la variabile spaziale da quella temporale, ha senso ridefinire l'EDP e quindi il concetto di soluzione per lavorare in modo più agevole.

Definizione 3.1.1 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione C^∞ che rappresenterà il flusso della legge di conservazione. Sia E_+ l'insieme di tutti i $q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ tali che esiste $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con*

$$q'(v) = \eta'(v)f'(v) \quad e \quad \eta'' \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (3.1)$$

La funzione $u : \mathbb{R}^N \rightarrow (0, 1)$ è detta *soluzione entropica generalizzata* di (2.1) se:

$$\nabla \cdot f(u) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

e per qualsiasi $q \in E_+$

$$\nabla \cdot q(u) \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Osserviamo che la differenza tra soluzioni entropiche generalizzate e non generalizzate è che in questo caso non si richiede che la misura della dissipazione di entropia sia con segno.

Inoltre è importante notare che il risultato che dimostreremo è di regolarità interna. Ossia non è assolutamente legato al dato iniziale del problema di Cauchy per una legge di conservazione scalare come quello del capitolo precedente. Le ipotesi sono infatti relative solo al flusso e il risultato è conseguenza diretta della struttura intrinseca della legge di conservazione.

3.2 Considerazioni sulla non-degenerazione del flusso

Abbiamo detto che per ottenere una regolarità extra della soluzione entropica generalizzata di (2.1) dobbiamo imporre sul flusso una condizione di non-degenerazione. Vediamo meglio cosa si intende.

Osserviamo innanzitutto che tale condizione è necessaria, infatti se il flusso f è lineare la legge di conservazione si riduce all'equazione del trasporto della forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u = 0,$$

con $b \in \mathbb{R}^N$.

Si ottiene quindi l'equazione del trasporto omogenea, la cui soluzione è semplicemente il dato iniziale calcolato lungo le direzioni caratteristiche. Risulta perciò evidente che la soluzione ha la stessa regolarità del dato iniziale.

Vediamo quindi quali condizioni di non-degenerazione possiamo imporre al flusso. La più naturale è la seguente: f è tale che non esiste nessun intervallo aperto I tale che $f'(v)$ è contenuto in uno spazio affine $(N - 1)$ -dimensionale per qualsiasi $v \in I$.

In dimensione uno ciò significa che il flusso f non è affine su alcun aperto di \mathbb{R} . Infatti, se supponiamo che sia affine su un aperto A , allora si ha subito che f' è ivi costante, perciò esiste un intervallo aperto contenuto in A tale che $f'(I)$ è un punto di \mathbb{R} . Viceversa se esiste I intervallo tale che $f'(I) = k$

costante, allora $f(x) = kx + c$ su I .

Si può riformulare tale proprietà in maniera equivalente come segue:

$$\forall \zeta \in \mathbb{S}^N \quad \{v \in \mathbb{R} : \zeta_0 + f'(v) \cdot \zeta' = 0\} \quad \text{non contiene intervalli aperti.} \quad (3.2)$$

dove $\zeta = (\zeta_0, \zeta') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

In realtà per la trattazione che seguirà avremo bisogno di un'ipotesi più forte:

$$\forall \zeta \in \mathbb{S}^N \quad \mathcal{L}^1(\{v \in \mathbb{R} : \zeta_0 + f'(v) \cdot \zeta' = 0\}) = 0. \quad (3.3)$$

Diremo che il flusso f è genuinamente non-lineare se verifica la (3.3).

Osservazione 3.2.1 *Una condizione sufficiente per (3.2) è che*

$\forall v \in \mathbb{R}$ i vettori $f''(v), \dots, f^{(N+1)}(v)$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Sia $\zeta = (\zeta_0, \zeta') \in \mathbb{S}^N$ e sia $h(v) := \zeta_0 + f'(v) \cdot \zeta'$ per $v \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esista un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ con $h(v) = 0 \forall v \in I$. Allora:

$$\begin{aligned} I &\subset \{v \in \mathbb{R} : h'(v) = \dots = h^{(N)}(v) = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R} : f''(v) \cdot \zeta' = \dots = f^{(N+1)}(v) \cdot \zeta' = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R} : f^{(k)}(v) \perp \zeta' \quad \forall k \in \{2, \dots, N+1\}\} \\ &\subset \{v \in \mathbb{R} : f''(v), \dots, f^{(N+1)}(v) \text{ sono linearmente dipendenti}\} = \emptyset. \end{aligned}$$

□

3.3 Enunciato del teorema e lemmi preliminari

Prima di enunciare il teorema centrale diamo un'altra definizione fondamentale. Vedremo che la proprietà di regolarità che segue è proprio quella che ha la soluzione entropica di una legge di conservazione al di fuori dell'insieme di salto.

Definizione 3.3.1 (VMO-Vanishing mean oscillation) *Sia $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. Diremo che u ha VMO nel punto $y \in \mathbb{R}^N$ se*

$$\lim_{r \downarrow 0} \int_{B_r(y)} \left| u(x) - \int_{B_r(y)} u(z) dz \right| dx = 0.$$

Osserviamo che la proprietà VMO è leggermente più debole di quella dell'approssimata continuità tipica delle funzioni BV al di fuori dell'insieme di discontinuità (Sezione 1.4.1). Infatti supponiamo che u sia approssimativamente continua in $y \in \mathbb{R}^N$. Allora esiste $\bar{z} \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$\lim_{r \downarrow 0} \int_{B_r(y)} |u(x) - \bar{z}| dx = 0.$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} \int_{B_r(y)} \left| u(x) - \int_{B_r(y)} u(z) dz \right| dx &\leq \int_{B_r(y)} \left(\int_{B_r(y)} |u(x) - \bar{z}| dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_r(y)} |u(z) - \bar{z}| dz \right) dx, \end{aligned}$$

perciò utilizzando il teorema di Fubini e facendo tendere r a zero, si ha subito che u ha VMO in y .

Possiamo ora enunciare il teorema principale. Come abbiamo già detto precedentemente tale teorema garantisce che, supponendo che il flusso sia genuinamente non-lineare, la soluzione entropica generalizzata della legge di conservazione ha una struttura quasi-BV.

Vediamo nei dettagli matematici l'enunciato.

Teorema 3.3.1 (De Lellis, Otto, Westdickenberg) *Supponiamo che il flusso $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ di (2.1) soddisfi:*

$$\forall \zeta \in \mathbb{S}^N \quad \mathcal{L}^1(\{v \in \mathbb{R} : \zeta_0 + f'(v) \cdot \zeta' = 0\}) = 0.$$

Sia u una soluzione entropica generalizzata secondo la Definizione 3.1.1. Allora esiste un insieme numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile, che indicheremo con J , tale che:

- *Per qualsiasi $y \in J$ la funzione u ammette traccia su J .*
- *Per qualsiasi $y \notin J$ la funzione u ha VMO secondo la Definizione 3.3.1.*

Per dimostrare questo risultato è necessario passare alla formulazione cinetica della legge di conservazione (2.1). Premettiamo inanzitutto che rispetto all'articolo originale di Lions, Perthame e Tadmor [9] per quello che ci serve tratteremo una situazione abbastanza inusuale, perchè la misura

$\mu_q := -\nabla \cdot q(u)$ non ha un segno definito. In ogni caso il procedimento è analogo e nell'articolo originale vi sono in più alcuni risultati di regolarità tipici delle leggi di conservazione scalari, ma dimostrati passando alla formulazione cinetica.

Vale quindi la seguente proposizione:

Proposizione 3.3.2 *Sia u una soluzione entropica generalizzata di (2.1). Allora esiste una misura di Radon localmente finita $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$ tale che*

$$a(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u(x)) = \frac{\partial \mu}{\partial v} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{N+1}), \quad (3.4)$$

dove

$$\chi(v, u) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < v \leq u, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e $a(v) := f'(v)$ (tale convenzione verrà mantenuta per tutto il resto della trattazione).

Dimostrazione.

Sia u una soluzione generalizzata di (2.1). Si ha quindi che esiste una coppia entropia-flusso di entropia (η, q) tale che $-\nabla \cdot q(u) \in \mathcal{M}_{loc}(U)$. Introduciamo per comodità la notazione $\mu_q := -\nabla \cdot q(u)$ e definiamo

$$q_v(u) := \begin{cases} f(u) - f(v) & \text{se } u \geq v, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ogni $v \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che $q_v \in E_+$, infatti possiamo prendere come η la funzione convessa $u \rightarrow |u - v|$ che soddisfa l'equazione distribuzionale (3.1). Proviamo prima di tutto che per $v \in [0, 1]$

$$v \rightarrow \mu_{q_v} \in \mathcal{M}_{loc}(A) \quad \text{è limitata.} \quad (3.5)$$

Dato che $\eta'(z)f'(z) = (\eta(z)f'(z))' - \eta(z)f''(z)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, possiamo riscrivere la (3.1) come

$$q(v) = q(0) - \eta(0)f'(0) + \eta(v)f'(v) - \int_0^v \eta(w)f''(w) dw \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Di conseguenza l'insieme E_+ è un sottoinsieme chiuso di $C([0, 1], \mathbb{R}^N)$. Difatti prendiamo una successione $\{q_n\} \subset E_+$ tale che converge ad q con la norma del sup. Costruiamo un'applicazione lineare $T : E_+ \rightarrow C(\mathbb{R})$ tale che $T(q) = \eta$, cioè l'applicazione che associa ad ogni $q \in E_+$ un η tale che sia soddisfatta la (3.1). Osserviamo che tale applicazione è continua per (3.6), perciò per il

teorema del grafico chiuso si ha, ponendo $T(q_h) = \eta_h$, che $\eta_h \rightarrow T(q) = \eta$, che era quello che volevamo dimostrare.

Perciò essendo un sottoinsieme chiuso di un Banach, E_+ è uno spazio completo con la norma del sup. Introduciamo ora

$$\Gamma := \{\varphi \in C_c^\infty(U) : \|\varphi\|_\infty \leq 1\}.$$

Data $\varphi \in \Gamma$ consideriamo il funzionale $T_\varphi : E_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definito da:

$$T_\varphi(q) := \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu_q.$$

Si osserva subito che T_φ è limitato, infatti

$$|T_\varphi(q)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu_q \right| = \left| \int_A \varphi (\nabla \cdot q(u)) dx \right| = \left| \int_A \nabla \varphi \cdot q(u) dx \right| \leq c_{\varphi,A} \|q\|_\infty.$$

Di conseguenza dato che T_φ è lineare, è anche continuo. Inoltre osserviamo che la famiglia $\{T_\varphi\}_{\varphi \in \Gamma}$ è puntualmente limitata, infatti per la definizione di variazione totale:

$$\sup_{\varphi \in \Gamma} |T_\varphi(q)| = |\mu_q|(A) =: c_{q,A} < \infty \quad \forall q \in E_+.$$

Applichiamo ora il teorema di Banach-Steinhaus alla famiglia di operatori $\{T_\varphi\}_{\varphi \in \Gamma}$ ottenendo che tale famiglia è uniformemente limitata, cioè

$$\sup \{\|T_\varphi\| : \varphi \in \Gamma\} < \infty.$$

Da cui esiste $q_0 \in E_+$, $\epsilon > 0$ e $c_A < \infty$ tali che

$$\sup_{\varphi \in \Gamma} |T_\varphi(q)| = |\mu_q|(A) \leq c_A \quad \forall q \in \overline{B_\epsilon(q_0)} \cap E_+. \quad (3.7)$$

Prendiamo ora $q \in E_+$ tale che $\|q\|_\infty = 1$. Dato che l'applicazione $q \rightarrow \mu_q$ è lineare abbiamo

$$|\mu_q|(U) = \frac{1}{\epsilon} |\mu_{\epsilon q}|(U) \leq \frac{1}{\epsilon} (|\mu_{\epsilon q + q_0}|(U) + |\mu_{q_0}|(U)). \quad (3.8)$$

Osserviamo ora che E_+ è un cono convesso, cioè qualsiasi combinazione lineare a coefficienti positivi di elementi di E_+ rimane in E_+ . Per questo motivo possiamo applicare la stima (3.8) a ciascuno dei due addendi della precedente ed ottenere:

$$|\mu_q|(U) \leq \frac{2}{\epsilon} c_A.$$

Perciò la funzione $q \rightarrow \mu_q$ definita da E_+ in $\mathcal{M}(A)$ è limitata. Ciò implica direttamente la (3.5) che volevamo dimostrare. Notiamo inoltre che per la definizione di soluzione generalizzata che ha come immagine l'intervallo aperto $(0, 1)$, μ_v è nulla se $v \geq 1$ e per $v \leq 0$ è costante in v e uguale a $-\nabla_x \cdot f(u)$. Osserviamo che $v \rightarrow \mu_v$ è debolmente misurabile, cioè per qualsiasi $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ la funzione

$$v \rightarrow \int \zeta(x, v) d\mu_v(x)$$

è misurabile, infatti

$$\int \zeta(x, v) d\mu_v(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(x, v) \nabla \cdot q_v(u(x)) dx$$

è misurabile per Fubini-Tonelli. Possiamo perciò definire una misura μ su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ nel modo seguente:

$$\int \zeta d\mu = \int_{\mathbb{R}} \int \zeta(v, x) d\mu_v(x) dv.$$

Inoltre per (3.5) si ha che $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

Dalle definizioni di $q_v(u)$ e di $\chi(v, u)$ sappiamo che

$$\frac{d}{dv} q_v(u) = -a(v)\chi(v, u) \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-a.e. } v \in \mathbb{R}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} - \int \frac{\partial}{\partial v} \zeta(v, x) d\mu &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_x \cdot q_v(u(x)) \frac{\partial}{\partial v} \zeta(v, x) dx dv \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(v, x) \frac{\partial}{\partial v} (\nabla_x \cdot q_v(u(x))) dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(v, x) \nabla_x \cdot (a(v)\chi(v, u)) dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(v, x) a(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u(x)) dx dv \end{aligned}$$

che è la tesi. □

Diamo ora alcune definizioni e introduciamo i riscaldamenti e l'insieme che l'insieme di salto J .

Definizione 3.3.2 *Sia u una soluzione generalizzata e μ come nella Proposizione 3.3.2.*

Indichiamo con ν la misura x -marginale della variazione totale $|\mu|$ di μ , cioè

$$\nu(A) := |\mu|(\mathbb{R} \times A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Definizione 3.3.3 (Insieme di salto J) *Indichiamo con J l'insieme*

$$J := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} > 0 \right\}, \quad (3.9)$$

che non è altro che l'insieme dei punti nei quali ν ha \mathcal{H}^{N-1} -densità superiore positiva.

Introduciamo quindi i riscalamanti di u e l'insieme di blow-up per u , μ e ν in un dato punto y . Le funzioni riscalate sono scelte in maniera tale che l'equazione cinetica (3.4) sia invariante.

Definizione 3.3.4 *Sia $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ e $\nu \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Sia inoltre $y \in \mathbb{R}^N$ fissato.*

- $\forall r > 0$ definiamo $u^{y,r} \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, $\mu^{y,r} \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ e $\nu^{y,r} \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u^{y,r}(x) &:= u(y + rx), \\ \mu^{y,r}(B \times A) &:= \frac{1}{r^{N-1}} \mu(B \times (y + rA)), \\ \nu^{y,r}(A) &:= \frac{1}{r^{N-1}} \nu(y + rA) \end{aligned}$$

per qualsiasi $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ e $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

- *Gli insiemi $B^\infty(y) \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$, $T^{N-1}(y, \mu) \subset \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ e $T^{N-1}(y, \nu) \subset \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ sono gli insiemi di tutti i u^∞ , μ^∞ e ν^∞ (rispettivamente) tali che esista una sequenza $r_k \downarrow 0$ in modo che:*

$$\begin{aligned} u^{y,r_k} &\rightarrow u^\infty && \text{fortemente in } \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N), \\ \mu^{y,r_k} &\xrightarrow{*} \mu^\infty && \text{debolmente}^* \text{ in } \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N), \\ \nu^{y,r_k} &\xrightarrow{*} \nu^\infty && \text{debolmente}^* \text{ in } \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

La proposizione seguente mette in relazione risultati di compattezza alle sequenze di blow-up.

Proposizione 3.3.3 *Siano u, μ come nella Proposizione 3.3.2. Allora per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in \mathbb{R}^N$ si ha:*

$$\begin{aligned} \{u^{y,r}\}_{r \downarrow 0} & \text{ è fortemente precompatto in } \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N) \\ \{\mu^{y,r}\}_{r \downarrow 0} & \text{ è debolmente* precompatto in } \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \\ \{\nu^{y,r}\}_{r \downarrow 0} & \text{ è debolmente* precompatto in } \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che dato $y \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ le soluzioni riscalate $u^{y,r}$ e $\mu^{y,r}$ soddisfano ancora l'equazione cinetica

$$f'(v) \cdot \nabla \chi(v, u^{y,r}(x)) = \frac{\partial}{\partial v} \mu^{y,r} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

Infatti per quanto riguarda il primo membro si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \chi(v, u^{y,r}(x)) = r \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

Analogamente per il secondo

$$\frac{\partial}{\partial v} \mu^{y,r} = r \frac{\partial}{\partial v} \mu \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

Perciò l'equazione cinetica è soddisfatta.

Dimostriamo ora la precompattanza debole* di $\mu^{y,r}$ ipotizzando che $\{\nu^{y,r}\}_{r \downarrow 0}$ è debolmente* precompatto in $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto. Allora esistono due aperti $W \subset\subset \mathbb{R}$ e $Z \subset\subset \mathbb{R}^N$ tali che $K \subset W \times Z$. Perciò

$$\begin{aligned} |\mu^{y,r}|(K) & \leq |\mu^{y,r}|(W \times Z) = \frac{1}{r^{N-1}} |\mu|(W \times (y + rZ)) \leq \frac{1}{r^{N-1}} \nu(y + rZ) \\ & = \nu^{y,r}(Z) < \infty \end{aligned}$$

uniformemente su $r \in \mathbb{R}_+$.

Perciò per il Teorema A.6 si ha che $\{\mu^{y,r}\}$ è debolmente* precompatto.

Per provare che $\{u^{y,r}\}$ è fortemente precompatto in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ si applica direttamente il velocity-averaging lemma presentato in [9].

Manca quindi da provare che $\{\nu^{y,r}\}_{r \downarrow 0}$ è debolmente* precompatto in $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in \mathbb{R}^N$. Sempre per il Teorema A.6 basta dimostrare che

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} < \infty \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } y \in \mathbb{R}^N.$$

Supponiamo per assurdo che esista un insieme limitato K con $\mathcal{H}^{N-1}(K) > 0$ tale che

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} = \infty \quad \forall y \in K.$$

Per arrivare ad un assurdo utilizziamo un classico argomento di ricoprimento. Fissiamo $\epsilon > 0$ arbitrario e sia $A \supset K$ un aperto tale che $\nu(A) - \nu(K) < \epsilon$. Sia $n \in \mathbb{N}$. Costruiamo la seguente famiglia di palle che ricoprono K :

$$\mathcal{F} := \{B_r(y) : y \in K, B_r(y) \subset A, \nu(B_r(y)) \geq nr^{N-1}, r < 2/n\}.$$

Per il Teorema A.2.2 esiste una sottofamiglia numerabile \mathcal{G} di \mathcal{F} di palle disgiunte tale che

$$\bigcup_{B_r(y) \in \mathcal{F}} B_r(y) \subset \bigcup_{B_r(y) \in \mathcal{G}} \hat{B}_r(y).$$

Indicizziamo la famiglia numerabile \mathcal{G} come $\mathcal{G} = \{B_{r_i}(y_i) : i \in \mathbb{N}\}$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1/n}^{N-1}(K) &\leq C \sum_{i=1}^{\infty} (5r_i)^{N-1} \leq \frac{\tilde{C}}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_{r_i}(y_i)) \leq \frac{\tilde{C}}{n} \nu(A) \\ &= \frac{\tilde{C}}{n} \nu(K) + \epsilon \frac{\tilde{C}}{n}. \end{aligned}$$

Da cui facendo tendere n a $+\infty$ si ottiene che $\nu(K) = \infty$. Assurdo, dato che ν è localmente finita.

□

Capitolo 4

Caratterizzazione degli split states

In questo capitolo, di natura molto tecnica, si porranno le basi per la dimostrazione vera e propria del Teorema 3.3.1 che è collocata nel capitolo successivo. In particolare si introdurrà il concetto di split state che risulterà essere fondamentale per i nostri scopi essendo la configurazione dell'equazione cinetica dopo un procedimento di blow-up. Intuitivamente si tratta di una soluzione (u, μ) dell'equazione cinetica tale che il membro destro possa essere fattorizzato in una parte dipendente solo da v e una parte dipendente solo da x . Vediamo la definizione più nei dettagli.

Definizione 4.0.5 (Split state) *Uno split state è una tripla (u, h, ν) composta da:*

- una funzione $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$,
- una funzione $h \in BV(\mathbb{R})$ continua a sinistra e
- una misura non negativa $\nu \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$

tale che sia soddisfatta l'equazione cinetica:

$$f'(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u(x)) = h(v) \nu \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \text{ per qualsiasi } v.$$

4.1 Split states e successioni di blow-up

Dopo aver introdotto il concetto di split states vediamo come esso sia in relazione con le successioni di blow-up della soluzione e delle misure di Radon

definite. La proposizione che segue sarà utilizzata successivamente per dimostrare il teorema di caratterizzazione degli split states. Tale proposizione necessita però di un lemma preliminare.

Lemma 4.1.1 *Sia ν una misura di Radon non-negativa e finita su \mathbb{R}^N . Sia $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R})$ una funzione debolmente misurabile tale che la variazione totale di H_y è 1 ν -a.e. Allora per ν -a.e. y si ha*

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\nu(B_r(y))} \left\{ \int_{\mathbb{R} \times B_r(y)} \zeta \left(v, \frac{x-y}{r} \right) d[H_y \times \nu](v, x) - \int_{B_r(y)} \left(\int_{\mathbb{R}} \zeta \left(v, \frac{x-y}{r} \right) dH_x(v) \right) d\nu(x) \right\} = 0 \quad (4.1)$$

per qualsiasi $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Prendiamo una famiglia di funzioni numerabile $\mathcal{S} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ densa in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ rispetto alla topologia uniforme. Per qualsiasi $\varphi \in \mathcal{S}$ definiamo la funzione $f_\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ nel modo seguente

$$f_\varphi(y) := \int_{\mathbb{R}} \varphi dH_y(v)$$

e sia $S := \bigcap_{\varphi \in \mathcal{S}} S_\varphi$, dove

$$S_\varphi := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : y \text{ è un punto di Lebesgue rispetto a } \nu \text{ per la funzione } f_\varphi \right\}.$$

Per il teorema di differenziazione di Lebesgue si ha che $\nu(\mathbb{R}^N \setminus S) = 0$. Vogliamo dimostrare che qualsiasi $y \in S$ soddisfa (4.1).

Sia $y \in S$. Per qualsiasi $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ definiamo

$$\mathcal{F}(\zeta, r) := \frac{1}{\nu(B_r(y))} \left\{ \int_{\mathbb{R} \times B_r(y)} \zeta \left(v, \frac{x-y}{r} \right) d[H_y \times \nu](v, x) - \int_{B_r(y)} \left(\int_{\mathbb{R}} \zeta \left(v, \frac{x-y}{r} \right) dH_x(v) \right) d\nu(x) \right\}.$$

Sia $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in \mathcal{S}$. Allora si ha

$$\int_{B_r(y)} \int_{\mathbb{R}} \psi \left(\frac{x-y}{r} \right) \varphi(v) dH_x(v) d\nu(x) = \int_{B_r(y)} \psi \left(\frac{x-y}{r} \right) f_\varphi(x) d\nu(x),$$

$$\int_{\mathbb{R} \times B_r(y)} \psi \left(\frac{x-y}{r} \right) \varphi(v) d[H_y \times \nu](v, x) = f_\varphi(y) \int_{B_r(x)} \psi \left(\frac{x-y}{r} \right) d\nu(x).$$

Inoltre osserviamo che

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B_r(y)} \psi \left(\frac{x-y}{r} \right) (f_\varphi(y) - f_\varphi(x)) d\nu(x) \right| \\ & \leq \|\psi\|_\infty \int_{B_r(y)} |f_\varphi(y) - f_\varphi(x)| d\nu(x) \end{aligned}$$

e quindi dato che y è un punto di Lebesgue rispetto a ν per la funzione f_φ si ha

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\nu(B_r(y))} \int_{B_r(y)} \left(\frac{x-y}{r} \right) (f_\varphi(y) - f_\varphi(x)) d\nu(x) = 0.$$

Da cui segue che

$$\lim_{r \downarrow 0} \mathcal{F}(\psi \otimes \varphi, r) = 0.$$

Questo dimostra (4.1) per qualsiasi $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che esistono $\varphi_1 \dots \varphi_k \in \mathcal{S}$ e $\psi_1, \dots, \psi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\zeta = \sum_{i=1}^k \psi_i \otimes \varphi_i.$$

L'insieme di queste funzioni è denso in $C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, perciò dato che

$$|\mathcal{F}(\xi, r) - \mathcal{F}(\zeta, r)| \leq 2\|\zeta - \xi\|_\infty,$$

per qualsiasi $\zeta, \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Vediamo ora la proposizione che mette in relazione le successioni di blow-up con gli split states.

Proposizione 4.1.2 *Siamo f, u come nel Teorema 3.3.1. Allora per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in \mathbb{R}^N$ esiste $h_y \in BV(\mathbb{R})$ con la seguente proprietà:*

Per qualsiasi $(u^\infty, \nu^\infty) \in B^\infty(y) \times T^{N-1}(y, \nu)$ generati dalla stessa successione di blow up, $(u^\infty, h_y, \nu^\infty)$ è uno split state.

Dimostrazione.

PASSO 1

Dalla Proposizione 3.3.3 passando al limite debole si ha che per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. punto di blow-up $y \in \mathbb{R}^N$ ogni coppia (u^∞, ν^∞) ottenuta dalla stessa sequenza di blow-up soddisfa:

$$a(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u^\infty(x)) = \frac{\partial}{\partial v} \mu^\infty \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N). \quad (4.2)$$

Il primo passo per dimostrare tale teorema è costruire una famiglia di misure $\{H_y\}_y$ tale che la fattorizzazione $\mu^\infty = H_y \times \nu^\infty$ valga per \mathcal{H}^{N-1} -a.e y . Per far ciò la prima cosa da fare è disintegrare la misura $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ grazie al Teorema A.1.1 ottenendo che esiste $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ debolmente ν -misurabile tale che $\mu = \nu \otimes H_x$.

Prendiamo ora $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ e sia $M > 0$ tale che $\text{Supp } \zeta \subset B(0, M)$. Allora

$$\begin{aligned} & \frac{r^{N-1}}{\nu(B_r(y))} \left(\int_{B(0,M)} \zeta(v, x) d\mu^{y,r} - \int_{B(0,M)} \zeta(v, x) d[H_y \times \nu^{y,r}] \right) \\ &= \frac{1}{\nu(B_r(y))} \left(\int_{B(y,rM)} \zeta\left(v, \frac{x-y}{r}\right) d\mu - \int_{B(y,rM)} \zeta\left(v, \frac{x-y}{r}\right) d[H_y \times \nu] \right). \end{aligned}$$

Ricordando che $\mu = \nu \otimes H_x$ e applicando il Lemma 4.1.1 si ottiene subito:

$$\frac{r^{N-1}}{\nu(B_r(y))} (\mu^{y,r} - H_y \times \nu^{y,r}) \xrightarrow{*} 0 \quad \text{per } \nu\text{-a.e. } y \in \mathbb{R}^N. \quad (4.3)$$

Proviamo ora che per qualsiasi $y \notin J$ si ha $\mu^{y,r} \xrightarrow{*} 0$. Sia $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ compatto. Prendiamo $y \notin J$ e sia $L > 0$ tale che $K \subset \mathbb{R} \times B_L(0)$. Allora

$$|\mu^{y,r}|(K) \leq |\mu^{y,r}|(\mathbb{R} \times B_L(0)) = \frac{|\mu|(\mathbb{R} \times B_{rL}(y))}{r^{N-1}} = \frac{\nu(B_{rL}(y))}{r^{N-1}}.$$

Quindi dato che $y \notin J$ si ha che $|\mu^{y,r}|(K) \rightarrow 0$ e quindi anche $\mu^{y,r} \xrightarrow{*} 0$. Da ciò si ha subito che $\mu^\infty = 0$ e quindi anche che $\nu^\infty = 0$ a causa dalla sua definizione. Per questa ragione se $y \notin J$ non c'è nulla da dimostrare e ci restringeremo solo agli $y \in J$.

Dimostriamo ora che ogni sottoinsieme ν -trascurabile di J è anche \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile. Sia quindi $K \subset J$ tale che $\nu(K) = 0$. Essendo ν una misura di Radon si ha che per ogni ϵ esiste U aperto tale che $K \subset U$ e $\nu(U) < \epsilon$. Definiamo quindi la seguente famiglia:

$$\mathcal{F} := \{B_r(y) : y \in K, \nu(B_r(y)) > Cr^{N-1} \text{ e } B_r(y) \subset U\}.$$

Osserviamo che \mathcal{F} è un ricoprimento di K che soddisfa la condizione

$$\sup\{\text{diam } B : B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Perciò possiamo applicare il teorema di ricoprimento di Vitali ottenendo che esiste una famiglia numerabile \mathcal{G} di palle disgiunte in \mathcal{F} tale che

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}$$

essendo \hat{B} la palla chiusa concentrica a B con raggio 5 volte il raggio di B . Per semplicità indicizziamo la sottofamiglia \mathcal{G} :

$$\mathcal{G} = \{B(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Con queste premesse abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{10\delta}^{N-1}(K) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(N-1)(5r_i)^{N-1} \leq \tilde{C} \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_{r_i}(y_i)) \\ &\leq C(N)\nu(U) \leq \epsilon C(N). \end{aligned}$$

Da cui otteniamo che $\mathcal{H}^{N-1}(K) = 0$.

Inoltre il fatto che per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in \mathbb{R}^N$, $\{\nu^{y,r}\}_{r \downarrow 0}$ è debolmente* precompatto in $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ implica che

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} = \limsup_{r \downarrow 0} \nu^{y,r}(B_1(0)) < \infty \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } y \in \mathbb{R}^N. \quad (4.4)$$

Combinando (4.3) e (4.4) otteniamo

$$\mu^{y,r} - H_y \times \nu^{y,r} \xrightarrow{*} 0 \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } y \in J \quad (4.5)$$

e in particolare $\mu^\infty = H_y \times \nu^\infty$ per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in J$.

PASSO 2

Proviamo ora che $\frac{\partial}{\partial v} H_y = h_y \mathcal{L}^1$ per qualche $h_y \in BV(\mathbb{R})$. Come nel passo 1 possiamo restringerci al caso in cui $y \in J$, infatti se $y \notin J$ allora $\mu^\infty = 0$ e quindi possiamo scegliere $h_y = 0$. Con questa scelta possiamo prendere una successione di blow-up tale che $\nu^\infty \neq 0$.

Come conseguenza del passo 1 e di (4.2) abbiamo:

$$a(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u^\infty(x)) = \frac{\partial}{\partial v} (H_y \times \nu^\infty) = \left(\frac{\partial}{\partial v} H_y \right) \times \nu^\infty \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N). \quad (4.6)$$

Prendiamo ora $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\int \varphi d\nu^\infty = 1$ e testiamo la (4.6) con la funzione test $\psi \otimes \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. Otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(v) d \left(\frac{\partial}{\partial v} H_y \right) = \int_{\mathbb{R}} a(v) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla_x \chi(v, u^\infty(x)) \varphi(x) dx \right) \psi(v) dv.$$

Da cui poi integrando per parti il secondo membro si ha:

$$\frac{\partial}{\partial v} H_y = -a(v) \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \varphi(x) \chi(v, u^\infty(x)) dx \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (4.7)$$

Osserviamo ora che fissato x , $\chi(v, u^\infty(x))$ è a variazione limitata in v , inoltre ha anche variazione limitata uniformemente rispetto ad x , infatti

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(v) \chi(v, u^\infty(x)) dv \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi'(v) dv \leq 2 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \leq 1.$$

Per questi motivi, applicando in teorema di Fubini, anche la funzione integrale

$$\int \nabla \varphi(x) \chi(v, u^\infty(x)) dx$$

è una funzione a variazione limitata. Da cui per (4.7) si ottiene che anche $\frac{\partial}{\partial v} H_y := h_y$ è una funzione BV.

PASSO 3

Proviamo ora che l'equazione cinetica (3.4) è soddisfatta puntualmente in v . Per i risultati precedenti abbiamo:

$$a(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u^\infty(x)) = h_y \times \nu^\infty \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N). \quad (4.8)$$

Dato che $\chi(v, u^\infty(x))$ è continua a sinistra in v , possiamo applicare il teorema di convergenza dominata per affermare che:

$$\chi(v - \epsilon, u^\infty(x)) \rightarrow \chi(v, u^\infty(x)) \quad \text{in } \mathcal{L}_{loc}^1 \text{ per } \epsilon \downarrow 0.$$

Dato che h è a variazione limitata per il Teorema 1.3.3 possiamo scegliere un buon rappresentante continuo a sinistra, cioè tale che

$$h_y(v - \epsilon) \rightarrow h_y(v) \quad \text{per } \epsilon \downarrow 0.$$

E quindi la (4.8) può essere riscritta nel modo seguente:

$$a(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u^\infty(x)) = h_y(v) \times \nu^\infty \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \quad \forall v \in \mathbb{R},$$

che è quello che volevamo dimostrare.

□

Iniziamo ora a caratterizzare gli split states, partendo da situazioni particolari per arrivare al teorema generale di caratterizzazione degli split states.

4.2 Split states senza dissipazione di entropia

Lemma 4.2.1 *Sia (u, h, ν) uno split state con $h\nu = 0$ in un aperto $U \subset \mathbb{R}^N$. Allora u è continua e costante lungo le linee caratteristiche in U , cioè per qualsiasi $x \in U$, $u(y) = u(x)$ per qualsiasi y appartenente alla componente connessa di $(x + \mathbb{R}a(u(x))) \cap U$ che contiene x .*

Dimostrazione. D'ora in avanti denoteremo con $Leb(g)$ l'insieme dei punti di Lebesgue di g .

PASSO 1

Proviamo prima di tutto che per qualsiasi $\epsilon > 0$ e per qualsiasi $u_0 \in [0, 1]$ esiste $\delta > 0$ tale che, per qualsiasi $R > 0$ e $y \in Leb(u)$ con $B_R(y) \subset U$

$$u(y) \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} u_0 \implies \left(u \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} u_0 - \epsilon \quad \text{a.e. in } B_{\delta R}(y) \right). \quad (4.9)$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e $u_0 \in [0, 1]$ e senza ledere la generalità assumiamo che $y = 0$ e $R = 1$. Dato che il flusso f è non-degenere possiamo trovare N numeri reali $u_0 > v_1 > v_2 > \dots > v_N \geq u_0 - \epsilon$ tali che $\{a(v_i)\}$ siano linearmente indipendenti. Osserviamo che $0 \in Leb(u)$ e che $u(0) \geq u_0 > v_1$ e proviamo che $0 \in Leb(\chi(v_1, u))$. Vogliamo dimostrare che

$$|\chi(v_1, u(x)) - \chi(v_1, u(0))| \leq C|u(x) - u(0)|.$$

Dato che $u(0) > v_1$ si ha che $\chi(v_1, u(0)) = 1$, perciò possiamo considerare $u(x) < v_1$ e $v_1 > 0$, altrimenti la tesi è immediata. Di conseguenza esiste $C > 0$ tale che

$$|\chi(v_1, u(x)) - \chi(v_1, u(0))| \leq C|v_1 - u(0)| \leq C|u(x) - u(0)|.$$

Perciò dato che $0 \in Leb(u)$ si ha anche che $0 \in Leb(\chi(v_1, u))$.

Perciò l'equazione cinetica (3.4) con $v = v_1$ permette di affermare che:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}a(v_1) \cap B_1(0) \\ x \in Leb(\chi(v_1, u)) \quad \text{e} \quad \chi(v_1, u(x)) = 1. \end{aligned}$$

Grazie alla monotonia di $v \rightarrow \chi(v, u)$ si ha anche

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}a(v_1) \cap B_1(0) \\ x \in Leb(\chi(v_2, u)) \quad \text{e} \quad \chi(v_2, u(x)) = 1. \end{aligned}$$

Applichiamo quindi l'equazione cinetica con $v = v_2$ per ottenere

$$\begin{aligned} \forall x \in ((\mathbb{R}a(v_1) \cap B_1(0)) + \mathbb{R}a(v_2)) \cap B_1(0) \\ x \in \text{Leb}(\chi(v_2, u)) \quad \text{e} \quad \chi(v_2, u(x)) = 1. \end{aligned}$$

Una semplice considerazione geometrica mostra che esiste un $\delta_2 > 0$ tale che

$$((\mathbb{R}a(v_1) \cap B_1(0)) + \mathbb{R}a(v_2)) \cap B_1(0) \supset (\mathbb{R}a(v_1) + \mathbb{R}a(v_2)) \cap B_{\delta_2}(0).$$

Dato che $\mathbb{R}a(v_1) + \dots + \mathbb{R}a(v_N) = \mathbb{R}^N$ iterando l'argomento precedente possiamo trovare un $\delta = \delta_N > 0$ tale che

$$\forall x \in B_\delta(0) \quad x \in \text{Leb}(\chi(v_N, u)) \quad \text{e} \quad \chi(v_N, u(x)) = 1,$$

che implica che

$$u \geq v_N \geq u_0 - \epsilon \quad \text{a.e. in } B_\delta(0).$$

Osserviamo che δ dipende solo da a, u_0 e ϵ .

La disuguaglianza opposta può essere dimostrata in modo analogo.

PASSO 2

Proviamo ora che per qualsiasi $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per qualsiasi $R > 0$ e $y \in \text{Leb}(u)$ con $B_R(y) \subset U$

$$|u - u(y)| \leq \epsilon \quad \text{a.e. in } B_{\delta R}(y).$$

Per dimostrare questo fatto useremo un argomento standard di compattezza. Sia $\epsilon > 0$ fissato e scegliamo un numero finito di $u_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$[0, 1] \subset \bigcup_k [u_k, u_k + \epsilon/2].$$

Per ogni k applichiamo il passo 1 con u_k e $\epsilon/2$ al posto di u_0 e ϵ e sia δ_k il relativo δ , la cui esistenza è garantita dal passo 1.

Definiamo $\delta := \min_k \delta_k$. Fissiamo un punto $y \in \text{Leb}(u) \cap U$. Allora esiste k tale che $u(y) \in [u_k, u_k + \epsilon/2]$ e in particolare abbiamo $u(y) \geq u_k$. Grazie alla nostra scelta di δ_k abbiamo perciò

$$u \geq u_k - \epsilon/2 \quad \text{a.e. in } B_{\delta_k R}(y) \supset B_{\delta R}(y).$$

Inoltre sappiamo che $u_k \geq u(y) - \epsilon/2$, perciò otteniamo

$$u \geq u(y) - \epsilon \quad \text{a.e. in } B_{\delta R}(y).$$

La disuguaglianza opposta si dimostra in maniera analoga.

Concludiamo quindi che esiste una famiglia di moduli di continuità locali uniforme per per ogni punto di Lebesgue di u , infatti da quello che abbiamo dimostrato si deduce che per qualsiasi $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per qualsiasi $y \in \text{Leb}(u)$

$$|u - u(y)| \leq \epsilon \quad \text{a.e. in } B_\delta(y).$$

(osserviamo che in realtà in questo passo abbiamo dimostrato qualcosa in più che ci servirà per la seconda parte della tesi).

Dato che i punti di Lebesgue di u sono densi in U otteniamo subito che u ammette un rappresentante continuo in U .

PASSO 3

Per dimostrare la seconda parte della tesi fissiamo $x \in U$ e sia y appartenente alla componente connessa di $(x + \mathbb{R}a(u(x))) \cap U$ che contiene x . Dato che U è aperto esiste un intorno V che contiene y tale che $V \subset U$. Consideriamo l'insieme

$$C^- := U \cap \bigcup_{v < u(x)} x + \mathbb{R}a(v).$$

Consideriamo ogni sequenza $y_k \rightarrow y$ con $y_k \in C^- \cap V$ e sia v_k tale che $y_k \in x + \mathbb{R}a(v_k)$ per ogni k . Possiamo assumere che le linee che i segmenti che congiungono x e y_k siano interamente contenuti in U a patto di prendere V sufficientemente piccolo. E anche che $v_k \rightarrow u(x)$ a patto di prendere una sottosuccessione.

Da (3.4) abbiamo che

$$\chi(v_k, u(y_k)) = \chi(v_k, u(x)) = 1,$$

perciò dato che u è continua in y si ha

$$u(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} u(y_k) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = u(x).$$

Analogamente per dimostrare la disuguaglianza opposta consideriamo l'insieme

$$C^+ := U \cap \bigcup_{u(x) \leq v} x + \mathbb{R}a(v)$$

e ragioniamo analogamente a prima.

Questo prova che u è costante lungo le linee caratteristiche in U .

□

Proposizione 4.2.2 (Teorema di Liouville) *Sia (u, h, ν) uno split state tale che $h\nu = 0$ in \mathbb{R}^N . Allora la funzione u è costante.*

Dimostrazione. Per il Lemma 4.2.1 con $U = \mathbb{R}^N$ sappiamo che u è continua. Inoltre dal passo 2 della dimostrazione precedente si ha che per qualsiasi $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per qualsiasi $R > 0$ e $y \in \text{Leb}(u)$ con $B_R(y) \subset U$

$$|u - u(y)| \leq \epsilon \quad \text{a.e. in } B_{\delta R}(y).$$

Facendo tendere $R \rightarrow \infty$ abbiamo la tesi dato che ϵ è arbitrario.

□

4.3 Split states speciali: ν ha supporto in un iperpiano

Tipicamente questi split states sono ottenuti dal blow-up in corrispondenza di punti di shocks.

Lemma 4.3.1 *Sia (u, h, ν) uno split state con $h \neq 0$ e $\nu = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J$, dove il supporto $J \subset \{\eta \cdot x = 0\}$ è relativamente aperto nell'iperpiano (per qualche vettore η). Allora la conclusione del Lemma 4.2.1 è valida con $U = \mathbb{R}^N \setminus \bar{J}$. Inoltre esistono le tracce u^+ e u^- costanti lungo J e tali che*

$$h(v) = a(v) \cdot \eta (\chi(v, u^+) - \chi(v, u^-)) \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad \text{a.e. in } J.$$

Le tracce u^\pm e η (a meno del verso di η) sono determinate univocamente da h .

Dimostrazione.

PASSO 1

In questo primo passo proveremo l'esistenza delle tracce u^+ e u^- sull'iperpiano $\{\eta \cdot x = 0\}$.

Per semplicità notazionale scegliamo un sistema di coordinate x_1, \dots, x_N tale che $\eta = (1, 0, \dots, 0)$. L'iperpiano sarà quindi $\{x_1 = 0\}$. Da qui in avanti inoltre denoteremo con $'$ la proiezione sulle ultime $(N-1)$ componenti. Considereremo inoltre $v \in \mathbb{R}$ tale che $a_1(v) \neq 0$.

Per le ipotesi fatte sul supporto di ν si ha che $\nu(\{\eta \cdot x > 0\}) = 0$, perciò l'equazione cinetica (3.4) diventa

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \chi(v, u(x)) + \frac{a'(v)}{a_1(v)} \cdot \nabla' \chi(v, u(x)) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \quad (4.10)$$

in $\{\eta \cdot x > 0\} = \{x_1 > 0\}$. Da (4.10) risolvendo l'equazione del trasporto otteniamo che per a.e. $(x_1, x') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{N-1}$,

$$\chi(v, u(x_1, x')) = \chi(v, u(1, x' + (1 - x_1)(a'/a_1)(v))). \quad (4.11)$$

Introduciamo

$$\chi^+(v, x') := \chi(v, u(1, x' + (a'/a_1)(v))), \quad (4.12)$$

da cui passando al limite per convergenza dominata si ha

$$\begin{aligned} & \lim_{x_1 \downarrow 0} \int_{B'_R(0)} |\chi(v, u(x_1, x')) - \chi^+(v, x')| dx' \\ &= \lim_{x_1 \downarrow 0} \int_{B'_R(0)} |\chi(v, u(1, x' + (1 - x_1)(a'/a_1)(v))) \\ & \quad - \chi(v, u(1, x' + (a'/a_1)(v)))| dx' = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

per qualsiasi $R < \infty$. Perciò (4.12) è proprio la traccia (superiore) di $\chi(v, u(\cdot))$ su $\{x_1 = 0\}$ in $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^{N-1})$.

Dato che il flusso è non-degenere si ha che $a_1(v) \neq 0$ per a.e. $v \in \mathbb{R}$. Perciò (4.13) vale per a.e. $v \in \mathbb{R}$. Introduciamo ora

$$\tilde{u}^+(x') := \int_{\mathbb{R}} \chi^+(v, x') dv. \quad (4.14)$$

Per definizione sappiamo che $u(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(v, u(x)) dv$, perciò

$$\begin{aligned} \int_{B'_R(0)} |u(x_1, x') - u^+(x')| dx' &= \int_{B'_R(0)} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi(v, u(x)) - \chi^+(v, x') dv \right| dx' \\ &\leq \int_{B'_R(0)} \int_{\mathbb{R}} |\chi(v, u(x)) - \chi^+(v, x')| dv dx'. \end{aligned}$$

Dopo aver applicato il teorema di Fubini-Tonelli possiamo usare il teorema di convergenza dominata e grazie a (4.13) concludere

$$\int_{B'_R(0)} |u(x_1, x') - \tilde{u}^+(x')| dx' \rightarrow 0 \quad (4.15)$$

per $x_1 \downarrow 0$ e per qualsiasi $R < \infty$. Perciò (4.14) è la traccia (superiore) di u su $\{x_1 = 0\}$ in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^{N-1})$. In maniera analoga è possibile provare l'esistenza delle tracce inferiori $\chi^-(v, \cdot)$ e \tilde{u}^- .

Dimostriamo ora che, tranne per una quantità numerabile di punti $v \in \mathbb{R}$, $\chi(v, \tilde{u}^\pm)$ è la traccia superiore (risp. inferiore) di $\chi(v, u(\cdot))$. Consideriamo infatti l'insieme numerabile

$$E := \{v \in \mathbb{R} : \mathcal{H}^{N-1}(\{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : \tilde{u}^\pm(x') = v\}) > 0\}.$$

Dimostriamo che E è al più numerabile. Sia $A_v := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : \tilde{u}^\pm(x') = v\}$ e $\bar{A} := \{A_v : \mathcal{H}^{N-1}(A_v) > 0\}$. Osserviamo che se $v_1 \neq v_2$ allora $A_{v_1} \cap A_{v_2} = \emptyset$, perciò dato che $\bigcup_{A_v \in \bar{A}} A_v \subset \mathbb{R}^{N-1}$ si ottiene che \bar{A} è al più numerabile. Grazie a (4.15) abbiamo che a meno di sottosuccessioni

$$\lim_{x_1 \downarrow 0} u(x_1, x') = u^+(x') \quad \text{per a.e. } x' \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Sia ora $v \in \mathbb{R} \setminus E$. Per tali v si ha che, sempre a meno di sottosuccessioni,

$$\lim_{x_1 \downarrow 0} \chi(v, u(x_1, x')) = \chi(v, u^+(x')) \quad \text{per a.e. } x' \in \mathbb{R}^{N-1}$$

e quindi per convergenza dominata

$$\lim_{x_1 \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{B'_R(0)} |\chi(v, u(x_1, x')) - \chi(v, u^+(x'))| dx' dv = 0$$

per qualsiasi $R > 0$. Ciò equivale a dire che la traccia superiore di $\chi(v, u)$ è proprio data da $\chi(v, u^+)$. Ragionamenti analoghi possono essere applicati per l'esistenza della traccia inferiore u^- in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^{N-1})$ sull'iperpiano.

PASSO 2

Con le ipotesi fatte sulla misura ν , riscriviamo l'equazione cinetica per qualsiasi $v \in \mathbb{R}$

$$a(v) \cdot \nabla_x \chi(v, u(x)) = h(v) \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \quad (4.16)$$

Testiamo tale equazione distribuzionale con funzioni test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ della forma

$$\varphi(x_1, x') = \varphi_1(x_1/\epsilon) \varphi'(x')$$

e tali che $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \leq \varphi_1 \leq 1$, $\varphi_1(0) = 1$ e $\varphi_1(x_1) = \varphi_1(-x_1)$. Sia $M > 0$ tale che $\text{supp} \varphi_1 \subset [-M, M]$.

Otteniamo dal primo membro

$$-a(v) \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \chi(v, u(x_1, x')) \left(\nabla(\varphi'(x')) \varphi_1(x_1/\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dx} \varphi_1(x_1/\epsilon) \varphi'(x') \right) dx_1 dx'.$$

Studiamo ciascun addendo separatamente:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \chi(v, u(x_1, x')) \nabla(\varphi'(x')) \varphi_1(x_1/\epsilon) dx_1 dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x_1/\epsilon) dx_1 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \chi(v, u(x_1, x')) \nabla(\varphi'(x')) dx' \end{aligned}$$

che tende a zero per $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \chi(v, u(x_1, x')) \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dx} \varphi_1(x_1/\epsilon) \varphi'(x') \right) dx_1 dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi'(x') dx' \int_{-M/\epsilon}^{M/\epsilon} \chi(v, u(x_1, x')) \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dx} \varphi_1(x_1/\epsilon) \right) dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi'(x') dx' \int_{-M}^M \chi(v, u(\epsilon z, x')) \left(\frac{d}{dx} \varphi_1(z) \right) dz. \end{aligned}$$

Spezziamo l'integrale interno come

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \chi(v, u(\epsilon z, x')) \left(\frac{d}{dx} \varphi_1(z) \right) dz &= \int_0^M \chi(v, u(\epsilon z, x')) \left(\frac{d}{dx} \varphi_1(z) \right) dz \\ &\quad - \int_0^{-M} \chi(v, u(\epsilon z, x')) \left(\frac{d}{dx} \varphi_1(z) \right) dz. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Osserviamo che per $\epsilon \rightarrow 0$

$$\chi(v, u(\epsilon z, x')) \rightarrow \chi(v, u^+(x')) \quad \text{per a.e. } (z, x') \in (0, M) \times \mathbb{R}^{N-1}$$

e analogamente

$$\chi(v, u(\epsilon z, x')) \rightarrow \chi(v, u^-(x')) \quad \text{per a.e. } (z, x') \in (-M, 0) \times \mathbb{R}^{N-1}.$$

Quindi passando al limite per convergenza dominata e tenendo in considerazione che φ_1 è pari e $\varphi_1(0) = 1$ la (4.17) converge a

$$\chi(v, u^-(x')) - \chi(v, u^+(x')) \quad \text{per a.e. } x' \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Passando nuovamente al limite per convergenza dominata si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi'(x') (\chi(v, u^-(x')) - \chi(v, u^+(x'))) dx'.$$

Per quando riguarda il secondo membro otteniamo invece

$$\begin{aligned} h(v) \int_J \varphi'(x') d\mathcal{H}^{N-1} &= h(v) \int_{\{x_1=0\}} \varphi'(x') \mathcal{H}^{N-1} \\ &= h(v) \int_{J'} \varphi'(x') dx' \end{aligned}$$

dove $J' = \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : (0, x') \in J\}$.

Si ha perciò

$$a(v) \cdot \eta \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\chi(v, u^+(x')) - \chi(v, u^-(x'))) \varphi'(x') dx' = h(v) \int_{J'} \varphi'(x') dx'$$

per qualsiasi $v \in \mathbb{R}$ e $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$.

Perciò si ha $\chi(v, u^+) - \chi(v, u^-)$ è costante in J' e si annulla fuori da J' per qualsiasi $v \in \mathbb{R}$ e in particolare

$$h(v) = a(v) \cdot \eta (\chi(v, u^+) - \chi(v, u^-)) \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad a.e. \text{ in } J.$$

Osserviamo che

$$\chi(v, \beta) - \chi(v, \alpha) = \begin{cases} +\mathbf{1}_{(\alpha, \beta]}(v) & \text{per } \alpha \leq \beta, \\ -\mathbf{1}_{(\beta, \alpha]}(v) & \text{per } \alpha \geq \beta. \end{cases}$$

Di conseguenza $\{u^+, u^-\} = \{\inf \text{supp } h, \sup \text{supp } h\}$.

Osserviamo quindi che a meno del verso di η possiamo scegliere $u^+ \geq u^-$ per ottenere

$$h(v) = a(v) \cdot \eta \mathbf{1}_{(u^-, u^+]} \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad a.e. \text{ in } J. \quad (4.18)$$

Dimostriamo la seconda parte dell'enunciato. Per ipotesi $h \neq 0$, perciò esistono $v_1, \dots, v_n \in \text{supp } h$ tali che $a(v_1), \dots, a(v_n)$ siano linearmente indipendenti, essendo a non-degenere per ipotesi. Si ha perciò che (a meno del verso) η è determinato univocamente dall'intersezione degli N iperpiani

$$h(v_k) = a(v_k) \cdot \eta (\chi(v_k, u^+) - \chi(v_k, u^-)) \quad k = 1, \dots, N.$$

□

Proviamo ora un risultato analogo supponendo stavolta che J coincida proprio con l'iperpiano:

Proposizione 4.3.2 *Sia (u, h, ν) uno split state con $h \neq 0$ e $\nu = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J$, dove il supporto $J = \{\eta \cdot x = 0\}$ per qualche versore η . Allora la conclusione del Lemma 4.3.1 è vera. Inoltre u è costante in ciascun semispazio individuato da J .*

Dimostrazione. Abbiamo già provato nel lemma precedente che esistono le tracce u^+ e u^- sull'iperpiano e u^+ e u^- sono ivi costanti. Fissiamo un punto $y \in J$ e consideriamo una successione $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{\eta \cdot x > 0\}$ tale che $y_k \rightarrow y$ e tale che $u(y_k) \rightarrow u^+(y)$. Una successione siffatta esiste (lavorando per semplicità con l'iperpiano $x_1 = 0$) perchè l'esistenza della traccia data da (4.15) implica la convergenza quasi ovunque (a meno di sottosuccessioni) di $u(x_k, x')$ a $u^+(x')$ per $x_k \downarrow 0$.

Dal Lemma 4.2.1 la funzione u è continua e costante lungo le linee caratteristiche in $\mathbb{R}^N \setminus J$. Perciò possiamo prendere z appartenente alla linea caratteristica passante per y e nel semispazio positivo, cioè $z \in y + \mathbb{R}a(u^+(y))$ con $\eta \cdot z > 0$ e possiamo scegliere una successione $z_k \rightarrow z$ tale che $z_k \in y_k + \mathbb{R}a(u(y_k))$ per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$ tale che $z_k \rightarrow z$. Perciò

$$u(z) = \lim_{k \rightarrow +\infty} u(z_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} u(y_k) = u^+(y).$$

Dato che $y \in J$ era arbitrario tale argomento mostra che $u = u^+$ in $\{\eta \cdot x > 0\}$. Considerazioni analoghe possono essere fatte per l'altro semispazio.

□

4.4 Split states speciali: ν ha supporto in metà iperpiano

Lemma 4.4.1 *Sia (u, h, ν) uno split state con $h \neq 0$ e $\nu = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J$, con*

$$J = \{\eta \cdot x = 0, \omega \cdot x > 0\}$$

per qualche coppia (η, ω) di vettori ortonormali.

Allora la conclusione del Lemma 4.3.1 continua a valere. Inoltre il vettore ω è fissato. Esiste cioè un cono C^ (che non coincide con il mezzo iperpiano) dipendente solo da h , tale che $\omega \in C^*$.*

Dimostrazione. Osserviamo che dal Lemma 4.3.1 possiamo scrivere h come

$$h(v) = 1_{(u^-, u^+]}(v) a(v) \cdot \eta \quad \forall v \in \mathbb{R},$$

dove le tracce u^+ , u^- e il vettore normale η sono univocamente determinati (a meno dell'orientazione) da h .

Sia $I \subset (u^-, u^+)$ un intervallo tale che $a(v) \cdot \eta \neq 0$ per qualsiasi $v \in I$. Consideriamo ora $v \in I$. Per tali v possiamo dividere l'equazione (4.16) per $a(v) \cdot \eta$ ed ottenere

$$\frac{a(v)}{a(v) \cdot \eta} \cdot \nabla \chi(v, u) = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J.$$

Per il Lemma 4.2.1 u è una funzione continua ed è costante lungo le linee caratteristiche fuori da J , perciò si ha

$$\chi(v, u) = \begin{cases} 1 & \text{in } J + \mathbb{R}_+ \frac{a(v)}{a(v) \cdot \eta} \\ 0 & \text{in } J - \mathbb{R}_+ \frac{a(v)}{a(v) \cdot \eta}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Si vuole ora dimostrare che per qualsiasi $v_1 < v_2$ in I si ha:

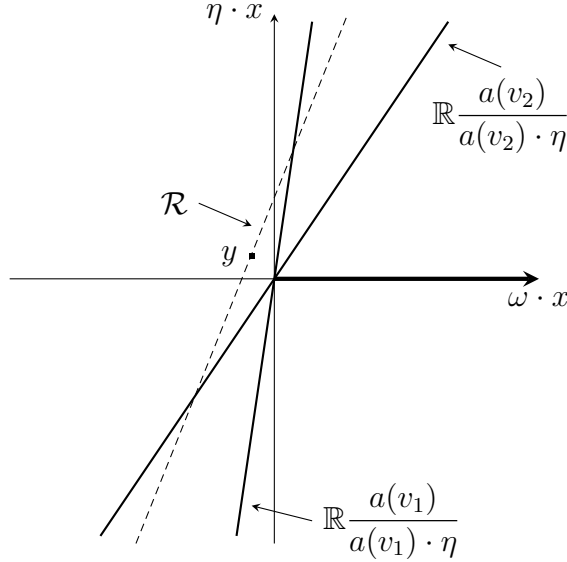
$$\frac{a(v_1) \cdot \omega}{a(v_1) \cdot \eta} \leq \frac{a(v_2) \cdot \omega}{a(v_2) \cdot \eta}. \quad (4.20)$$

Supponiamo per assurdo che esistano $v_1 < v_2$ tali che (4.20) non valga. Per continuità esiste quindi $v \in (v_1, v_2)$ tale che

$$\frac{a(v_1) \cdot \omega}{a(v_1) \cdot \eta} > \frac{a(v) \cdot \omega}{a(v) \cdot \eta} > \frac{a(v_2) \cdot \omega}{a(v_2) \cdot \eta}. \quad (4.21)$$

Dato che J è un mezzo iperpiano, esiste y tale che la retta $\mathcal{R} = y + \mathbb{R} \frac{a(v)}{a(v) \cdot \eta}$ non interseca J .

Figura 4.1: La retta \mathcal{R}



Perciò dato che u è costante lungo \mathcal{R} anche $\chi(v, u)$ è ivi costante. Grazie a (4.21) (Figura 4.1) si ha che esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ tali che

$$x_1 \in \mathcal{R} \cap \left(J - \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{a(v_1) \cdot \eta} \right) \text{ e } x_2 \in \mathcal{R} \cap \left(J + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_2)}{a(v_2) \cdot \eta} \right).$$

Distinguiamo ora due casi. Supponiamo prima di tutto che $\chi(v, u) = 1$ in \mathcal{R} , che equivale per definizione a:

$$u(x) \geq v \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

Dato che $v_1 < v$ si ha anche

$$u(x) \geq v_1 \quad \forall x \in \mathcal{R},$$

cioè $\chi(v_1, u) = 1$ in \mathcal{R} . In particolare per x_1 si ha $\chi(v_1, u(x_1)) = 1$. Ma per la scelta di x_1 si ha anche che $x_1 \in J - \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{a(v_1) \cdot \eta}$, perciò per (4.19) si ha $\chi(v_1, u(x_1)) = 0$. Assurdo.

Analogamente si arriva ad un assurdo se consideriamo il caso $\chi(v, u) = 1$. Perciò la mappa $v \rightarrow (a(v) \cdot \omega)/(a(v) \cdot \eta)$ è crescente e quindi

$$0 \leq \frac{d}{dv} \left(\frac{a(v) \cdot \omega}{a(v) \cdot \eta} \right) = \frac{((a(v) \cdot \eta) a'(v) - (a'(v) \cdot \eta) a(v)) \cdot \omega}{(a(v) \cdot \eta)^2}$$

per qualsiasi $v \in I$. Osserviamo che l'insieme aperto $A := \{v \in (u^-, u^+) : a(v) \cdot \eta \neq 0\}$ è denso in (u^-, u^+) . Infatti dato che il flusso è non-degenere abbiamo per definizione che $\mathcal{L}^1(\{v \in (u^-, u^+) : a(v) \cdot \eta = 0\}) = 0$. Di conseguenza si ha che

$$((a(v) \cdot \eta) a'(v) - (a'(v) \cdot \eta) a(v)) \cdot \omega \geq 0 \quad \text{per a.e. } v \in (u^-, u^-),$$

e quindi dato che a e a' sono continue

$$((a(v) \cdot \eta) a'(v) - (a'(v) \cdot \eta) a(v)) \cdot \omega \geq 0 \quad \forall v \in (u^-, u^-).$$

PASSO 2

Definiamo ora il cono convesso

$$C := \mathbb{R}_+ \left\{ (a(v) \cdot \eta) a'(v) - (a'(v) \cdot \eta) a(v) : v \in (u^-, u^+) \right\}.$$

Si ha chiaramente che $C \subset \{\eta \cdot x = 0\}$. Proviamo che C non può essere contenuto in un sottospazio proprio di $\{\eta \cdot x = 0\}$. Supponiamo per assurdo che lo sia, allora esisterebbe $\zeta \perp \eta$ tale che

$$((a(v) \cdot \eta) a'(v) - (a'(v) \cdot \eta) a(v)) \cdot \zeta = 0 \quad \forall v \in (u^-, u^+).$$

Quindi per il passo 1 avremmo

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{a(v) \cdot \zeta}{a(v) \cdot \eta} \right) = 0 \quad \forall v \in I, \tag{4.22}$$

dove $I \subset (u^-, u^+)$ è un intervallo aperto con $a(v) \cdot \eta \neq 0$ per qualsiasi $v \in I$. Perciò integrando la (4.22) si ha che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $a(v) \cdot (\omega - c\eta) = 0, \forall v \in I$. Assurdo dato che a è non-degenere. Sia C^* il cono duale relativo all'iperpiano $\{\eta \cdot x = 0\}$, cioè

$$C^* := \{y \in \{\eta \cdot x = 0\} : z \cdot y \geq 0, \forall z \in C\}.$$

C^* è un cono convesso e, per il passo 1, $\omega \in C^*$. Inoltre dato che C non è contenuto in un sottospazio proprio di $\{\eta \cdot x = 0\}$ si ha che C^* non può essere un semispazio.

□

4.5 Classificazione degli split states generici

Proposizione 4.5.1 *Sia (u, h, ν) uno split state con $h\nu \neq 0$. Allora esistono due costanti $L, g > 0$ e un sistema di coordinate ortonormali x_1, \dots, x_N (dipendenti solo da h) con la seguente proprietà. Esistono*

- Una costante $e \in \mathbb{R}$,
- Una funzione Lipschitziana $w : \mathbb{R}^{N-2} \rightarrow \mathbb{R}$ con $Lip(w) \leq L$

tali che $\nu = g\mathcal{H}^{N-1} \lfloor J$ per qualche insieme J della forma

$$J = \{x_1 = e\} \quad \text{oppure} \quad J = \{x_1 = e, x_N \geq w(x_2, \dots, x_{N-1})\}.$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in quattro sezioni:

- Nella Sezione 4.5.1 dimostreremo che $\nu = g\mathcal{H}^{N-1} \lfloor J$ per qualche insieme J contenuto in due grafici Lipschitziani e per qualche funzione di Borel g strettamente positiva su J .
- Nella Sezione 4.5.2 useremo un argomento di blow-up nel punto $y \in J$ e i risultati delle sezioni precedenti per mostrare che in realtà J è contenuto in un singolo grafico Lipschitziano e che g e la normale η sono costanti lungo J .
- Nella Sezione 4.5.3 dedurremo che J è contenuto in un'unione al più numerabile di iperpiani Π_k paralleli tra di loro e che $J \cap \Pi_k$ è intersezione di $2N$ sopragrafici di dimensione $(N - 1)$.

- Nella Sezione 4.5.4 useremo un argomento di blow-up attorno al punto $y \in J$ appartenente al bordo di $J \cap \Pi_k$ relativo a Π_k e i risultati delle sezioni precedenti per concludere che J è contenuto in un singolo iperpiano e in particolare che si tratta proprio di un supergrafico di una funzione Lipschitz.

4.5.1 Rettificabilità di J

Sia

$$J := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} > 0 \right\}. \quad (4.23)$$

Si vuole dimostrare che J è contenuto in due grafici Lipschitz e che $\nu = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J$.

Definizione 4.5.1 *Siano $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}$ tali che $h(v_1), \dots, h(v_N) \neq 0$ e che $a(v_1), \dots, a(v_N)$ siano linearmente indipendenti. Definiamo l'insieme aperto C come*

$$C := \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{h(v_1)} + \dots + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_N)}{h(v_N)}$$

che chiameremo cono generato dalle direzioni caratteristiche $\mathbb{R}_+ \frac{a(v_i)}{h(v_i)}$ per $i = 1, \dots, N$.

PASSO 1

Proviamo che esistono due coni C^\pm nel senso della Definizione 4.5.1 tali che per qualsiasi $y \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\nu(y + C^+) = 0 \quad \text{oppure} \quad \nu(y - C^-) = 0. \quad (4.24)$$

Per definizione di split state h non è identicamente nulla. Quindi, dato che è continua a destra esiste un insieme di misura positiva nel quale la funzione è diversa da zero. In particolare esiste un intervallo I tale che $h \neq 0$ in I . Per la genuina non-linearità del flusso esistono $v_1^-, \dots, v_N^-, v_1^+, \dots, v_N^+ \in I$ tali che

$$v_N^- > \dots > v_1^- > v_N^+ > \dots > v_1^+ > 0$$

e che i due insiemi $\{v_1^-, \dots, v_N^-\}$ e $\{v_1^+, \dots, v_N^+\}$ soddisfino la Definizione 4.5.1. Chiameremo C^- e C^+ i coni corrispondenti.

Osserviamo che è sufficiente provare (4.24) per ogni punto di Lebesgue di u . Infatti dato che i punti di Lebesgue di u sono densi in \mathbb{R}^N si ha che per ogni

$y \in \mathbb{R}^N$ esiste una successione di punti di Lebesgue $\{y_k\}$ tali che $y_k \rightarrow y$. Per ipotesi abbiamo quindi che si può estrarre una sottosuccessione $\{y_{k_i}\}$ tale che $\nu(y_{k_i} + C^+) = 0$ o $\nu(y_{k_i} + C^-) = 0$ per qualsiasi $i \in \mathbb{N}$. Per semplicità di notazione chiamiamo la sottosuccessione $\{y_{k_i}\}$ come la successione di partenza. Supponiamo di essere nel primo caso e consideriamo la successione di insiemi $\{E_k\} = \{(y_k + C^+) \cap (y + C^+)\}_k$. Si osserva facilmente che $\{E_k\}$ è una successione crescente di aperti tale che $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = y + C^+$. Dato che ν è una misura di Radon si ha quindi

$$\nu(y + C^+) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu((y_k + C^+) \cap (y + C^+)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(y_k + C^+) = 0.$$

Nel secondo caso il ragionamento è analogo.

Possiamo quindi considerare $y \in \mathbb{R}^N$ punto di Lebesgue di u . Assumiamo inoltre che $u(y) > v_1^+$. Osserviamo per un ragionamento analogo a quello del passo 1 del Lemma 4.2.1 che esiste C costante indipendente da $x \in \mathbb{R}^N$ tale che

$$|\chi(v_1^+, u(x)) - \chi(v_1^+, u(y))| \leq C|u(x) - u(y)| \quad \text{per a.e. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Perciò dato che y è un punto di Lebesgue di u si ha che y è anche un punto di Lebesgue di $\chi(v_1^+, u(\cdot))$. Inoltre per definizione $\chi(v_1^+, u(y)) = 1$.

$\chi(v_1^+, u(\cdot))$ è monotona crescente nella direzione $\frac{a(v_1^+)}{h(v_1^+)}$, infatti per definizione di split state si ha

$$\frac{a(v_1^+)}{h(v_1^+)} \cdot \nabla_x (\chi(v_1^+, u(x))) = \nu, \quad (4.25)$$

con ν misura non-negativa.

Perciò dato che $\chi(v_1^+, u(\cdot)) \leq 1$ si ha anche che

$$\forall y_1 \in y + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1^+)}{h(v_1^+)} \quad \chi(v_1^+, u(y_1)) = 1. \quad (4.26)$$

Inoltre $\forall y_1 \in y + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1^+)}{h(v_1^+)}$ esiste una costante C tale che

$$|\chi(v_1^+, u(y_1)) - \chi(v_1^+, u(x))| = |\chi(v_1^+, u(y)) - \chi(v_1^+, u(x))| \leq C|u(y) - u(x)|$$

per a.e. $x \in \mathbb{R}^N$. Da cui segue che

$$\forall y_1 \in y + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1^+)}{h(v_1^+)} \quad y_1 \text{ è un punto di Lebesgue di } \chi(v_1^+, u(\cdot)). \quad (4.27)$$

Osserviamo ora che dato che $v_2^+ \leq v_1^+$ si ha $1 \geq \chi(v_2^+, u(\cdot)) \geq \chi(v_1^+, u(\cdot))$. Perciò da (4.26) si ha

$$\forall y_1 \in y + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1^+)}{h(v_1^+)} \quad \chi(v_2^+, u(y_1)) = 1 \quad (4.28)$$

e che

$$\forall y_1 \in y + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1^+)}{h(v_1^+)} \quad y_1 \text{ è un punto di Lebesgue di } \chi(v_2^+, u(\cdot)). \quad (4.29)$$

Possiamo quindi ripetere i ragionamenti fatti precedentemente con y_1 al posto di y e v_2^+ al posto di v_1^+ ottenendo che

$$\forall y_2 \in y_1 + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_2^+)}{h(v_2^+)} \quad \chi(v_2^+, u(y_2)) = 1 \quad (4.30)$$

e che

$$\forall y_2 \in y_1 + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_2^+)}{h(v_2^+)} \quad y_2 \text{ è un punto di Lebesgue di } \chi(v_2^+, u(\cdot)). \quad (4.31)$$

Inoltre dato che $y_1 \in \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1^+)}{h(v_1^+)}$ era arbitrario possiamo dire che la (4.30) e la (4.31) valgono per qualsiasi $y_2 \in \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1^+)}{h(v_1^+)} + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_2^+)}{h(v_2^+)}$.

Ripetendo questo ragionamento N volte otteniamo che

$$\forall y_N \in y + C^+ \quad \chi(v_N^+, u(y_N)) = 1 \quad (4.32)$$

e che

$$\forall y_N \in y + C^+ \quad y_N \text{ è un punto di Lebesgue di } \chi(v_N^+, u(\cdot)). \quad (4.33)$$

Riscriviamo ora la (4.25) con v_N^+ al posto di v :

$$\frac{a(v_N^+)}{h(v_N^+)} \nabla_x (\chi(v_N^+, u(x))) = \nu \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Proviamo che il supporto di ν è contenuto in $\mathbb{R}^N \setminus (y + C^+)$. Infatti dato $y_N \in y + C^+$ esiste un intorno W di y_N contenuto in $y + C^+$, poichè $y + C^+$ è aperto. Si ha quindi che $\chi(v_N^+, u(x)) = 1$ per a.e. $x \in W$, da cui segue che

$$\nu = \frac{a(v_N^+)}{h(v_N^+)} \nabla_x (\chi(v_N^+, u(x))) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(W),$$

cioè come volevano $\nu(y + C^+) = 0$. Osserviamo che gli stessi ragionamenti li possiamo portar avanti se $u(y) < v_1^-$ utilizzando un argomento analogo per dimostrare che $\nu(y - C^-) = 0$.

PASSO 2

Si vuole ora dimostrare che esistono due grafici Lipschitz \mathcal{G}^+ e \mathcal{G}^- tali che $J_0 \subset \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-$, essendo J_0 il supporto di ν .

Consideriamo i due insiemi

$$\mathcal{A}^\pm := \{y \in \mathbb{R}^N : \nu(y \pm C^\pm) = 0\}. \quad (4.34)$$

Osserviamo che sono chiusi, perchè se prendiamo una successione $\{y_k\} \subset \mathcal{A}^\pm$ tale che $y_k \rightarrow y$ abbiamo che ripetendo ragionamenti analoghi a quelli del passo precedente

$$\nu(y + C^\pm) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu((y_k + C^\pm) \cap (y + C^\pm)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(y_k + C^\pm) = 0.$$

Dato che \mathcal{A}^\pm è il sopragrafico di una funzione Lipschitz si ha che $\mathcal{G}^\pm := \partial \mathcal{A}^\pm$ è il grafico di una funzione Lipschitz.

Dal passo 1 abbiamo

$$\mathbb{R}^N = \mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}^-. \quad (4.35)$$

Sia J_0 il supporto di ν , cioè

$$J_0 := \{x \in \mathbb{R}^N : \nu(B_r(x)) > 0 \text{ per qualsiasi } r > 0\}.$$

Proviamo che la parte interna $\mathring{\mathcal{A}}^\pm$ dei due insiemi soddisfa

$$\mathring{\mathcal{A}}^+ \cap J_0 = \mathring{\mathcal{A}}^- \cap J_0 = \emptyset. \quad (4.36)$$

Proviamo la tesi con \mathcal{A}^+ . Sia $x \in J_0$. Allora $\nu(B_r(x)) > 0$ per ogni $r > 0$. Supponiamo per assurdo che $x \in \mathring{\mathcal{A}}^+$, allora esiste \bar{r} tale che $B_{\bar{r}}(x) \subset \mathcal{A}^+$. Di conseguenza esiste $y \in B_{\bar{r}}(x)$ tale che $y + C^+ \supset x + C^+$ e $\tilde{r} > 0$ tale che

$$0 = \nu(y + C^+) \geq \nu(B_{\tilde{r}}(x)) > 0.$$

Assurdo.

Da (4.34) e (4.35) possiamo facilmente concludere come desiderato che

$$J_0 \subset \partial \mathcal{A}^+ \cup \partial \mathcal{A}^- = \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-.$$

PASSO 3

Definiamo nuovamente l'insieme di salto J come nella sezione precedente:

$$J := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} > 0 \right\}.$$

Proviamo che essendo (u, h, ν) uno split state si ha un bound uniforme per la \mathcal{H}^{N-1} -densità di ν , cioè esiste una costante c tale che

$$\nu(B_r(y)) \leq cr^{N-1} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, r > 0. \quad (4.37)$$

Fissiamo $v \in \mathbb{R}$ tale che $h(v) \neq 0$ e sia $y \in \mathbb{R}^N$. Consideriamo una successione di funzioni test non-negative φ_k a simmetria radiale e tali che $\varphi_k \rightarrow \mathbf{1}_{B_r(y)}$ puntualmente. Osserviamo che possiamo scegliere questa successione di funzioni in modo tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int |\nabla \varphi_k| = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r(y)). \quad (4.38)$$

Infatti (lavoriamo per semplicità con $y = 0$) possiamo definire le funzioni test come $\varphi_k = \mathbf{1}_{B_r(0)} * \eta_k$, dove η_k è una successione di mollificatori. Tali funzioni soddisfano le ipotesi e utilizzando le coordinate sferiche N-dimensionali si ha

$$\begin{aligned} \int |\nabla \varphi_k| dx &= \int |\mathbf{1}_{B_r(0)} * \nabla \eta_k| dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{[0, \pi]^{N-2}} \int_0^{2\pi} \left| \mathbf{1}_{[0, r]} * \frac{d}{d\rho} \tilde{\eta}_k \right| dV^N, \end{aligned}$$

dove $\tilde{\eta}_k$ sono una successione di mollificatori in dimensione 1 e ρ indica la variabile. Quindi si ha

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^+} \left| \mathbf{1}_{[0, r]} * \frac{d}{d\rho} \tilde{\eta}_k \right| \rho^{N-1} d\rho \int_{[0, \pi]^{N-2}} \int_0^{2\pi} dS^{N-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{d}{d\rho} (\mathbf{1}_{[0, r]} * \tilde{\eta}_k) \right| \rho^{N-1} d\rho \int_{[0, \pi]^{N-2}} \int_0^{2\pi} dS^{N-1}. \end{aligned}$$

Facendo tendere k a $+\infty$ si ha che $\tilde{\eta}_k \rightarrow \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ricordando che la delta di Dirac è l'elemento neutro della convoluzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si ha che la precedente diventa

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{d}{d\rho} \mathbf{1}_{[0, r]} \right| \rho^{N-1} d\rho \int_{[0, \pi]^{N-2}} \int_0^{2\pi} dS^{N-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \delta_r(\rho) \rho^{N-1} d\rho \int_{[0, \pi]^{N-2}} \int_0^{2\pi} dS^{N-1} \\ &= r^{N-1} \int_{[0, \pi]^{N-2}} \int_0^{2\pi} dS^{N-1} = \mathcal{H}^{N-1}(B_r(0)). \end{aligned}$$

Testiamo ora l'equazione cinetica (3.4) con φ_k ottenendo:

$$-\frac{a(v)}{h(v)} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \chi(v, u(x)) \cdot \nabla \varphi_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_k d\nu.$$

Passando alle norme e utilizzando (4.38) si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_k d\nu \right| &= \left| \frac{a(v)}{h(v)} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \chi(v, u(x)) \cdot \nabla \varphi_k(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{a(v)}{h(v)} \right| \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r(y)) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Passiamo ora al limite per $k \rightarrow +\infty$. Dato che $\varphi_k \rightarrow \mathbf{1}_{B_r(y)}$ puntualmente, per convergenza dominata si ha:

$$\nu(B_r(y)) \leq \left| \frac{a(v)}{h(v)} \right| \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r(y)),$$

che prova (4.37).

Evidentemente $J \subset J_0$ e per il passo 2 è contenuto nell'unione di due grafici Lipschitziani \mathcal{G}^+ e \mathcal{G}^- . Proviamo ora che $\nu = \nu \llcorner J_0$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Radon $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-)$. Utilizziamo un argomento di ricoprimento. Sia $A \subset J_0$, altrimenti non c'è nulla da dimostrare. Allora dato che $J_0 \subset (\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-)$ si ha per ipotesi che $\mathcal{H}^{N-1}(A) = 0$. Vogliamo dimostrare che $\nu(A) = 0$.

Dato che \mathcal{H}^{N-1} è una misura di Radon abbiamo che per qualsiasi $\epsilon > 0$ esiste $C \supset \supset A$ aperto in \mathbb{R}^N tale che $\mathcal{H}^{N-1}(C) - \mathcal{H}^{N-1}(A) \leq \epsilon$. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \{B_r(y) : y \in A, B_r(y) \subset C, r^{N-1} \leq c \mathcal{H}^{N-1}(C \cap B_r(x))\}.$$

Osserviamo che grazie a (A.6) \mathcal{F} è un ricoprimento di A che soddisfa la condizione

$$\sup\{\text{diam } B : B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Perciò possiamo applicare il teorema di ricoprimento di Vitali ottenendo che esiste una famiglia numerabile \mathcal{G} di palle disgiunte in \mathcal{F} tale che

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}$$

essendo \hat{B} la palla chiusa concentrica a B con raggio 5 volte il raggio di B . Per semplicità indicizziamo la sottofamiglia \mathcal{G} :

$$\mathcal{G} = \{B(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Con queste premesse, usando la stima (4.37) si ha:

$$\nu(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \nu(B(x_i, r_i)) \leq c_1 \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^{N-1} \leq c_2 \mathcal{H}^{N-1}(C) = c_2 \epsilon.$$

Da cui, per l'arbitrarietà di ϵ , si ha $\nu(A) = 0$, che è ciò che volevamo dimostrare.

Possiamo quindi applicare il teorema di Radon-Nikodym e scrivere ν come

$$\nu = g\mathcal{H}^{N-1}\llcorner(\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-), \quad (4.39)$$

dove la densità g è la funzione definita \mathcal{H}^{N-1} -a.e. in $\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-$ data da

$$g(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{\mathcal{H}^{N-1}((\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-) \cap B_r(y))},$$

per il Teorema A.3.2.

Dato che \mathcal{G}^\pm sono grafici di funzioni Lipschitz si ha che $\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-) < \infty$ e quindi per (A.6) possiamo affermare che per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-$

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}((\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-) \cap B_r(y))}{r^{N-1}} \in (0, +\infty).$$

Perciò dalla definizione di J in (3.9) si ha che $J = \{y \in \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^- : g(y) > 0\} \cup E$ con $\mathcal{H}^{N-1}(E) = 0$. Di conseguenza possiamo riscrivere la (4.39) come

$$\nu = g\mathcal{H}^{N-1}\llcorner J \quad \text{con } g > 0 \text{ in } J. \quad (4.40)$$

Infatti se consideriamo $x \in J \subset \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-$ e $x \notin \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-$ la tesi è banale. Se invece si prende $x \in (\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-) \setminus J$ allora per (4.39), dato che ν è positiva, si ottiene che $g(x) = 0$ per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $x \in (\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-) \setminus J$ e quindi, per definizione, le due misure sono entrambe nulle in $x \in (\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-) \setminus J$.

4.5.2 Blow-up in un iperpiano

In questa sezione realizzeremo un blow-up in corrispondenza di un punto generico $y \in J$. Per la sezione precedente esiste una funzione di Borel $g > 0$ definita \mathcal{H}^{N-1} -a.e. e un insieme J contenuto nell'unione di due grafici Lipschitziani \mathcal{G}^\pm tali che $\nu = g\mathcal{H}^{N-1}\llcorner J$.

PASSO 1

Nel primo passo di questa sezione proveremo che g è costante lungo J e che i versori normali relativi a \mathcal{G}^\pm (che chiameremo η^\pm) possono essere scelti in modo che siano costanti lungo J .

Sia $\mathcal{G}_d^\pm \subset \mathcal{G}^\pm$ l'insieme definito come:

$$\mathcal{G}_d^\pm = \{(x, f^\pm(x)) : x \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ e } f^\pm \text{ sia differenziabile in } x\},$$

essendo $f^\pm : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione Lipschitziana il cui grafico è \mathcal{G}^\pm .

Per il teorema di Rademacher abbiamo perciò

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{G}^\pm \setminus \mathcal{G}_d^\pm) = 0. \quad (4.41)$$

Per il passo 2 della Sezione 4.5.1 possiamo costruire un funzione Borel misurabile $\alpha : J_0 \rightarrow \{\pm\}$ tale che

$$y \in \mathcal{G}^{\alpha(y)} \quad \forall y \in J_0.$$

Denotiamo con $J_* \subset J$ l'insieme dei punti di Lebesgue di g e di α . Per il teorema di differenziazione di Lebesgue con la misura di Radon positiva \mathcal{H}^{N-1} abbiamo

$$\mathcal{H}^{N-1}(J \setminus J_*) = 0. \quad (4.42)$$

Proviamo che per qualsiasi $y \in (\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-) \cap J_*$ si ha

$$\nu^{y,r} \xrightarrow{*} g(y) \mathcal{H}^{N-1}[\{\eta^{\alpha(y)}(y) \cdot x = 0\}]. \quad (4.43)$$

Poniamo $H_y = \{x \in \mathbb{R}^N : \eta^{\alpha(y)}(y) \cdot x = 0\}$ un fascio di iperpiani al variare di $y \in (\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-) \cap J_*$.

Sia $y \in (\mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-) \cap J_*$ tale che $\alpha(y) = +$. Dato che \mathcal{G}^+ è un grafico Lipschitz si ha che

$$\mathbf{1}_{\frac{\mathcal{G}^+ - y}{r}} \rightarrow \mathbf{1}_{H_y} \quad \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e.},$$

e analogamente se $\alpha(y) = -$

$$\mathbf{1}_{\frac{\mathcal{G}^- - y}{r}} \rightarrow \mathbf{1}_{H_y} \quad \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e.}$$

Da cui dato che $J \subset \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-$ la stessa proprietà vale per J , cioè

$$\mathbf{1}_{\frac{J - y}{r}} \rightarrow \mathbf{1}_{H_y} \quad \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e.}$$

Possiamo provare ora la (4.43). Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ una funzione test e sia $y \in \mathcal{G}^+ \cap J_*$. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\nu^{y,r} &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \left(\frac{x - y}{r} \right) \, d\nu = \frac{1}{r^{N-1}} \int_J \varphi \left(\frac{x - y}{r} \right) g(x) \, d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{\frac{J - y}{r}} \varphi(x) g(y + rx) \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) g(y + rx) \mathbf{1}_{\frac{J - y}{r}} \, d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned}$$

Dato che

$$g(y + rx)\mathbf{1}_{\frac{J-y}{r}} \rightarrow g(y)\mathbf{1}_{H_y} \quad \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e.}$$

si ottiene (4.43) passando al limite per convergenza dominata.

Fissiamo $y \in J$ tale che valga (4.43). Allora si ha che per la Definizione 3.3.4 che $T^{N-1}(y, \nu)$ è formato da un solo elemento:

$$\nu^\infty := g(y)\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \{\eta^{\alpha(y)}(y) \cdot x\}.$$

Perciò per qualsiasi $u^\infty \in B^\infty(y)$ si ha che $(u^\infty, h, \nu^\infty)$ è uno split state per la Proposizione 5.1.1. Inoltre per quanto abbiamo appena dimostrato la misura ν^∞ ha supporto in un iperpiano. Possiamo perciò applicare i risultati della Sezione 4.3 e affermare che

$$u^\infty = \begin{cases} u^+ := \sup\{v : h(v) \neq 0\} & \text{in } \{\eta^{\alpha(y)}(y) \cdot x > 0\}, \\ u^- := \sup\{v : h(v) \neq 0\} & \text{in } \{\eta^{\alpha(y)}(y) \cdot x < 0\}, \end{cases} \quad (4.44)$$

e che

$$g(y)h(v) = a(v) \cdot \eta^{\alpha(y)}(y)(\chi(v, u^+) - \chi(v, u^-)) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (4.45)$$

(a meno del segno di $\eta^{\alpha(y)}(y)$). Ora, dato che il flusso è non-degenere, esistono $v_1, \dots, v_n \in (u^-, u^+]$ tali che $a(v_1), \dots, a(v_n)$ sia una base di \mathbb{R}^N . Per la (4.45) si ha che $\eta^{\alpha(y)}(y)/g(y)$ è l'intersezione di N iperpiani distinti:

$$\{a(v_i) \cdot x = h(v_i)\} \quad \text{per } i = 1 \dots N.$$

Perciò risulta evidente che $\eta^{\alpha(y)}(y)$ e g sono univocamente determinati da h , dato che $g > 0$ e $|\eta^{\alpha(y)}(y)| = 1$.

Infine ritornando alla (4.44) si ha che anche u^+ e u^- sono univocamente determinati da h .

PASSO 2

In questo passo mostreremo che J è contenuto in solo uno dei due grafici Lipschitz \mathcal{G}^\pm che chiameremo \mathcal{G} .

Sia u^+ definito come in (4.44). Come nel passo 1 della Sezione 4.5.1 esistono $v_1^-, \dots, v_N^-, v_1^+, \dots, v_N^+ \in I$ tali che

$$v_N^- > \dots > v_1^- > v_1^+ > \dots > v_N^+ > 0$$

e che i due insiemi $\{v_1^-, \dots, v_N^-\}$ e $\{v_1^+, \dots, v_N^+\}$ soddisfino le ipotesi della Definizione 4.5.1. Chiameremo C^- e C^+ i corrispondenti coni generati secondo la Definizione 4.5.1.

Si ha perciò che $u^+ \geq v_1^- > v_1^+$. Vogliamo quindi dimostrare che

$$\forall y \in (\mathcal{G}_d^+ \cup \mathcal{G}_d^-) \cap J_*, \quad \nu(y + C^+) = 0. \quad (4.46)$$

Per la Proposizione 3.3.3 si ha che per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in \mathbb{R}^N$, $\{u^{y,r}\}_{r \downarrow 0}$ è fortemente precompatto in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, cioè dato $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto, esiste una successione $r_k \downarrow 0$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_K |u(y + r_k x) - u^\infty(y)| dx = 0.$$

Osserviamo inoltre che

$$\int_{B_1(0)} |u(y + r_k x) - u^\infty(y)| dx = \frac{1}{r_k^N} \int_{B_{r_k}(y)} |u(z) - u^\infty(y)| dz.$$

Sia ora $B_{r_k}^+(y)$ la semisfera determinata dal versore $\eta^{\alpha(y)}(y)$ e $B_{r_k}^-(y)$ l'altra metà, allora per la definizione di u^+ e u^- si ha che possiamo spezzare l'interale precedente come

$$\frac{1}{r_k^N} \left(\int_{B_{r_k}^+(y)} |u(z) - u^+(y)| dz + \int_{B_{r_k}^-(y)} |u(z) - u^-(y)| dz \right).$$

Perciò si ha che per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in (\mathcal{G}_d^+ \cup \mathcal{G}_d^-) \cap J_*$

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^N} \left(\int_{B_r^+(y)} |u(z) - u^+(y)| dz + \int_{B_r^-(y)} |u(z) - u^-(y)| dz \right) = 0.$$

Osserviamo ora che $u^+ > v_1^+$. Dato che l'insieme dei punti di Lebesgue di u è denso in \mathbb{R}^N si ha che esiste una successione $y_k \rightarrow y$ tale che $y_k \in H^+ \forall k \in \mathbb{N}$, intendendo con H^+ l'iperpiano determinato dal versore η^+ . Perciò essendo

$$u(y_k) - v_1^+ = u(y_k) - u^+ + u^+ - v_1^+ \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.47)$$

vogliamo dimostrare che $|u(y_k) - u^+| \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$. Per far ciò stimiamo $|u(y_k) - u^+|$ nel modo che segue:

$$|u(y_k) - u^+| \leq |u(y_k) - u(y + rx)| + |u(y + rx) - u^+| \quad \text{per a.e. } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall r > 0.$$

Dato che y è un punto di Lebesgue di u si ha che a meno di sottosuccessioni $|u(y) - u(y + rx)| \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$ per a.e. $x \in \mathbb{R}^N$. Perciò dato che $y_k \rightarrow y$

abbiamo dimostrato la tesi, cioè $|u(y_k) - u^+| \rightarrow 0$. Di conseguenza ritornando alla (4.47) abbiamo che $u(y_k) > v_1^+$ per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$.

Utilizziamo quindi lo stesso argomento del passo 1 della Sezione 4.5.1 per ottenere che $\nu(y_k + C^+) = 0$. Passando poi al limite per $k \rightarrow \infty$ abbiamo dimostrato la (4.46).

Abbiamo già osservato che $\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{G}^\pm \setminus \mathcal{G}_d^\pm) = 0$ e che $\mathcal{H}^{N-1}(J \setminus J_*) = 0$. Di conseguenza $\mathcal{H}^{N-1}(J \setminus ((\mathcal{G}_d^+ \cup \mathcal{G}_d^-) \cap J_*)) = 0$ e quindi $(\mathcal{G}_d^+ \cup \mathcal{G}_d^-) \cap J_*$ è denso in J . Perciò possiamo riscrivere la (4.46) come

$$\forall y \in J, \quad \nu(y + C^+) = 0. \quad (4.48)$$

Per la definizione di \mathcal{A}^+ si ha subito che $J \subset \mathcal{A}^+$. Inoltre da (4.36) abbiamo $J \cap \dot{\mathcal{A}}^+ \subset J_0 \cap \dot{\mathcal{A}}^+ = \emptyset$. Di conseguenza $J \subset \partial \mathcal{A}^+ = \mathcal{G}^+ = \mathcal{G}$.

4.5.3 Rettificabilità di ∂J

In questa sezione proveremo che a meno di un insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile, J è contenuto in un insieme al più numerabile di iperpiani Π_k perpendicolari a η . Inoltre ogni $J \cap \Pi_k$ è intersezione di $2N$ sopragrafici Lipschitziani di dimensione $N - 1$.

Prima di tutto diamo alcune definizioni:

Definizione 4.5.2 (Wedge) *Siamo v_1, \dots, v_N tali che $h(v_1), \dots, h(v_N) \neq 0$ e tali che $a(v_1), \dots, a(v_N)$ siano una base di \mathbb{R}^N . Chiameremo l'insieme aperto*

$$W := \mathbb{R} \frac{a(v_1)}{h(v_1)} + \dots + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_N)}{h(v_N)},$$

il wedge con asse $\frac{a(v_1)}{h(v_1)}$ generato lungo le $(N - 1)$ direzioni caratteristiche

$$\frac{a(v_2)}{h(v_2)}, \dots, \frac{a(v_N)}{h(v_N)}.$$

Dividiamo la dimostrazione in passi:

- Nel passo 1 dimostreremo che esistono $2N$ wedge $W^{1,\pm}, \dots, W^{N,\pm}$ nel senso della Definizione 4.5.2 con la seguente proprietà

$$\forall y \in \overline{\mathcal{G}_d} \setminus J \quad \exists j \in \{1, \dots, N\} \quad \begin{aligned} \nu(y + W^{j,+}) &= 0 \\ \nu(y - W^{j,-}) &= 0. \end{aligned} \quad \circ \quad (4.49)$$

- Nel passo 2 costruiremo un insieme \tilde{J} aperto rispetto a \mathcal{G} e differisce da J per un insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile e tale che

$$\forall y \in \mathcal{G} \setminus \tilde{J} \quad \exists j \in \{1, \dots, N\} \quad \begin{aligned} \tilde{J} \cap (y + W^{y,+}) &= \emptyset \\ \tilde{J} \cap (y - W^{y,-}) &= \emptyset. \end{aligned} \quad \circ \quad (4.50)$$

- Nel passo 3 mostreremo che esiste un insieme al più numerabile di numeri $\{e_k\}_k$ tali che

$$\tilde{J} = \bigcup_k \tilde{J}_k, \quad \text{dove } \tilde{J}_k := \tilde{J} \cap \Pi_k, \quad \Pi_k := \{\eta \cdot x = e_k\}$$

e che il suo vettore normale e proprio η definito nel passo 1 della Sezione 4.5.1. Inoltre $\forall k \in \mathbb{N}$

- \tilde{J}_k è aperto rispetto a Π_k ,
- \tilde{J}_K è l'intersezione di $2N$ sopragrafici Lipschitz $\mathcal{A}_k^{1,\pm}, \dots, \mathcal{A}_k^{N,\pm}$ di dimensione $(N-1)$.

Da cui segue che \tilde{J}_k ha perimetro localmente finito rispetto a Π_k .

PASSO 1

Dato che i wedges che abbiamo definito sono aperti e ν è una misura di Radon è sufficiente provare la (4.49) per qualsiasi $y \in \mathcal{G}_d \setminus J$. Sia C il cono rispetto al quale \mathcal{G} è un grafico Lipschitz e siano $v_1, \dots, v_N \in (u^-, u^+]$ tali che $h(v_1), \dots, h(v_N) \neq 0$, $a(v_1), \dots, a(v_N)$ siano linearmente indipendenti e che

$$C := \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{h(v_1)} + \dots + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_N)}{h(v_N)}.$$

Dato che $y \in \mathcal{G}_d$, y è un punto in cui la funzione Lipschitziana che genera il grafico è derivabile, perciò esiste un iperpiano Π_y contenente l'origine e tale che $y + \Pi_y$ sia tangente a \mathcal{G} in y . Dato che $a(v_1), \dots, a(v_N)$ sono linearmente indipendenti, sicuramente uno di essi non appartiene a Π_y , perciò esiste $j \in \{1, \dots, N\}$ tale che $a(v_j) \notin \Pi_y$.

Fissiamo questo v_j . Dato che il flusso è non-degenere esistono $2(N - 1)$ numeri tali che

$$w_N^{j,-} > \dots > w_2^{j,-} > v_j > w_2^{j,+} > \dots > w_N^{j,+}$$

e tali che gli insiemi $\{v_j, w_2^{j,+}, \dots, w_N^{j,+}\}$ soddisfino le condizioni della Definizione 4.5.2. Chiameremo quindi $W^{j,+}$ e $W^{j,-}$ i corrispondenti wedges generati secondo la Definizione 4.5.2. Proviamo che i $2N$ wedges che abbiamo definito sono proprio quelli che stiamo cercando.

Sia $y \in \mathcal{G}_d$, dato che $a(v_j) \notin \Pi_y$ la retta caratteristica $l := y + \mathbb{R} \frac{a(v_j)}{h(v_j)}$ interseca \mathcal{G} solo in y .

Supponiamo che $y \notin J_0$. Allora per qualsiasi $z \in l$, $z \notin J_0$. Da (3.4), dato che l è una retta caratteristica, si ha che $\chi(v_j, u(\cdot))$ è costante lungo l . Supponiamo per esempio che sia identicamente uguale a 1 (altrimenti il ragionamento è analogo considerando le direzioni caratteristiche indicizzate con il -), il che vuol dire che $u > v_j$ identicamente. Possiamo perciò utilizzare lo stesso argomento del passo 1 della Sezione 4.5.1 per ogni punto di l , dicendo che il cono generato dalle direzioni caratteristiche

$$\frac{a(v_j)}{h(v_j)}, \frac{a(w_2^{j,+})}{h(w_2^{j,+})}, \dots, \frac{a(w_N^{j,+})}{h(w_N^{j,+})}$$

e con vertice in ciascun punto di l è esterno al supporto di ν . Perciò anche il wedge con asse $\frac{a(v_j)}{h(v_j)}$ e generato dalle direzioni $\frac{a(w_2^{j,+})}{h(w_2^{j,+})}, \dots, \frac{a(w_N^{j,+})}{h(w_N^{j,+})}$ è esterno al supporto di ν .

In realtà nel nostro caso $y \notin J$ e quindi la dimostrazione risulta più delicata. Fissiamo j e consideriamo un sistema di coordinate ortonormali tali che il vettore $\frac{a(v_j)}{h(v_j)}$ abbia come coordinate $(1, 0, \dots, 0)$. Per semplicità indicheremo con x' il vettore (x_2, \dots, x_N) . Dato che $a(v_j) \notin \Pi_y$ esiste un cono a due falde con asse $a(v_j)$ che non interseca l'iperpiano, cioè esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\Pi_y \cap \{|x'| < \alpha|x_1|\} = \emptyset. \quad (4.51)$$

Dato che $y \in \mathcal{G}_d$, y è un punto in cui la funzione che determina il grafico \mathcal{G} è differenziabile e il piano tangente in quel punto è Π_y , perciò esiste r_0 tale che

$$\mathcal{G} \cap \left(y + (\{|x'| < \alpha|x_1|\} \cap B_{r_0}(0)) \right) = \emptyset. \quad (4.52)$$

Inoltre, dato che $\frac{a(v_j)}{h(v_j)}$ è una delle direzioni caratteristiche del cono C che genera \mathcal{G} , posso prolungare il cono in quella direzione. Perciò definendo

l'insieme

$$S := \{|x'| < \alpha|x_1|\} \cap \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}r_0 \right\}$$

si ottiene da (4.52) che

$$\mathcal{G} \cap (y + S) = \emptyset. \quad (4.53)$$

Dato che $\nu = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J$ e $J \subset \mathcal{G}$, si ha che ν si annulla su $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{G}$. Perciò dall'equazione cinetica (3.4) con $v = v_j$ si deduce che $\chi(v_j, u(\cdot))$ è costante nella direzione x_1 (cioè la direzione $a(v_j)$ nel nuovo sistema di coordinate) nei due insiemi

$$\left(y + \left(\{|x'| < \alpha x_1\} \cap \{|x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}r_0\} \right) \right)$$

e

$$\left(y + \left(\{|x'| < -\alpha x_1\} \cap \{|x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}r_0\} \right) \right).$$

Inoltre sempre grazie a (3.4), dato che ν è una misura di Radon positiva, sappiamo che $\chi(v_j, u(\cdot))$ è monotona non-decrescente nella direzione x_1 .

Consideriamo ora l'insieme

$$B := \left(-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}r, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}r \right) \times \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}r \right\}.$$

Osserviamo che $B \subset B_r(0)$ infatti dato $x \in B$ si ha

$$|x| < \sqrt{\frac{r^2}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2 r^2}{1+\alpha^2}} = r.$$

Definiamo ora due insiemi rappresentati in Figura 4.2:

$$T^+ := \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{r}{2}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}r \right) \times \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}r \right\}$$

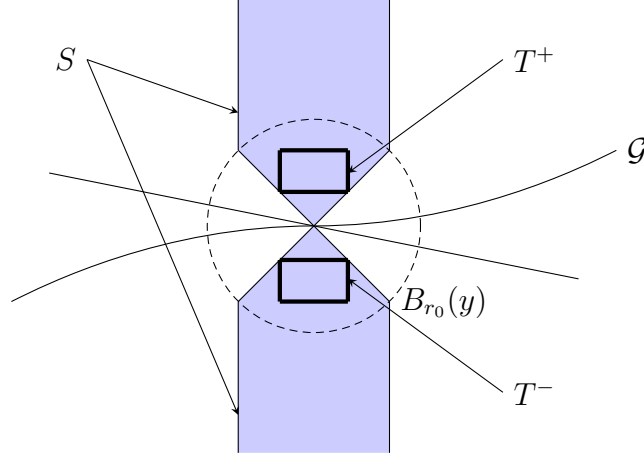
e

$$T^- := \left(-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}r, -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{r}{2} \right) \times \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}r \right\}.$$

Integriamo l'equazione cinetica (3.4) su $y + (T^+ \cup T^-)$ ottenendo

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a(v_j)}{h(v_j)} \right| \int_{\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{r}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}r} \int_{|x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{r}{2}} (\chi(v_j, u(y_1 + x_1, y' + x'))) \\ & - \chi \left(v_j, u \left(y_1 + x_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{3r}{2}, y' + x' \right) \right) dx' dx_1 \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} r \nu(B_r(y)). \end{aligned}$$

Figura 4.2:



Dato che $y \notin J$, per definizione di J si ha

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^N} \int_{\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} r} \int_{|x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r}{2}} \left| \chi(v_j, u(y_1 + x_1, y' + x')) - \chi\left(v_j, u\left(y_1 + x_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{3r}{2}, y' + x'\right)\right) \right| dx' dx_1 = 0.$$

Osserviamo ora che $\chi(v_j, u(\cdot)) \in \{0, 1\}$, perciò l'integrando può assumere solo valore 0 e 1. Perciò per r sufficientemente piccolo deve annullarsi su un insieme di misura positiva.

Sia \bar{r} tale che questo sia verificato e consideriamo $\{r_k\} \in (0, \min\{r_0, \bar{r}\})$ una successione tale che $r_k \rightarrow 0$. Dato che l'insieme dei punti Lebesgue di $\chi(v_j, u(\cdot))$ è denso in \mathbb{R}^N si ha che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste y_k^+ punto di Lebesgue di $\chi(v_j, u(\cdot))$ tale che

$$y_k^+ \in \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} r_k \right) \times \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2} \right\}. \quad (4.54)$$

Definendo

$$y_k^- := y_k^+ - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{3r}{2} x_1$$

abbiamo quindi che

$$y_k^- \in \left(-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} r_k, -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2} \right) \times \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2} \right\}. \quad (4.55)$$

Vogliamo ora provare y_k^- è un punto di Lebesgue per $\chi(v_j, u(\cdot))$ ed ha lo stesso valore di y_k^+ . Infatti per qualsiasi $s > 0$ tale che

$$B_s(y_k^+) \subset \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} r_k \right) \times \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2} \right\}$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{B_s(y_k^+)} \chi(v_j, u(x_1, x')) dx &= \int_{B_s(y_k^+)} \chi(v_j, u(x_1, x')) \\ &\quad - \chi \left(v_j, u \left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{3r_k}{2}, x' \right) \right) dx \\ &\quad + \int_{B_s(y_k^+)} \chi \left(v_j, u \left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{3r_k}{2}, x' \right) \right) dx \\ &= \int_{B_s(y_k^-)} \chi(v_j, u(x_1, x')) dx. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} r_k \right) \times \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2} \right\} \\ &\subset \{ |x'| < +\alpha x_1 \} \cap \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_0}{2} \right\} \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} r_k, -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2} \right) \times \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_k}{2} \right\} \\ &\subset \{ |x'| < -\alpha x_1 \} \cap \left\{ |x'| < \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{r_0}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Perciò

le semirette $y_k^+ + \mathbb{R}_+ \left(\frac{a(v_j)}{h(v_j)} \right)$ e $y_k^- - \mathbb{R}_+ \left(\frac{a(v_j)}{h(v_j)} \right)$ sono formate da punti di Lebesgue di $\chi(v_j, u(\cdot))$ aventi lo stesso valore.

Distinguiamo ora i due casi in cui il valore costante nei punti di Lebesgue (che ovviamente dipende da k) sia 0 o 1. Supponiamo inizialmente che sia 1. Ragioniamo in maniera analoga al passo 1 della Sezione 4.5.1, utilizzando

il cono generato dalle direzioni caratteristiche $\frac{a(v_j)}{h(v_j)}, \frac{a(w_2^{j,+})}{h(w_2^{j,+})}, \dots, \frac{a(w_N^{j,+})}{h(w_N^{j,+})}$, che chiameremo $C^{j,+}$. Si ottiene perciò

$$\nu \left(y_k^+ + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_j)}{h(v_j)} + C^{j,+} \right) = \nu \left(y_k^- - \mathbb{R}_+ \frac{a(v_j)}{h(v_j)} + C^{j,+} \right) = 0.$$

Analogamente se il valore comune è 0 consideriamo il cono $C^{j,-}$ generato dalle direzioni caratteristiche $\frac{a(v_j)}{h(v_j)}, \frac{a(w_2^{j,-})}{h(w_2^{j,-})}, \dots, \frac{a(w_N^{j,-})}{h(w_N^{j,-})}$ ed applicando un argomento analogo otteniamo

$$\nu \left(y_k^+ + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_j)}{h(v_j)} + C^{j,-} \right) = \nu \left(y_k^- - \mathbb{R}_+ \frac{a(v_j)}{h(v_j)} + C^{j,-} \right) = 0.$$

Evidentemente esiste un numero infinito di $k \in \mathbb{N}$ tale che il valore costante nei punti di Lebesgue sia uguale a 1, oppure a 0. Supponiamo senza ledere la generalità che tale valore sia 1, in caso contrario l'argomentazione è la stessa usando il cono $C^{j,-}$ al posto di $C^{j,+}$. E' possibile quindi estrarre una sottosuccessione con questa proprietà (per semplicità di notazione la chiameremo $\{y_k\}$).

Per la (4.54) e la (4.55) entrambe le successioni $\{y_k^+\}$ e $\{y_k^-\}$ convergono a y . Dato che ν è una misura di Radon si ottiene facendo tendere k a $+\infty$

$$\nu \left(y + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_j)}{h(v_j)} + C^{j,+} \right) = \nu \left(y - \mathbb{R}_+ \frac{a(v_j)}{h(v_j)} + C^{j,+} \right) = 0.$$

Per la Definizione (4.5.2) abbiamo

$$\left(\mathbb{R}_+ \frac{a(v_j)}{h(v_j)} + C^{j,+} \right) \cup \left(\mathbb{R}_- \frac{a(v_j)}{h(v_j)} + C^{j,+} \right) = W^{j,+}$$

e quindi otteniamo quello che volevamo dimostrare:

$$\nu(y + W^{j,+}) = 0.$$

PASSO 2

Definiamo l'insieme \tilde{J} di cui vogliamo provare l'esistenza come segue:

$$\tilde{J} := \mathcal{G} \setminus \overline{(\mathcal{G}_d \setminus J)}. \quad (4.56)$$

Per costruzione \tilde{J} è aperto rispetto a \mathcal{G} . Dimostriamo che differisce da J per un insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile. Proveremo che

$$\mathcal{H}^{N-1}(\tilde{J} \setminus J) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^{N-1}(J \setminus \tilde{J}) = 0.$$

Iniziamo a dimostrare la prima disuguaglianza.

Osserviamo che $\tilde{J} \subset \mathcal{G} \setminus (\mathcal{G}_d \setminus J) = J \cup (\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d)$, da cui si ha che $\tilde{J} \setminus J \subset \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d$ e quindi per il Teorema di Rademacher.

$$\mathcal{H}^{N-1}(\tilde{J} \setminus J) \leq \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d) = 0.$$

Proviamo ora la disuguaglianza opposta. Osserviamo innanzitutto che

$$J \setminus \tilde{J} = J \cap \overline{\mathcal{G}_d \setminus J}. \quad (4.57)$$

Perciò dato che

$$J \cap \overline{\mathcal{G}_d \setminus J} \subset (J \setminus J_*) \cup (\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d) \cap (J_* \cap \mathcal{G}_d \cap \overline{\mathcal{G}_d \setminus J})$$

si ha anche

$$J \setminus \tilde{J} \subset (J \setminus J_*) \cup (\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d) \cap (J_* \cap \mathcal{G}_d \cap \overline{\mathcal{G}_d \setminus J}).$$

Vogliamo dimostrare che

$$J_* \cap \mathcal{G}_d \cap \overline{\mathcal{G}_d \setminus J} = \emptyset. \quad (4.58)$$

Sia $y \in J_* \cap \mathcal{G}_d$. Dal passo 1 della Sezione 4.5.2 sappiamo che l'unico elemento di $T^{N-1}(y, \nu)$ è dato da

$$\nu^\infty = g \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \{\eta \cdot x = 0\}. \quad (4.59)$$

Per il passo precedente si ha che per qualsiasi $y \in \overline{\mathcal{G}_d \setminus J}$ esiste $j \in \{1, \dots, N\}$ tale che $\nu(y + W^{j,+}) = 0$ oppure $\nu(y + W^{j,-}) = 0$. Supponiamo ad esempio che sia vera la prima, cioè che $\nu(y + W^{j,+}) = 0$. Vogliamo provare che anche $\nu^\infty(W^{j,+})$.

Osserviamo che $W^{j,+}$ è invariante per omotetie, cioè che $W^{j,+} = rW^{j,+}$ per qualsiasi $r > 0$, perciò

$$\nu^{y,r}(W^{j,+}) = \frac{1}{r^{N-1}} \nu(y + rW^{j,+}) = \frac{1}{r^{N-1}} \nu(y + W^{j,+}) = 0 \quad \forall r > 0.$$

Perciò passando al limite per $r \rightarrow 0$ (cioè per una qualsiasi delle sottosuccessioni tali che questo limite esiste) si ha

$$\nu^\infty(y + W^{j,+}) = 0 \quad \forall \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu). \quad (4.60)$$

Indichiamo con $\frac{a(v_j)}{h(v_j)}$ l'asse del wedge $W^{j,+}$. Per definizione $h(v_j) \neq 0$ e quindi per (4.45) si ha che $\frac{a(v_j)}{h(v_j)} \cdot \eta = g > 0$. Di conseguenza l'asse del wedge

non appartiene al piano $\{\eta \cdot x = 0\}$ e quindi l'intersezione fra il wedge e l'iperpiano è un insieme di misura di Hausdorff \mathcal{H}^{N-1} strettamente positiva. Questo comporta che la (4.59) e la (4.60) non possono essere entrambe vere e quindi che $J_* \cap \mathcal{G}_d \cap \overline{\mathcal{G}_d} \setminus \tilde{J} = \emptyset$. Possiamo perciò concludere che

$$\mathcal{H}^{N-1}(J \setminus \tilde{J}) \leq \mathcal{H}^{N-1}(J \setminus J_*) + \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d) = 0$$

e quindi come volevamo dimostrare che \tilde{J} differisce da J solo per un insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile.

Rimane ora da dimostrare (4.50). Sia $y \in \mathcal{G} \setminus \tilde{J}$. Per come abbiamo definito \tilde{J} abbiamo che $y \in \overline{\mathcal{G}_d} \setminus \tilde{J}$ e perciò dal passo 1 esiste $j \in \{1, \dots, N\}$ tale che $\nu(y + W^{j,+}) = 0$ (se $\nu(y + W^{j,-}) = 0$ si può ragionare in maniera analoga). Dalla Sezione 4.5.1 abbiamo che $\nu = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J$ con $g > 0$, quindi dato che J e \tilde{J} differiscono per un insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile si ha

$$g\mathcal{H}^{N-1}(\tilde{J} \cap (y + W^{j,+})) = 0.$$

Inoltre dalla Sezione 4.5.2 sappiamo che g è costante su J , quindi la precedente diventa

$$\mathcal{H}^{N-1}(\tilde{J} \cap (y + W^{j,+})) = 0. \quad (4.61)$$

Osserviamo ora che per come sono definiti i due insiemi \tilde{J} e $y + W^{j,+}$ sono relativamente aperti rispetto a \mathcal{G} , perciò dalla (4.61) discende subito che $\tilde{J} \cap (y + W^{j,+}) = \emptyset$.

PASSO 3

Per costruzione \tilde{J} è aperto relativamente a \mathcal{G} . Possiamo ricoprirlo con la seguente famiglia di insiemi connessi e aperti (rispetto alla topologia indotta su \mathcal{G}):

$$\mathcal{F} := \{B_1(y) \cap \mathcal{G} : y \in \tilde{J}\}.$$

Per il teorema di Lindelof possiamo estrarre da \mathcal{F} un sottoricoprimento numerabile che chiameremo $\{\tilde{J}_k\}$. Dato che \tilde{J} differisce da J per un insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile, per la Sezione 4.5.2 abbiamo che la normale a \mathcal{G} è costante ed uguale ad η per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $x \in \tilde{J}_k$. Perciò per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$ esiste $e_k \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{J}_k \subset \Pi_k := \{\eta \cdot x = e_k\}$ a meno di un insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile. Se uniamo i \tilde{J}_k a cui è associato lo stesso e_k otteniamo un ricoprimento tale che $\tilde{J} \cap \Pi_k = \tilde{J}_k$. Cioè un ricoprimento di insiemi relativamente aperti rispetto a Π_k però non necessariamente connessi.

Mostriamo che \tilde{J}_k ha perimetro localmente finito rispetto all'iperpiano Π_k secondo la Definizione 1.2.1. Consideriamo gli insiemi

$$C^{j,\pm} := W^{j,\pm} \cap \{\eta \cdot x = 0\} \quad \text{per } j \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.62)$$

Nel passo 2 abbiamo osservato che l'asse del wedge $W^{j,\pm}$ non appartiene al piano $\{\eta \cdot x = 0\}$, perciò la loro intersezione $C^{j,\pm}$ è un cono aperto $(N-1)$ dimensionale. Sia $\partial\tilde{J}_k$ la frontiera di \tilde{J}_k rispetto a Π_k . Dato che \tilde{J}_k è aperto nella topologia indotta, si ha che $\partial\tilde{J}_k \subset (\mathcal{G} \setminus \tilde{J}_k) \cap \Pi_k$. Possiamo perciò applicare il risultato del passo 2 per affermare:

$$\forall y \in \partial\tilde{J}_k \quad \exists j \in \{1, \dots, N\} \quad \begin{aligned} \tilde{J}_k \cap (y + C^{j,+}) &= \emptyset \\ \tilde{J}_k \cap (y - C^{j,-}) &= \emptyset. \end{aligned} \quad \circ \quad (4.63)$$

Consideriamo quindi gli insiemi

$$\mathcal{A}_k^{j,\pm} := \{y \in \Pi_k : \tilde{J}_k \cap (y \pm C^{j,\pm}) = \emptyset\}.$$

Dato che $y + C^{j,\pm}$ sono coni aperti, $\mathcal{A}_k^{j,\pm}$ sono sopragrafici di funzioni Lipschitz di dimensione $N-1$ e quindi $\mathcal{G}_k^{j,\pm} := \partial\mathcal{A}_k^{j,\pm}$ sono grafici Lipschitz. Osserviamo ora che per (4.63) ogni $y \in \partial\tilde{J}_k$ è contenuto in almeno uno dei due insiemi $\mathcal{A}_k^{j,\pm}$. Inoltre per la definizione di $\mathcal{A}_k^{j,\pm}$ abbiamo anche che $\tilde{J}_k \cap \mathcal{A}_k^{j,\pm} = \emptyset$. Perciò dato che \tilde{J}_k è aperto

$$\partial\tilde{J}_k \subset \mathcal{G}_k^{1,+} \cup \dots \cup \mathcal{G}_k^{N,+} \cup \mathcal{G}_k^{1,-} \cup \dots \cup \mathcal{G}_k^{N,-}.$$

Quindi \tilde{J}_k ha perimetro localmente finito.

4.5.4 Blow-up in metà iperpiano

In questa sezione applicheremo il procedimento di blow-up in un punto $y \in \partial J := \bigcup_k \partial\tilde{J}_k$, dove $\partial\tilde{J}_k$ è la frontiera di \tilde{J}_k relativamente a Π_k . Useremo i risultati del capitolo precedente per caratterizzare i blow-up.

Nella Sezione 4.5.3 abbiamo dimostrato che \tilde{J}_k ha perimetro localmente finito, perciò esiste una normale ν_k nel senso degli insiemi di perimetro finito (vedi Teorema 1.2.1), che è proprio la densità di $D\mathbf{1}_{\tilde{J}_k}$ rispetto alla sua variazione totale.

Dividiamo la dimostrazione in 2 passi:

PASSO 1

In questo primo passo mostreremo che per \mathcal{H}^{N-2} -a.e. $y \in \partial\tilde{J}_k$

$$\nu^\infty = g\mathcal{H}^{N-1}[\{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}].$$

per qualsiasi $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$.

Concluderemo poi grazie al Lemma 4.4.1 che

$$\nu_k(y) \in C^* \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-2}\text{-a.e. } y \in \partial\tilde{J}_k$$

dove il cono convesso C^* dipende solo da h .

Fissiamo $k \in \mathbb{N}$. Nel passo 3 abbiamo dimostrato che $\tilde{J}_k \subset \Pi_k$ è un insieme di perimetro localmente finito in Π_k . Da questo momento identificheremo l'iperpiano con \mathbb{R}^{N-1} e avendo dimostrato che \tilde{J}_k è aperto in Π_k con la topologia indotta lavoreremo in \mathbb{R}^{N-1} anzichè in \mathbb{R}^N .

Osserviamo preliminarmente che, dato che la frontiera di \tilde{J}_k è Lipschitz, ripetendo gli stessi ragionamenti della Proposizione 1.2.8 abbiamo che $\partial\tilde{J}_k \subset \partial^*\tilde{J}_k$. Appliciamo ora il risultato del Teorema 1.2.7 all'insieme \tilde{J}_k considerato immerso in \mathbb{R}^{N-1} . Abbiamo che per \mathcal{H}^{N-2} -a.e. $x \in \partial^*\tilde{J}_k$, $x \in \mathcal{F}\tilde{J}_k$. Da cui segue che per \mathcal{H}^{N-2} -a.e. $x \in \partial\tilde{J}_k$, $x \in \mathcal{F}\tilde{J}_k$ che è quello che ci interessa. Possiamo ora applicare il Teorema 1.2.6 ottenendo che per qualsiasi $y \in \mathcal{F}\tilde{J}_k$

$$\mathbf{1}_{y+r\tilde{J}_k} \rightarrow \mathbf{1}_{H^+(y)} \quad \text{in } \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^{N-1}),$$

dove $H^+(y) = \{x \in \mathbb{R}^{N-1} : \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}$.

Dato che abbiamo dimostrato che per \mathcal{H}^{N-2} -a.e. $x \in \partial\tilde{J}_k$, $x \in \mathcal{F}\tilde{J}_k$, abbiamo che anche per \mathcal{H}^{N-2} -a.e. $x \in \partial\tilde{J}_k$

$$\mathbf{1}_{y+r\tilde{J}_k} \rightarrow \mathbf{1}_{H^+(y)} \quad \text{in } \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^{N-1}). \quad (4.64)$$

Dimostriamo ora che per \mathcal{H}^{N-2} -a.e. $y \in \partial\tilde{J}_k$

$$(\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \tilde{J}_k)^{y,r} \xrightarrow{*} \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}.$$

Osserviamo che per le proprietà della misura di Hausdorff in \mathbb{R}^N si ha che

$$(\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \tilde{J}_k)^{y,r} = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (y + r\tilde{J}_k).$$

Perciò consideriamo una qualsiasi funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora

$$(\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \tilde{J}_k)^{y,r}(\varphi) = \int_{y+r\tilde{J}_k} \varphi d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\text{supp } \varphi} \mathbf{1}_{(y+r\tilde{J}_k)} \varphi d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Ora dato che $\mathcal{H}^{N-1} = \mathcal{L}^{N-1}$ in \mathbb{R}^{N-1} abbiamo che per (4.64) passando al limite per $r \rightarrow 0$ si ha

$$(\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \tilde{J}_k)^{y,r} \xrightarrow{*} \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}.$$

Dato che $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \mathcal{G})$ per il Teorema di Radon-Nikodym si ha anche

$$g(\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \tilde{J}_k)^{y,r} \xrightarrow{*} g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}.$$

Da cui essendo g costante lungo J

$$(g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \tilde{J}_k)^{y,r} \xrightarrow{*} g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}.$$

Dato che J e \tilde{J} differiscono per un insieme \mathcal{H}^{N-1} -trascurabile si ha che $\nu = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \tilde{J}$, perciò

$$g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \tilde{J}_k = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\tilde{J} \cap \Pi_k) = \nu \llcorner \Pi_k.$$

Perciò passando al limite per $r \rightarrow 0$ otteniamo

$$\nu^\infty \llcorner \{\eta \cdot x = 0\} = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\} \quad (4.65)$$

per qualsiasi $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$. Perciò la Proposizione 3.3.3 e la Proposizione 4.1.2, esiste $u^\infty \in B^\infty(y)$ tale che $(u^\infty, h, \nu^\infty)$ è uno split state, infatti basta scegliere la sottosuccessione r_k tale che $u^{y,r_k} \rightarrow u^\infty$ in $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$.

Proviamo che ν^∞ si annulla fuori da $\{\eta \cdot x\}$. Dato che \tilde{J}_k è aperto relativamente a \mathcal{G} , abbiamo che $\partial\tilde{J}_k \subset \mathcal{G} \setminus \tilde{J}_k$ e quindi anche che $\partial\tilde{J}_k \subset \mathcal{G} \setminus \tilde{J}$. Perciò possiamo applicare i ragionamenti del passo 2 della Sezione 4.5.3 al punto $y \in \partial\tilde{J}_k$: otteniamo che esiste una funzione Borel misurabile $j : \partial\tilde{J}_k \rightarrow \{1, \dots, N\} \times \{\pm\}$ tale che

$$\nu(y + \mathcal{W}^{j(y)}) = 0 \quad \forall y \in \partial\tilde{J}_k \quad (4.66)$$

dove $\mathcal{W}^{i,\pm} := \pm W^{i,\pm}$.

Inoltre per il passo 3 della sezione 4.5.3, esiste una funzione Borel misurabile $j' : \partial\tilde{J}_k \rightarrow \{1, \dots, N\} \times \{\pm\}$ tale che

$$y \in \mathcal{G}_k^{j'(y)} \quad \forall y \in \partial\tilde{J}_k.$$

Sappiamo per il teorema di differenziazione di Lebesgue e per il teorema di Rademacher che per \mathcal{H}^{N-2} -a.e. $y \in \partial\tilde{J}_k$ si ha che y è un punto di Lebesgue per le funzioni j e j' , e y è un punto di differenziabilità del grafico Lipschitz $\mathcal{G}_k^{j'(y)}$.

Inoltre dato che \tilde{J}_k è a perimetro localmente finito e

$$\partial\tilde{J}_k \subset \partial\mathcal{A}_k^{1,+} \cup \dots \cup \partial\mathcal{A}_k^{N,+} \cup \partial\mathcal{A}_k^{1,-} \cup \dots \cup \partial\mathcal{A}_k^{N,-}$$

dal Teorema 1.2.7 segue che per \mathcal{H}^{N-2} -a.e. $y \in \partial\tilde{J}_k$, $\nu_k(y)$ è la normale interna rispetto a $\mathcal{A}_k^{j'(y)}$.

Prendiamo un y che soddisfa queste proprietà.

Per la proprietà (4.66), dato che tale proprietà si preserva tramite blow-up, otteniamo:

$$\nu^\infty(\{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x = 0\} + \mathscr{W}^{j(y)}) = 0, \quad \forall \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu). \quad (4.67)$$

Per semplificare le notazioni denotiamo con $\frac{a(v_1)}{h(v_1)}$ l'asse del prisma $\mathscr{W}^{j(y)}$ e con $\frac{a(v_2)}{h(v_2)}, \dots, \frac{a(v_N)}{h(v_N)}$ le direzioni caratteristiche.

Ricordiamo che $a(v_1), \dots, a(v_N)$ sono una base di \mathbb{R}^N e $\frac{a(v_1)}{h(v_1)} \cdot \eta = g > 0$ che implica che $a(v_1)$ e η non sono perpendicolari. Perciò un argomento di algebra lineare mostra che

$$\{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x = 0\} + \mathscr{W}^{j(y)} = H^+ \text{ (oppure } = H^-)$$

essendo H^+ e H^- definiti come

$$H^\pm := \{\eta \cdot x = 0, \pm \nu_k(y) \cdot x > 0\} + \mathbb{R} \frac{a(v_1)}{h(v_1)}.$$

Vogliamo ora dimostrare che in realtà $\{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x = 0\} + \mathscr{W}^{j(y)}$ non può essere uguale a H^+ . Infatti, supponiamo per assurdo che lo sia. Allora avremmo per la (4.67) che $\nu^\infty(H^+) = 0$. Per monotonia della misura di Radon avremo anche

$$\nu^\infty(\{\eta \cdot x = 0, +\nu_k(y) \cdot x > 0\}) = 0.$$

Dalla (4.65) otteniamo quindi

$$0 = \nu^\infty(\{\eta \cdot x = 0, +\nu_k(y) \cdot x > 0\}) = g \mathcal{H}^{N-1}(\{\eta \cdot x = 0, +\nu_k(y) \cdot x > 0\}),$$

che è assurdo. Perciò abbiamo

$$\nu^\infty(H^-) = 0. \quad (4.68)$$

(vedi Figura 4.3).

Dimostriamo ora che

$$\nu^\infty(H^+ \setminus \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}) = 0. \quad (4.69)$$

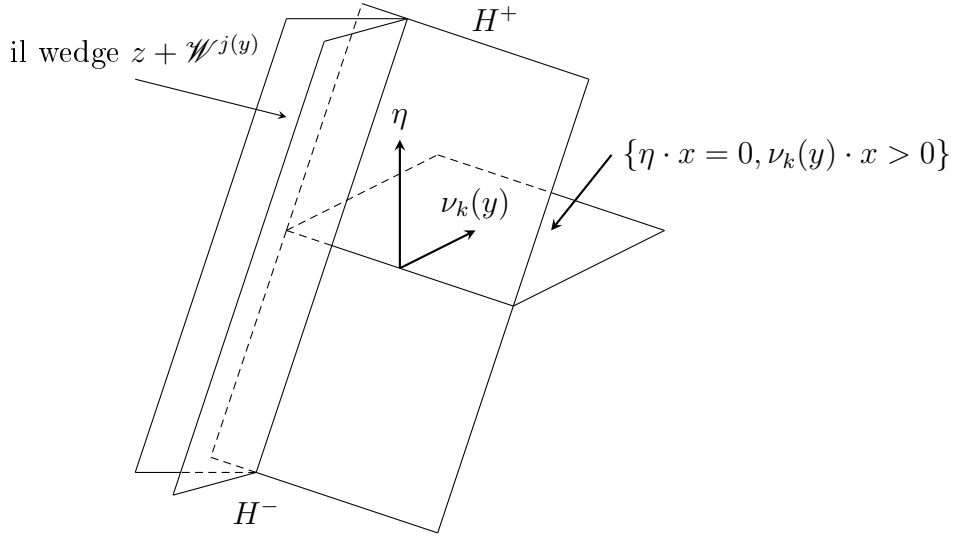
Infatti se applichiamo l'equazione cinetica a uno split state $(u^\infty, h, \nu^\infty)$ con $v = v_1$ otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{a(v_1)}{h(v_1)} \cdot \nabla_x \chi(v_1, u^\infty(x)) &= \nu^\infty \geq \nu^\infty[\{\eta \cdot x = 0\}] \\ &= g \mathcal{H}^{N-1}[\{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Inoltre dato che $\chi \in \{0, 1\}$, possiamo concludere da (4.70) e dal Lemma 4.4.1 sulla caratterizzazione degli split states con supporto in metà iperpiano che

$$\chi(v_1, u^\infty(\cdot)) = \begin{cases} 1 & \text{a.e. in } \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x > 0\} + \mathbb{R} \frac{a(v_1)}{h(v_1)}, \\ 0 & \text{a.e. in } \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x > 0\} - \mathbb{R} \frac{a(v_1)}{h(v_1)}. \end{cases}$$

Figura 4.3:



Applichiamo nuovamente l'equazione cinetica (3.4) ottenendo che, dato che $\chi(v_1, u^\infty(\cdot))$ è costante sui due aperti, allora ν^∞ si annulla sui due aperti. Dato che la loro unione è proprio $H^+ \setminus \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}$, otteniamo esattamente (4.69).

Se applichiamo i risultati della Sezione 4.5.3 allo split state $(u^\infty, h, \nu^\infty)$ si ottiene che $\nu^\infty = h\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J^\infty$ con J^∞ contenuto in una successione numerabile di iperpiani normali a η , vettore che dipende esclusivamente da h .

Consideriamo l'iperpiano $\mathbb{R}^N \setminus (H^+ \cup H^-) = \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x = 0\} + \mathbb{R} \frac{a(v_1)}{h(v_1)}$. Dato che $\frac{a(v_1)}{h(v_1)} \cdot \eta = g > 0$ l'iperpiano $\mathbb{R}^N \setminus (H^+ \cup H^-)$ è trasversale a J^∞ . Di conseguenza l'intersezione fra $\mathbb{R}^N \setminus (H^+ \cup H^-)$ e J^∞ è un'unione numerabile di sottospazi di dimensione $N - 2$, perciò

$$\nu^\infty(\mathbb{R}^N \setminus (H^+ \cup H^-)) = 0 \quad (4.71)$$

(vedi Figura 4.3).

Combinando (4.68), (4.69) e (4.71) otteniamo che il supporto di ν^∞ è contenuto in $\mathbb{R}^N \setminus \{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}$, perciò per la (4.65) otteniamo

$$\nu^\infty = g\mathcal{H}^{N-1}[\{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}].$$

Si osserva quindi che $(u^\infty, gh, \mathcal{H}^{N-1}[\{\eta \cdot x = 0, \nu_k(y) \cdot x \geq 0\}])$ è uno split state con supporto in metà iperpiano, possiamo perciò applicare il Lemma 4.4.1 e concludere che esiste C^* cono convesso che dipende solo da h tale che

$$\nu_k(y) \in C^* \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-2}\text{-a.e. } y \in \partial\tilde{J}_k.$$

PASSO 2

Ricordiamo che \tilde{J}_k è un insieme a perimetro localmente finito in Π_k , perciò possiamo applicare il teorema di Gauss per gli insiemi a perimetro finito (1.7): per qualsiasi $\varphi \in C_c^\infty(\Pi_k)$

$$\int_{\tilde{J}_k} \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\mathcal{F}\tilde{J}_k} \varphi \nu_k \, d\mathcal{H}^{N-2},$$

essendo $\mathcal{F}\tilde{J}_k$ la frontiera ridotta di \tilde{J}_k e ν_k la normale (nel senso degli insiemi a perimetro finito). Osserviamo ora che $\mathcal{L}^{N-1} = \mathcal{H}^{N-1}$ su $\Pi_k \subset \mathbb{R}^{N-1}$ e che per la conseguenza del Teorema 1.2.7, $\mathcal{F}\tilde{J}_k$ e $\partial\tilde{J}_k$ differiscono per un insieme \mathcal{H}^{N-2} trascurabile, perciò

$$\int_{\tilde{J}_k} \operatorname{div} \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\tilde{J}_k} \varphi \nu_k \, d\mathcal{H}^{N-2}.$$

Quindi per qualsiasi $\tau \in \mathbb{R}^N$ tale che $\tau \cdot \eta = 0$

$$\int_{\tilde{J}_k} \partial_\tau \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\tilde{J}_k} \varphi \tau \cdot \nu_k \, d\mathcal{H}^{N-2} \quad (4.72)$$

essendo $\partial_\tau \varphi := \tau \cdot \nabla \varphi$.

Consideriamo ora il seguente cono convesso:

$$C := \mathbb{R}_+ \{(a(v) \cdot \eta) a'(v) - (a'(v) \cdot \eta) a(v) : v \in (u^-, u^+)\}$$

e C^* il suo cono duale relativo all'iperpiano $\{\eta \cdot x = 0\}$. Sia inoltre τ una direzione appartenente al cono C^* , cioè tale che $\tau \cdot x \geq 0$ per qualsiasi $x \in C^*$. Dato che $\nu_k \in C^*$ per il Lemma 4.4.1 abbiamo che $\tau \cdot \nu_k \geq 0$, perciò possiamo concludere dalla (4.72) che la derivata debole di $\mathbf{1}_{\tilde{J}_k}$ è negativa in qualsiasi direzione τ duale rispetto a C^* e quindi che $\mathbf{1}_{\tilde{J}_k}$ è monotona non crescente in

quella direzione.

Avendo già dimostrato che $\partial\tilde{J}_k$ è contenuto in un unione di grafici Lipschitziani si ha che \tilde{J}_k può essere o l'intero iperpiano Π_k oppure il sopragrafico di una funzione Lipschitz. Inoltre la costante Lipschitz dipende solo dal cono duale C^* .

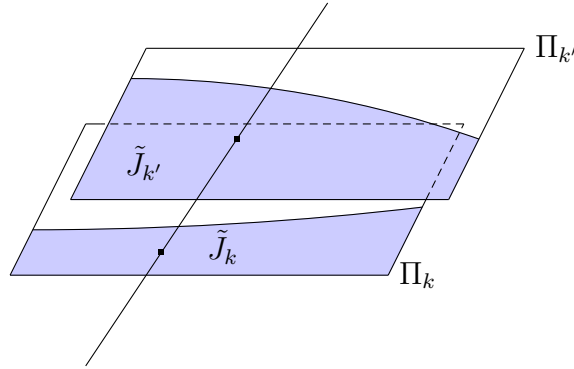
Fissiamo ora una direzione caratteristica $\frac{a(v_1)}{h(v_1)}$. Ragionando in modo analogo al passo 1 possiamo dimostrare che

$$\nu \left(\tilde{J}_k + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{h(v_1)} \right) = \nu \left(\tilde{J}_k - \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{h(v_1)} \right) = 0.$$

Inoltre dato che $\nu = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \tilde{J}$ con $g > 0$ questo implica che

$$\tilde{J} \cap \left(\tilde{J}_k + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{h(v_1)} \right) = \tilde{J} \cap \left(\tilde{J}_k - \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{h(v_1)} \right) = \emptyset. \quad (4.73)$$

Figura 4.4:



Supponiamo per assurdo che esista una componente $\tilde{J}_{k'}$ di \tilde{J} che giace in un differente iperpiano $\Pi_{k'}$ con $k \neq k'$. Ripetendo i ragionamenti precedenti anche $\tilde{J}_{k'}$ o è l'intero iperpiano $\Pi_{k'}$, oppure è il sopragrafico di una funzione Lipschitz la cui costante di Lipschitz è determinata da C^* . Dato che i sopragrafici sono generati dallo stesso cono C^* , allora esiste $y \in \tilde{J}_k$ tale che una delle due rette $y \pm \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{h(v_1)}$ interseca $\Pi_{k'}$ in un punto (Figura 4.4). Perciò

$$\tilde{J}_{k'} \cap \left(\left(\tilde{J}_k + \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{h(v_1)} \right) \cup \left(\tilde{J}_k - \mathbb{R}_+ \frac{a(v_1)}{h(v_1)} \right) \right) \neq \emptyset$$

in contraddizione con (4.73).

Perciò \tilde{J} giace in un singolo iperpiano.

□

Capitolo 5

Dimostrazione del teorema

Dopo aver caratterizzato gli split states possiamo affrontare la dimostrazione del teorema. Presentiamo prima di tutto il criterio di rettificabilità che utilizzeremo che è una versione particolare riferita al nostro caso specifico dei criteri di rettificabilità classici presentati per esempio in [1].

Lemma 5.0.2 *Sia ν una misura di Radon non-negativa e localmente finita su \mathbb{R}^N . Sia $J \subset \mathbb{R}^N$ un insieme con le seguente proprietà:*

- *Per qualsiasi $y \in J$ esiste un sistema di coordinate ortonormali x_1, \dots, x_N tale che, definendo l'insieme $C_y := \{8|x_1| \geq |(x_2, \dots, x_N)|\}$, si ha*

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\nu((y + C_y) \cap B_r(y))}{r^{N-1}} = 0.$$

- *Per qualsiasi $y \in J$*

$$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} > 0.$$

Allora J è contenuto in un'unione numerabile di grafici Lipschitz.

Dimostrazione. Fissiamo un sistema di coordinate ortonormali X_1, \dots, X_N e consideriamo il cono a due falde

$$C := \{6|X_1| \geq |(X_2, \dots, X_N)|\}.$$

Allora esistono N coni a due falde C_1, \dots, C_N ottenuti da un'opportuna rotazione di C intorno all'origine, tali che per qualsiasi sistema ortonormale x_1, \dots, x_N esiste $k \in \{1, \dots, N\}$ e

$$\{8|x_1| \geq |(x_2, \dots, x_N)|\} \supset C_k.$$

Per ipotesi possiamo quindi decomporre J in N sottoinsiemi J_1, \dots, J_N tali che

$$\forall y \in J_k \quad \lim_{r \downarrow 0} \frac{\nu((y + C_k) \cap B_r(y))}{r^{N-1}} = 0.$$

Perciò grazie alle due ipotesi possiamo decomporre J_k in una famiglia numerabile di sottoinsiemi $J_k^{l,m}$ con $l, m \in \mathbb{N}$ in modo che per qualsiasi $y \in J_k^{l,m}$ e per qualsiasi $r \leq \frac{1}{7}$ si abbia

$$\begin{cases} \nu((y + C_k) \cap B_{8r}(y)) \leq \frac{1}{m} r^{N-1}, \\ \nu(B_r(y)) > \frac{1}{m} r^{N-1}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Consideriamo $J_k^{l,m}$. Dato che C_k è stato ottenuto da una rotazione di C intorno all'origine degli assi, esiste una sistema di coordinate tale che $C_k = \{6|x_1| \geq |x'|\}$, dove $x' := (x_2, \dots, x_N)$.

Perciò si ha

$$z \in \{2|x_1| \geq |x'|\}, |z| = 7r \Rightarrow B_r(z) \subset \{6|x_1| \geq |x'|\}. \quad (5.2)$$

Infatti dato $\xi \in B_r(z)$ si ha

$$\begin{aligned} 6|\xi_1| &\geq 6(|z_1| - |\xi_1 - z_1|) \geq 6(|z_1| - |\xi - z|) \\ &\geq 6(|z_1| - r) \geq 3|z_1| + |z| - 6r \geq |z'| + r \\ &\geq |\xi'| - |z' - \xi'| + r \geq |\xi'|. \end{aligned}$$

Grazie a (5.2) dimostriamo che per esiste $\delta > 0$

$$\forall y \in J_k^{l,m} \quad J_k^{l,m} \cap (y + \{2|x_1| \geq |x'|\}) \cap B_{7\delta}(y) = \emptyset. \quad (5.3)$$

Infatti supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora esiste $w \in \mathbb{R}^N$ appartenente all'intersezione per qualsiasi $\delta > 0$. Poniamo $r := \frac{1}{7}|w - y| \leq \delta$. Dato che $w - y \in \{2|x_1| \geq |x'|\}$ e $|w - y| = 7r$ abbiamo da (5.2) che

$$B_r(w) \subset y + \{6|x_1| \geq |x'|\}.$$

Dato che $B_r(w) \subset B_{8r}(y)$ si ha

$$B_r(w) \subset (y + \{6|x_1| \geq |x'|\}) \cap B_{8r}(y).$$

Dato che questo contraddice (5.1) abbiamo dimostrato (5.3). Grazie a (5.3) possiamo suddividere $J_k^{l,m}$ in una quantità numerabile di sottoinsiemi ciascuno contenuto in una palla di raggio 2δ . Procedendo in questo modo otteniamo una decomposizione numerabile di J_k che chiameremo $\{J_{k,j}\}$ tale che

$$\forall j \quad \forall y \in J_{k,j} \quad J_{k,j} \cap (y + \{2|x_1| \geq |x'|\}) = \emptyset.$$

Di conseguenza ogni $J_{k,j}$ è contenuto in un grafico Lipschitziano come volevamo dimostrare. □

5.1 J è rettificabile

In questa sezione proveremo che J è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile. Lo strumento principale che useremo sarà la classificazione degli split states della Sezione 4.5. Innanzitutto per le proprietà di compattezza illustrate nella Proposizione 3.3.3 si ha che per qualsiasi $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ esiste $u^\infty \in B^\infty(y)$ tale che ν^∞ e u^∞ sono generati dalla stessa sequenza di blow-up. Perciò possiamo applicare la Proposizione 4.1.2 e il risultato sulla caratterizzazione degli split states generici della Proposizione 4.5.1 per ottenere il seguente risultato:

Proposizione 5.1.1 *Siano f, u come nel Teorema 3.3.1. Allora per \mathcal{H}^{N-1} -a.e $y \in J$ esistono due costanti $L, g > 0$ un un sistema ortonormali di coordinate x_1, \dots, x_n (dipendenti da y) con la seguente proprietà: Per qualsiasi $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ con $\nu \neq 0$, esistono*

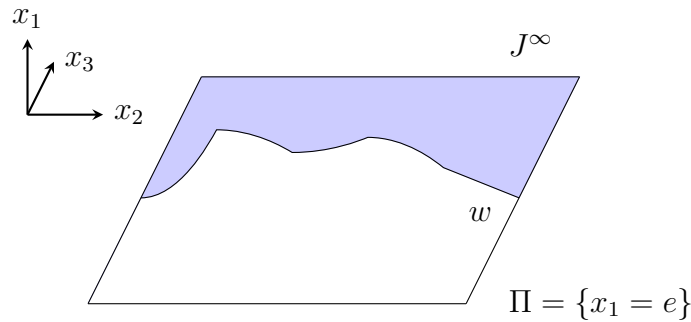
- una costante $e \in \mathbb{R}$,
- una funzione $w : \mathbb{R}^{N-2} \rightarrow \mathbb{R}$ con $Lip(w) \leq L$,

tali che $\nu^\infty = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J^\infty$ per qualche insieme J^∞ della forma

$$J^\infty = \{x_1 = e\} \quad \text{oppure} \quad J^\infty = \{x_1 = e, x_N \geq w(x_2, \dots, x_{N-1})\}.$$

Inoltre esiste almeno un $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ con $\nu^\infty \neq 0$.

Figura 5.1: L'insieme J^∞



Ricordiamo la definizione di J :

$$J := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} > 0 \right\}.$$

Di conseguenza esiste almeno una sottosuccessione r_k tale che

$$\exists \lim_{r_k \downarrow 0} \frac{\nu(B_{r_k}(y))}{r_k^{N-1}} > 0.$$

Riscaldando otteniamo che

$$0 < \lim_{r_k \downarrow 0} \frac{\nu(B_{r_k}(y))}{r_k^{N-1}} = \lim_{r_k \downarrow 0} \nu^{y, r_k}(B_1(0)) = \nu^\infty(B_1(0)),$$

che ci dice che esiste almeno un $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ con $\nu^\infty \neq 0$.

Il punto cruciale per dimostrare che J è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile è dimostrare che

$$0 \in J^\infty \quad \forall \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu). \quad (5.4)$$

Prima di provare (5.4) vediamo come questo risultato implica la rettificabilità di J . Fissiamo $y \in J$ tale che valga la Proposizione 5.1.1. Allora per (5.4) si ha che $e = 0$ e quindi che

$$J^\infty \subset \{x_1 = 0\} \quad \forall \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu).$$

Ricordiamo ora che per la Proposizione 3.3.3 abbiamo che $\{\nu^{y,r}\}_{r \downarrow 0}$ è debolmente * compatto. Perciò se scegliamo un cono $C_y := \{8|x_1| \geq |(x_2, \dots, x_N)|\}$ si ha

$$\begin{aligned} \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu((y + C_y) \cap B_r(y))}{r^{N-1}} &= \limsup_{r \downarrow 0} \nu^{y,r}(C_y \cap B_1(0)) \\ &= g\mathcal{H}^{N-1}(J^\infty \cap C_y \cap B_1(0)) \\ &\leq g\mathcal{H}^{N-1}(\{x_1 = 0\} \cap C_y) = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\nu((y + C_y) \cap B_r(y))}{r^{N-1}} = 0. \quad (5.5)$$

Osserviamo inoltre che dato che $e = 0$ per la (5.4), si ha $w(0) \leq 0$. Di conseguenza dato che w è Lipschitziana di costante L si ha che

$$|w(x_2, \dots, x_{N-1}) - w(0)| \leq L|(x_2, \dots, x_{N-1})|. \quad (5.6)$$

Dato che $w(0) \leq 0$ la (5.6) implica che

$$L|(x_2, \dots, x_{N-1})| \geq w(x_2, \dots, x_{N-1}).$$

Perciò dalla definizione di J^∞ , chiamando $c := L$ otteniamo perciò che esiste un cono $(N-1)$ -dimensionale

$$\tilde{C} := \{x_1 = 0, x_n \geq c|(x_2, \dots, x_{N-1})|\} \subset J^\infty \quad \forall \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu).$$

Dato che $\{\nu^{y,r}\}$ è debolmente* compatto si ha che esiste $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ tale che

$$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} = \nu^\infty(B_1(0)) \geq g\mathcal{H}^{N-1}(B_1(0) \cap \tilde{C}) > 0. \quad (5.7)$$

Per il Lemma 5.0.2 un insieme J che ha la proprietà (5.5) e (5.7) per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. y , è numerabilmente \mathcal{H}^{N-1} -rettificabile.

Ritorniamo ora a dimostrare (5.4). Fissiamo $y \in J$ tale che valga la proposizione 5.1.1 e dividiamo la dimostrazione di questo fatto in tre passi:

- Nel passo 1 introdurremo un funzionale \mathfrak{F} su $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ con la seguente proprietà: su $T^{N-1}(y, \nu)$, \mathfrak{F} ha massimo uguale a 1 sugli elementi di $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ della forma $\nu^\infty = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J^\infty$ tali che $0 \in J^\infty$.
- Nel passo 2 mostreremo che su $T^{N-1}(y, \nu)$ il funzionale \mathfrak{F} è monotono rispetto al riscaldamento $\nu^\infty \rightarrow (\nu^\infty)^{0,s}$ per $s > 0$.
- Nel passo 3 useremo un argomento di continuità per mostrare che le due uniche possibilità sono: $\mathfrak{F}(T^{N-1}(y, \nu)) = \{1\}$, oppure $\mathfrak{F}(T^{N-1}(y, \nu)) = \{0\}$. Questo ci permetterà di concludere (5.4).

5.1.1 Passo 1

In questo passo definiremo un funzionale \mathfrak{F} su $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e un numero $r_1 > 0$ tale che per qualsiasi $\nu^\infty = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$,

1. $\mathfrak{F}(\nu^\infty) \in [0, 1]$,
2. $\mathfrak{F}(\nu^\infty) = 1 \Leftrightarrow 0 \in J^\infty$,
3. $\mathfrak{F}(\nu^\infty) = 0 \Leftrightarrow \nu^\infty(B_{r_1}(0)) = 0$.

Ricordiamo che le costanti di Lipschitz delle funzioni w relative ad ogni $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ sono limitate dalla medesima costante L . Possiamo perciò trovare un wedge $W := \{x_N \geq c|x_2, \dots, x_{N-1}|\}$ tale che valga la seguente proprietà:

$$y \in J^\infty \Rightarrow (y + W) \cap \{x_1 = e\} \subset J^\infty.$$

Prendiamo una funzione cut-off $\varphi(r)$ della forma

$$\begin{cases} \varphi(r) > 0 & \text{per } r < 1 \\ \varphi(r) = 0 & \text{per } r \geq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi'(r) < 0 \quad \text{per } r \in [0, 1)$$

e definiamo il funzionale \mathcal{F} per qualsiasi $\tau \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ nel modo che segue

$$\mathcal{F}(\tau) := \frac{1}{b} \int_W \varphi(|x|) d\tau(x), \quad \text{dove } b := g \int_{\{x_1=0\} \cap W} \varphi(|x|) d\mathcal{H}^{N-1}(x)$$

e g è la costante della Proposizione 5.1.1. Se calcoliamo \mathcal{F} su $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ si ottiene

$$\mathcal{F}(\nu^\infty) = \mathcal{F}(g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J^\infty) = \frac{g}{b} \int_W \varphi(|x|) d\mathcal{H}^{N-1}(x).$$

Dato che $J^\infty \subset \{x_1 = e\}$ per le proprietà di φ si ha

$$\int_{J^\infty \cap W} \varphi(|x|) d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\{x_1=e\} \cap W} \varphi(|x|) d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\{x_1=0\} \cap W} \varphi(|x|) d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (5.8)$$

E l'uguaglianza vale solo se $J^\infty \supset \{x_1 = 0\} \cap W \cap B_1(0)$. Ciò dimostra che $\mathcal{F}(\nu^\infty) \in [0, 1]$ e che $\mathcal{F}(\nu^\infty) = 1 \Rightarrow 0 \in J^\infty$. Dimostriamo l'altra implicazione. Direttamente dalla Proposizione 5.1.1 si ha che per (5.6)

$$J^\infty \supset \{x_1 = e, x_N \geq w(0) + c|(x_2, \dots, x_{N-1})|\}.$$

Perciò, dato che abbiamo già visto che se $0 \in J^\infty$ allora $e = 0$ e $w(0) \leq 0$, si ha

$$0 \in J^\infty \Rightarrow J^\infty \supset \{x_1 = 0\} \cap W$$

e quindi per (5.8) ottiamo che $0 \in J^\infty \Rightarrow \mathcal{F}(\nu^\infty) = 1$.

Per dimostrare l'ultima proprietà di \mathcal{F} osserviamo che per la Proposizione 5.1.1 esiste $r_1 > 0$ tale che

$$J^\infty \cap W \cap B_1(0) = \emptyset \Rightarrow J^\infty \cap B_{r_1}(0) = \emptyset.$$

Dalla definizione di \mathcal{F} , dato che φ è supportata in $B_1(0)$, si ha

$$\mathcal{F}(\nu^\infty) = 0 \Rightarrow \nu^\infty(B_{r_1}(0)) = 0,$$

come volevamo dimostrare.

5.1.2 Passo 2

In questo passo vogliamo mostrare che per qualsiasi $\nu^\infty = g\mathcal{H}^{N-1}\lfloor J^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=1} \mathcal{F}((\nu^\infty)^{0,s}) \geq 0 \quad (5.9)$$

e l'uguaglianza vale solo se $\mathcal{F}(\nu^\infty) \in \{0, 1\}$. Osserviamo che dalla definizione di \mathcal{F} dato che W è stabile per omotetie con coefficiente positivo si ha

$$\mathcal{F}((\nu^\infty)^{0,s}) = \frac{g}{bs^{N-1}} \int_{J^\infty \cap W} \varphi\left(\frac{|x|}{s}\right) d\mathcal{H}^{N-1}(x).$$

Possiamo perciò derivare in senso classico rispetto ad $s > 0$ per ottenere

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=1} \mathcal{F}((\nu^\infty)^{0,s}) = -\frac{g}{b} \int_{J^\infty \cap W} (\varphi'(|x|)|x| + (N-1)\varphi(|x|)) d\mathcal{H}^{N-1}(x). \quad (5.10)$$

Consideriamo ora solo il primo addendo e utilizziamo le coordinate polari:

$$\begin{aligned} \int_{J^\infty \cap W} \varphi'(|x|)|x| d\mathcal{H}^{N-1}(x) &= \int_0^1 \varphi'(r)r \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)) dr \\ &= \int_0^1 (\varphi'(r)r^{N-1}) (r^{2-N} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0))) dr. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Per quanto riguarda il secondo addendo invece si ha

$$\begin{aligned} \int_{J^\infty \cap W} \varphi(|x|) d\mathcal{H}^{N-1}(x) &= \int_0^1 \varphi(r) \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)) dr \\ &= - \int_0^1 (\varphi'(r)r^{N-1}) (r^{1-N} \mathcal{H}^{N-1}(J^\infty \cap W \cap B_r(0))) dr. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Proviamo ora che dalla definizione di W e dalla definizione di J^∞ si ha

$$(e, \tilde{\rho}x_2, \dots, \tilde{\rho}x_N) \in J^\infty \cap W \Rightarrow (e, \rho x_2, \dots, \rho x_N) \in J^\infty \cap W, \quad (5.13)$$

per qualsiasi $\rho \geq \tilde{\rho} > 0$. Infatti dalla Lipschitzianità di w e dato che $\rho \geq \tilde{\rho} > 0$ si ha

$$\begin{aligned} w(\rho(x_2, \dots, x_{N-1})) &\leq w(\tilde{\rho}(x_2, \dots, x_{N-1})) + \rho|(x_2, \dots, x_{N-1})| \\ &\quad - \tilde{\rho}|(x_2, \dots, x_{N-1})| \leq \rho|(x_2, \dots, x_{N-1})|, \end{aligned}$$

da cui $(e, \rho x_2, \dots, \rho x_N) \in J^\infty$. Il fatto che $(e, \rho x_2, \dots, \rho x_N) \in W$ è immediato per ragioni di omogeneità.

La (5.13) implica direttamente che per qualsiasi $\rho \geq \tilde{\rho} > 0$

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}^{2-N} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_{\sqrt{e^2 + \tilde{\rho}^2}}(0)) \\ & \leq \rho^{2-N} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_{\sqrt{e^2 + \rho^2}}(0)), \end{aligned} \quad (5.14)$$

che per $r \geq \tilde{r} > e$ può essere riscritta come

$$\begin{aligned} & (\tilde{r}^2 - e^2)^{\frac{2-N}{2}} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_{\tilde{r}}(0)) \\ & \leq (r^2 - e^2)^{\frac{2-N}{2}} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Per la definizione di J^∞ abbiamo che $\mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_{\tilde{r}}(0)) = 0$ per $\tilde{r} \leq |e|$. Perciò possiamo dedurre che

$$\tilde{r}^{2-N} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_{\tilde{r}}(0)) \leq r^{2-N} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)) \quad (5.16)$$

per qualsiasi $r \geq \tilde{r} > 0$.

Scriviamo ora la (5.16) in questo modo:

$$\mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_{\tilde{r}}(0)) \leq \tilde{r}^{N-2} r^{2-N} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)) \quad (5.17)$$

e integriamo in $0 < \tilde{r} < r$ ottenendo

$$(N-1)r^{1-N} \mathcal{H}^{N-1}(J^\infty \cap W \cap B_r(0)) \leq r^{2-N} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)). \quad (5.18)$$

Perciò applicando la precedente unitamente ai risultati (5.10), (5.11) e (5.12) si dimostra la (5.9).

Per dimostrare la condizione necessaria per l'uguaglianza in (5.9) osserviamo innanzitutto che l'uguaglianza in (5.9) implica l'uguaglianza in (5.18) per a.e. $r \in [0, 1]$. A sua volta ciò implica che

$$\tilde{r}^{2-N} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_{\tilde{r}}(0)) = r^{2-N} \mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)) \quad (5.19)$$

per a.e. $1 \geq r \geq \tilde{r} \geq 0$. Di conseguenza abbiamo due possibilità:

$$\mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)) > 0 \quad \text{per a.e. } 1 \geq r \geq 0 \quad \text{oppure} \quad (5.20)$$

$$\mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)) = 0 \quad \text{per a.e. } 1 \geq r \geq 0. \quad (5.21)$$

Dimostriamo che (5.20) implica che $0 \in J^\infty$. Infatti supponiamo per assurdo che $0 \notin J^\infty$, allora esiste $r_1 > 0$ tale che $J^\infty \cap B_{r_1}(0) = \emptyset$. Di conseguenza $\mathcal{H}^{N-2}(J^\infty \cap W \cap \partial B_r(0)) = 0 \quad \forall r \in [0, r_1]$. Assurdo.

Analogamente si può dimostrare che (5.21) implica che $J^\infty \cap W \cap B_1(0) = \emptyset$. Infatti integrando la (5.21) su $[0, 1]$ si ha subito la tesi.

Perciò dai risultati del Passo 1 otteniamo

$$\mathcal{F}(\nu^\infty) = 1 \quad \text{oppure} \quad \mathcal{F}(\nu^\infty) = 0.$$

5.1.3 Passo 3

Consideriamo la funzione

$$f(r) := \mathcal{F}(\nu^{y,r}) = \frac{1}{b} \int_W \varphi(|x|) d\nu^{y,r}(x)$$

e calcoliamone la derivata

$$\begin{aligned} f'(r) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{b} \int_{y+W} \frac{1}{r^{N-1}} \varphi \left(\left| \frac{x-y}{r} \right| \right) d\nu(x) \right) \\ &= -\frac{1}{b} \int_{y+W} \left| \frac{x-y}{r^{N+1}} \right| \varphi' \left(\left| \frac{x-y}{r} \right| \right) + \frac{(N-1)r^{N-2}}{r^{2(N-1)}} \varphi \left(\left| \frac{x-y}{r} \right| \right) d\nu(x) \\ &= -\frac{1}{b} \int_{y+W} \frac{1}{r} \left| \frac{x-y}{r} \right| \varphi' \left(\left| \frac{x-y}{r} \right| \right) + \frac{(N-1)}{r^N} \varphi \left(\left| \frac{x-y}{r} \right| \right) d\nu(x) \\ &= -\frac{1}{rb} \int_W (|x| \varphi'(|x|) + (N-1) \varphi(|x|)) d\nu^{y,r}(x). \end{aligned}$$

Con calcoli analoghi si dimostra che

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=1} \mathcal{F}((\nu^{y,r})^{0,s}) = r f'(r).$$

Perciò vale la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} r f'(r) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=1} \mathcal{F}((\nu^{y,r})^{0,s}) \\ &= -\frac{1}{b} \int_W (|x| \varphi'(|x|) + (N-1) \varphi(|x|)) d\nu^{y,r}(x). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Vogliamo ora provare che entrambe le espressioni sono continue per blow-up. Cioè, data una successione $r_k \downarrow 0$ e $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ con $\nu^{y,r_k} \xrightarrow{*} \nu^\infty$, allora

$$f(r_k) \rightarrow \mathcal{F}(\nu^\infty), \quad (5.23)$$

$$r_k f'(r_k) \rightarrow \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=1} \mathcal{F}((\nu^\infty)^{0,s}). \quad (5.24)$$

Osserviamo che dato che $\nu^{y,r_k} \xrightarrow{*} \nu^\infty$ si ha

$$\int_{\dot{W}} \varphi(|x|) d\nu^\infty \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_W \varphi(|x|) d\nu^{y,r_k},$$

e

$$\int_{\overline{W}} \varphi(|x|) d\nu^\infty \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_W \varphi(|x|) d\nu^{y,r_k}.$$

Perciò si ha

$$\begin{aligned} \left| \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_W \varphi(|x|) d\nu^{y, r_k} - \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_W \varphi(|x|) d\nu^{y, r_k} \right| &\leq \int_{\partial W} \varphi(|x|) d\nu^\infty \\ &\leq g \int_{\{x_1=e\} \cap \partial W} \varphi(|x|) d\mathcal{H}^{N-1} = 0. \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato (5.23).

Per dimostrare (5.24) l'argomento è analogo. Utilizziamo la (5.22) e ripetiamo le stesse stime fatte precedentemente ricordando che $-\varphi'(|x|)|x| \leq 0$.

Proviamo ora che per qualsiasi $\delta > 0$ esiste $\epsilon > 0$ ed $r_0 > 0$ tali che

$$\forall r < r_0, \quad f(r) \in [\delta, 1 - \delta] \Rightarrow r f'(r) \geq \epsilon. \quad (5.25)$$

Supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora esiste $\delta > 0$ con la seguente proprietà: possiamo trovare una successione $r_k \downarrow 0$ in modo che $f(r_k) \in [\delta, 1 - \delta]$ e $r_k f'(r_k) < 1/k$ per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$. Per la Proposizione 3.3.3 $\{\nu^{y, r}\}$ è relativamente compatto in $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, perciò a meno di sottosuccessioni $\nu^{y, r_k} \xrightarrow{*} \nu^\infty$ per qualche $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$. Perciò da (5.23) e da (5.24) otteniamo

$$\mathcal{F}(\nu^\infty) \in [\delta, 1 - \delta] \quad \text{e} \quad \frac{d}{ds} \Big|_{s=1} \mathcal{F}((\nu^\infty)^{0,s}) = 0$$

in contraddizione con (5.9). Questo prova (5.25).

Proveremo ora che se $f(r)$ non converge a 1 quando $r \downarrow 0$, allora necessariamente deve convergere a 0. Per far ciò fissiamo dapprima $\delta > 0$. Allora esistono $\epsilon > 0$ e $r_0 > 0$ tali che valga la (5.25).

Sia quindi $r_1 < r_0$ tale che $f(r_1) \in [\delta, 1 - \delta]$. Dato che per qualsiasi $r > 0$ tale che $f([r, r_1]) \subset [\delta, 1 - \delta]$ vale la conseguente in (5.25) possiamo integrare tra r e r_1 e concludere che

$$f(r) \leq f(r_1) - \epsilon \log(r_1/r) \quad (5.26)$$

per qualsiasi $r > 0$ tale che $f([r, r_1]) \subset [\delta, 1 - \delta]$. Osserviamo ora che essendo $\lim_{r \downarrow 0} f(r_1) - \epsilon \log(r_1/r) = -\infty$ la (5.26) non può essere vera per qualsiasi $0 < r < r_1$. Dato che $f'(r) > 0 \forall r > 0$ esiste r_2 tale che $0 < r_2 < r_1$ e $f(r_2) < \delta$. Da cui si ottiene immediatamente che $f(r) < \delta$ per qualsiasi $r < r_2$.

Da queste considerazioni si può dedurre la seguente implicazione

$$\liminf_{r \downarrow 0} f(r) < 1 - \delta \Rightarrow \limsup_{r \downarrow 0} f(r) \leq \delta.$$

Perciò dato che $\delta > 0$ era arbitrario possiamo concludere che

$$\lim_{r \downarrow 0} f(r) = 1 \quad \text{oppure} \quad \lim_{r \downarrow 0} f(r) = 0.$$

Di conseguenza da (5.23) si ha

$$\mathcal{F}\left(T^{N-1}(y, \nu)\right) = \{1\} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{F}\left(T^{N-1}(y, \nu)\right) = \{0\}.$$

Ciò significa, per il passo 1, che

$$0 \in J^\infty \quad \forall \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu) \quad \text{oppure} \quad (5.27)$$

$$J^\infty \cap B_{r_1}(0) = \emptyset \quad \forall \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu). \quad (5.28)$$

Osserviamo ora che $T^{N-1}(y, \nu)$ è invariante per riscalamento. Infatti se consideriamo $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ per la Proposizione 5.1.1 $\nu^\infty = g\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J^\infty$. Perciò per le proprietà della misura di Hausdorff $(\nu^\infty)^{0,r} = \nu^\infty$ per qualsiasi $r > 0$. Conseguentemente (5.28) può essere riscritta come

$$J^\infty \cap B_r(0) = \emptyset \quad \forall \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu) \quad (5.29)$$

per qualsiasi $r > 0$ e quindi $T^{N-1}(y, \nu) = \{0\}$. Ma ciò non può essere a causa dell'ultima parte della Proposizione 5.1.1, perciò deve valere (5.27) che è proprio ciò che volevamo dimostrare.

5.2 J è l'insieme di salto

In questa sezione proveremo che J è l'insieme di salto nel senso del Teorema 3.3.1. Per dimostrare ciò useremo il fatto che J è rettificabile dimostrato nella sezione precedente e i lemmi 4.2.1 e 4.3.1 sulla caratterizzazione degli split states.

Iniziamo a dimostrare che per qualsiasi $y \notin J$ la funzione u ha VMO. Dalla definizione di J in (3.9) si ha

$$\nu^\infty = 0 \quad \forall \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu) \quad \text{e} \quad y \notin J. \quad (5.30)$$

Consideriamo $u^\infty \in B^\infty(y)$ con $y \notin J$. Allora esiste una successione $r_k \downarrow 0$ tale che $u^{y, r_k} \xrightarrow{*} u^\infty$. Per la Proposizione 3.3.3 si ha che a meno di sottosuccessioni $\nu^{y, r_k} \xrightarrow{*} \nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$. Perciò per la Proposizione 4.1.2 si ha che esiste $h \in BV(\mathbb{R})$ tale che $(u^\infty, h, \nu^\infty)$ è uno split state. Di conseguenza otteniamo dalla (5.30) che

$$a(v) \cdot \nabla_x(v, u^\infty(x)) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Perciò per la Proposizione 4.2.2 si ha

$$u^\infty = \text{const} \quad \forall u^\infty \in B^\infty(y) \text{ e } y \notin J.$$

Supponiamo per assurdo che u non abbia VMO. Allora deve essere

$$\limsup_{r \downarrow 0} \int_{B_r(y)} \left| u(x) - \int_{B_r(y)} u(z) dz \right| dx > 0.$$

Osserviamo ora che applicando due volte il lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \downarrow 0} \int_{B_r(y)} \left| u(x) - \int_{B_r(y)} u(z) dz \right| dx \\ & \leq \int_{B_1(0)} \int_{B_1(0)} \limsup_{r \downarrow 0} |u(y+rx) - u(y+rz)| dx dz. \end{aligned}$$

Da cui si ha che esiste $A \subset B_1(0) \times B_1(0)$ di misura positiva tale che

$$\limsup_{r \downarrow 0} |u(y+rx) - u(y+rz)| > 0 \quad \text{per a.e. } (x, z) \in A.$$

Esiste quindi una successione infinitesima r_k tale che

$$\lim_{r_k \downarrow 0} |u(y+r_k x) - u(y+r_k z)| > 0 \quad \text{per a.e. } (x, z) \in A. \quad (5.31)$$

Per la Proposizione 3.3.3 si ha che a meno di sottosuccessioni esiste $u^\infty \in B^\infty(y)$ tale che $u^{y, r_k} \rightarrow u^\infty$ quasi ovunque in \mathbb{R}^N . Perciò da (5.31) si ha

$$|u^\infty(x) - u^\infty(z)| > 0 \quad \text{per a.e. } (x, z) \in A. \quad (5.32)$$

Da cui si ottiene che u^∞ non può essere costante. Assurdo.

Dimostriamo ora che u ammette traccia su J .

Abbiamo provato nella sezione precedente che J è $(N-1)$ -rettificabile. Ciò $J = \bigcup_k J_k$ e ciascun J_k è contenuto in un grafico Lipschitziano. Proviamo prima di tutto che

$$\nu \geq g_k \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_k \quad \text{con } g_k(y) > 0 \text{ per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } y \in J_k. \quad (5.33)$$

Osserviamo che $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_k$ è una misura di Radon localmente finita. Possiamo perciò applicare il Teorema di Radon-Nikodym per ottenere

$$\nu = g_k \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_k + \nu_s,$$

dove ν_s è la parte singolare di ν e g_k è la densità di ν rispetto a $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_k$. Per il Teorema A.3.2 si ha perciò

$$g_k(y) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{\mathcal{H}^{N-1}(J_k \cap B_r(y))} \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } y \in J_k.$$

Inoltre dato che J_k è rettificabile per il Teorema 1.2.5 si ha

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(J_k \cap B_r(y))}{r^{N-1}} = 1 \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } y \in J_k.$$

Inoltre per la definizione di J , dato che $J_k \subset J$

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\nu(B_r(y))}{r^{N-1}} > 0 \quad \forall y \in J_k,$$

che ci permette di concludere che

$$g_k(y) > 0 \quad \text{per } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } y \in J_k.$$

Da cui si ha (5.33).

Vogliamo ora usare la rettificabilità di J per caratterizzare $T^{N-1}(y, \nu)$. Per la Proposizione 5.1.1, dato che abbiamo già dimostrato che $0 \in J^\infty$ si ha che per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in J$ esiste un sistema di coordinate ortonormale x_1, \dots, x_N tale che per qualsiasi $\nu^\infty \in T^{N-1}(y, \nu)$ si ha

$$\nu^\infty = g \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J^\infty \quad \text{con } J^\infty \subset \{x_1 = 0\}. \quad (5.34)$$

Da (5.33) abbiamo che per \mathcal{H}^{N-1} -a.e. $y \in J_k$

$$\nu^{y,r} \geq g_k(y + rx) r^{N-1} \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_k.$$

Perciò dato che J_k è contenuto in un grafico Lipschitz, passando al limite per una qualsiasi sequenza di blow-up si ha

$$\nu^\infty \geq g_k(y) \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \{x \cdot \eta_k(y) = 0\}, \quad (5.35)$$

essendo $\eta_k(y)$ il versore normale a J_k in y . Combinando (5.34) e (5.35) ricordando che $g_k(y) > 0$ si ha

$$\frac{g}{g_k(y)} \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J^\infty \geq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \{x \cdot \eta_k(y) = 0\}.$$

Da cui

$$\{x \cdot \eta_k(y) = 0\} \subset J^\infty \subset \{x_1 = 0\}$$

e quindi $J^\infty = \{x \cdot \eta_k(y) = 0\}$.

Possiamo perciò riscrivere la (5.34) come

$$\nu^\infty = g\mathcal{H}^{N-1}[\{x \cdot \eta_k(y) = 0\}].$$

Per la Proposizione 4.1.2 si ha che per qualsiasi $u^\infty \in B^\infty(y)$ esiste $h \in BV(\mathbb{R})$ e $\nu \in T^{N-1}(y, \nu)$ tali che $(u^\infty, h, \nu^\infty)$ sia uno split state. Possiamo perciò applicare la Proposizione 4.3.2 ed affermare che

$$u^\infty = \begin{cases} u_y^+ & \text{in } \{\eta_y \cdot x > 0\} \\ u_y^- & \text{in } \{\eta_y \cdot x < 0\} \end{cases} \quad \forall u^\infty \in B^\infty(y) \text{ e } \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. } y \in J, \quad (5.36)$$

con $u_y^+, u_y^- \in \mathbb{R}$ che dipendono solo da y .

Proviamo infine che esistono le tracce di u su J . Dimostriamo che esiste la traccia superiore di u su J . Sia $y \in J$. Supponiamo per assurdo che per qualsiasi $l \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{r \downarrow 0} \int_{B_r^+(y)} |u(x) - l| dx > 0.$$

Applicando il Lemma di Fatou otteniamo che

$$\limsup_{r \downarrow 0} |u(y + rx) - l| > 0 \quad \text{per a.e. } x \in B_1^+(0).$$

Perciò per la Proposizione 3.3.3 esiste $u^\infty \in B^\infty(y)$ tale che

$$|u^\infty(x) - l| > 0 \quad \text{per a.e. } x \in B_1^+(0)$$

e quindi da (5.36)

$$|u_y^+ - l| > 0$$

per qualsiasi $l \in \mathbb{R}$. Assurdo.

Analogamente si dimostra l'esistenza della traccia inferiore.

Appendice A

Complementi di teoria della misura

Riportiamo in appendice alcuni dei teoremi di teoria della misura che abbiamo usato nello svolgimento delle tesi. Si tratta di risultati fondamentali in quest'ambito, ma che possono non appartenere al bagaglio di conoscenze di un matematico non avvezzo a lavorare con questi strumenti. Questo è il criterio con cui abbiamo selezionato i teoremi e le definizioni che seguono.

A.1 Teorema di disintegrazione

Teorema A.1.1 (Disintegrazione) *Siano $E \subset \mathbb{R}^N$ e $F \subset \mathbb{R}^M$ aperti. E sia μ una misura di Radon su $E \times F$. Indichiamo con $\pi : E \times F \rightarrow E$ la proiezione canonica sul primo fattore e con $\nu = \pi_{\#}|\mu|$ il push forward della misura variazione totale $|\mu|$. Supponiamo inoltre che ν sia una misura di Radon.*

Allora esiste una mappa $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R})$ debolmente ν -misurabile tale che:

$$\int \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v, x) dH_x(v) d\nu(x) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

A.2 Teoremi di ricoprimento

Teorema A.2.1 (Teorema di ricoprimento di Besicovitch) *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e sia $\rho : A \rightarrow (0, \infty)$. Allora esiste un insieme $S \subset A$ al più numerabile tale che*

$$A \subset \bigcup_{x \in S} B_{\rho(x)}(x)$$

e ogni punto di \mathbb{R}^N appartiene, al più, a ξ palle $B_{\rho(x)}(x)$ centrate in un punto $x \in S$. E ξ è un numero che dipende solo dalla dimensione dello spazio.

Teorema A.2.2 (Teorema di ricoprimento di Vitali) *Sia \mathcal{F} una famiglia di palle chiuse non degeneri in \mathbb{R}^N tale che*

$$\sup\{\text{diam}B : B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Allora esiste una famiglia numerabile \mathcal{G} di palle di disgiunte di \mathcal{F} tale che

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B},$$

dove \hat{B} denota la palla concentrica a B di raggio 5 volte il raggio di B .

A.3 Teoremi di Radon-Nikodym e di Besicovitch

Definizione A.3.1 (Misure assolutamente continue) *Sia μ una misura positiva e sia ν una misura reale (o vettoriale) entrambe definite sullo stesso spazio di misura (X, Σ) , dove con Σ si indica la σ -algebra definita su X . Diremo che ν è assolutamente continua rispetto a μ e scriveremo $\nu \ll \mu$ se per qualsiasi $B \in \Sigma$ vale la seguente implicazione*

$$\mu(B) = 0 \Rightarrow |\nu|(B) = 0.$$

Definizione A.3.2 (Misure mutuamente singolari) *Siano μ e ν misure positive entrambe definite sullo stesso spazio di misura (X, Σ) . Diremo che μ e ν sono mutuamente singolari, e scriveremo $\nu \perp \mu$, se esiste $E \in \Sigma$ tale che $\mu(E) = 0$ e $\nu(X \setminus E) = 0$. Se μ o ν sono misure vettoriali diremo che sono mutuamente singolari se lo sono le loro variazioni totali $|\mu|$ e $|\nu|$.*

Teorema A.3.1 (Radon-Nikodym) *Sia μ una misura positiva σ -finita e sia ν una misura vettoriale a valori in \mathbb{R}^m entrambe definite sullo stesso spazio di misura (X, Σ) . Allora esiste un'unica coppia di misure vettoriali ν^a e ν^s a valori in \mathbb{R}^m , tali che $\nu^a \ll \mu$, $\nu^s \perp \mu$ e $\nu = \nu^a + \nu^s$. Inoltre esiste un'unica $f \in [\mathcal{L}(X, \mu)]^m$ tale che $\nu^a = f\mu$. La funzione f è chiamata la densità di ν rispetto a μ .*

Teorema A.3.2 (Besicovitch) Sia μ una misura di Radon positiva in un aperto $U \subset \mathbb{R}^N$ e ν un misura vettoriale a valori in \mathbb{R}^m . Allora per μ -a.e. x nel supporto di μ il limite

$$f(x) := \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\nu(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))}$$

esiste in \mathbb{R}^m e la decomposizione di Radon-Nikodym di ν è data da $\nu = f\mu + \nu^s$, dove $\nu^s = \nu \llcorner E$ ed E è l'insieme μ -trascurabile

$$E = (U \setminus \text{supp}\mu) \cup \left\{ x \in \text{supp}\mu : \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{|\nu|(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} = \infty \right\}.$$

A.4 Densità di misure

Definizione A.4.1 Sia μ una misura di Radon positiva in un aperto $U \subset \mathbb{R}^N$ e sia $k \geq 0$. La densità superiore (risp. inferiore) k -dimensionale di μ in x è definita da

$$\Theta_k^*(\mu, x) = \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu(B_\rho(x))}{\omega_k \rho^k}, \quad \left(\text{risp. } \Theta_{*k}(\mu, x) = \liminf_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu(B_\rho(x))}{\omega_k \rho^k} \right).$$

Se $\Theta_k^*(\mu, x) = \Theta_{*k}(\mu, x)$ il loro valore comune sarà denotato con $\Theta_k(\mu, x)$. Inoltre per qualsiasi boreliano $E \subset U$ possiamo definire

$$\Theta_k^*(E, x) = \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^k(E \cap B_\rho(x))}{\omega_k \rho^k}, \quad \Theta_{*k}(E, x) = \liminf_{\rho \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^k(E \cap B_\rho(x))}{\omega_k \rho^k}$$

e se coincidono denoteremo il valore comune con $\Theta_k(E, x)$.

Dopo aver definito il concetto di densità di una misura e di un insieme rispetto ad un punto, vediamo come questa grandezza è in relazione con la misura di Hausdorff dell'insieme stesso.

Teorema A.4.1 Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto e sia μ una misura di Radon positiva in U . Allora per qualsiasi $t \in (0, \infty)$ e per qualsiasi boreliano $B \subset U$ valgono le seguenti implicazioni:

$$\Theta_k^*(\mu, x) \geq t \quad \forall x \in B \quad \Rightarrow \quad \mu \geq t\mathcal{H}^k \llcorner B \quad (\text{A.1})$$

$$\Theta_{*k}(\mu, x) \leq t \quad \forall x \in B \quad \Rightarrow \quad \mu \leq 2^k t \mathcal{H}^k \llcorner B. \quad (\text{A.2})$$

Inoltre da questo teorema discendono immediatamente due utili conseguenze:

$$\Theta_k^*(\mu, x) < \infty \quad \text{per } \mathcal{H}^k\text{-a.e. } x \in U \quad (\text{A.3})$$

e

$$B \in \mathcal{B}(U), \mu(B) = 0 \Rightarrow \Theta_k(\mu, x) = 0 \quad \mathcal{H}^k\text{-a.e. } x \in B. \quad (\text{A.4})$$

Spostiamo ora la nostra attenzione sulla definizione della densità di un insieme in un punto. Sia E un insieme \mathcal{H}^k -misurabile con $\mathcal{H}^k(E) < \infty$. Osserviamo che se $k = 0$ e $k = N$ si ha che la densità $\Theta_k(E, x)$ esiste e coincide con $\mathbf{1}_E(x)$ per \mathcal{H}^k -a.e. $x \in \mathbb{R}^N$. Se invece $0 < k < N$ le uniche informazioni che abbiamo dal Teorema A.4.1 sono:

$$\Theta_k(E, x) = 0 \quad \text{per } \mathcal{H}^k\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^N \setminus E \quad (\text{A.5})$$

e

$$2^{-k} \leq \Theta_k^*(E, x) \leq 1 \quad \text{per } \mathcal{H}^k\text{-a.e. } x \in E. \quad (\text{A.6})$$

A.5 Teorema di rappresentazione di Riesz

Teorema A.5.1 (Riesz) *Sia $L : C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare che soddisfa la condizione*

$$\sup\{L(\varphi) : \varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m), |\varphi| \leq 1, \text{supp}\varphi \subset K\} < \infty$$

per qualsiasi compatto $K \subset \mathbb{R}^N$. Allora esiste una misura di Radon su \mathbb{R}^N e una funzione μ -misurabile $\sigma : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che

- $|\sigma(x)| = 1 \quad \text{per } \mu\text{-a.e. } x \in \mathbb{R}^N,$
- $L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \cdot \sigma \, d\mu,$

per qualsiasi $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$.

A.6 Convergenza debole* e risultati di compattezza per misure di Radon

Dato X spazio metrico, vediamo com'è definita la nozione di convergenza in $\mathcal{M}_{loc}(X)$.

Definizione A.6.1 (Convergenza debole) Sia $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(X)$ e sia $(\mu^r) \subset \mathcal{M}_{loc}(X)$. Diremo che (μ^r) converge localmente debolmente* a μ se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_X \varphi d\mu^r = \int_X \varphi d\mu$$

per qualsiasi $\varphi \in C_c(X)$.

Vediamo quindi il classico criterio di compattezza di De La Vallée Poussin:

Teorema A.6.1 Sia $\{\mu^r\}$ una successione di misure di Radon su uno spazio metrico l.c.s X , tali che $\sup\{|\mu^r|(K) : r \in \mathbb{N}\} < \infty$ per qualsiasi compatto $K \subset X$. Allora esiste una sottosuccessione localmente debolmente* convergente. Inoltre per ogni aperto A la mappa $\mu \rightarrow |\mu|(A)$ è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole* locale.

Bibliografia

- [1] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [2] H. Brezis: *Analisi funzionale*. Liguori editore.
- [3] G. Crippa, F. Otto and M. Westdickemberg: *Regularizing Effect of Nonlinearity in Multidimensional Scalar Conservation Laws*. Proceedings of the *Lectures on Transport Equations and Multi-D Hyperbolic Conservation Laws*, Bologna, January 17-20, 2005.
- [4] C.M. Dafermos: *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, 2000.
- [5] C. De Lellis, F. Otto and M. Westdickemberg: *Structure of Entropy Solutions for Multi-Dimensional Scalar Conservation Laws*. Arch. Ration. Mech. Anal. 170(2): 137-184, 2003.
- [6] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [7] L.C. Evans, R.F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1992.
- [8] S.N. Kruzkov: *First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables*: Mat. Sbornik Tom 81 (123)(1970), No. 2.
- [9] P.L. Lions, B. Perthame, and E. Tadmor: *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations* J. Amer. Math. Soc. 7(1): 169-191, 1994.
- [10] W. Rudin: *Analisi Reale e Complessa*. Bollati Boringhieri, 1974.
- [11] J. Smoller: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 1983.

- [12] Z. Szmydt: *Fourier Transformation and Linear Differential Equations*.
PWN-Polish Publisher. Warszawa, 1977.